

# Olimpíada Regional de Matemática – 2002

Região da Grande Porto Alegre

Segunda Fase — Nível 2

## Problema 1

Determine todos os números naturais que possuem **três** algarismos *não nulos e distintos* e que satisfazem a seguinte propriedade:

- a soma de todos os números de dois dígitos que podem ser formados a partir de seus algarismos resulta no próprio número.

*Obs.* A soma dos números de dois dígitos a partir de 486, por exemplo, é igual a  $48 + 46 + 84 + 86 + 64 + 68 = 396$ .

## Problema 2

Sejam  $r$  e  $s$  duas retas perpendiculares entre si que se cruzam no centro  $O$  de uma circunferência de raio 1. Considere  $A$  um ponto da reta  $r$ , externo à circunferência, e  $M$  o ponto médio do segmento  $\overline{AO}$ . Escolhe-se um ponto  $N$  da circunferência tal que  $MO = MN$ . A reta que passa por  $A$  e  $N$  corta  $s$  em  $B$ .

Mostre que  $AN \times BN = 1$ .

## Problema 3

O campeonato mundial de Fórmula 1 do planeta Vênus é disputado por 16 pilotos, em 8 corridas. A pontuação final de cada corrida é distribuída da seguinte maneira:

Colocação	Número de pontos atribuídos
1°	10
2°	6
3°	4
4°	3
5°	2
6°	1
7°, 8°, 9°, ..., 16°	0

A classificação final de cada piloto é feita com base nos pontos que este acumulou durante o campeonato.

*a.* Qual a pontuação mínima que um piloto deve obter, na classificação final, para ser o campeão isolado no campeonato?

Hoje, 30/11/2002, terminou a temporada 2002 do campeonato Venu-siano de Fórmula 1. Na classificação final, os **dez** primeiros colocados

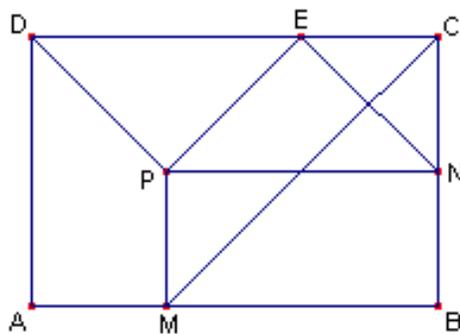
obtiveram pontuações distintas (não há necessidade de que apenas **um** piloto tenha obtido a **décima** colocação).

b. Qual a pontuação máxima que o **sexto** colocado deste ano pode ter obtido?

c. Qual a pontuação mínima que o **terceiro** colocado deste ano pode ter obtido?

#### Problema 4

Sejam  $ABCD$  um retângulo (com os pontos marcados no sentido anti-horário) e  $P$  um ponto em seu interior. Os pontos  $M$  e  $N$  estão sobre os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  respectivamente, de forma que  $MBNP$  é um retângulo. Suponha que existe um ponto  $E$  sobre  $\overline{CD}$  tal que  $\overline{EN}$  é paralelo a  $\overline{DP}$ ,  $\overline{EP}$  é paralelo a  $\overline{CM}$  e  $DE = 2 \times CE$ .



Prove que os pontos  $A$ ,  $P$  e  $E$  estão alinhados.

#### Problema 5

Existe algum número natural  $n$  de **quatro** algarismos distintos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  (nesta ordem) tal que  $A$  divide  $CD$ ,  $B$  divide  $DA$ ,  $C$  divide  $AB$  e  $D$  divide  $BC$ ?

*Obs.* “ $A$  divide  $CD$ ” não significa que  $A$  é um divisor de  $C \times D$ , mas sim do número de dois dígitos cujo algarismo das dezenas é  $C$  e o das unidades é  $D$ .