Olimpíada Regional de Matemática Grande Porto Alegre – 2001

Nível 1 – Fase 2

Instruções:
- *A duração da prova é de 4 horas*
- *Não é permitido o uso de calculadora nem consulta a livros ou notas*
- *Você pode solicitar papel para rascunho*
- *Entregue somente as folhas de respostas*
- *Todas as suas respostas devem ser justificadas*

Problema 1. É possível cobrir um tabuleiro 10 x 10 com dominós 1 x 3?

Problema 2. André, Bernardo e Carla tentam adivinhar um número escolhido aleatoriamente no conjunto {1,2,...,100}. Cada um tem direito a um palpite e há um prêmio para quem mais se aproximar do resultado correto. (em caso de empate, os empatantes ganham) Se André joga no 33 e Bernardo joga no 75, qual a melhor jogada que Carla pode fazer?

Problema 3. Em uma eleição para representante de turma, havia cinco candidatos e cada um deles obteve 6 votos a mais que o seguinte. Se o último colocado teve 10 votos, quantos votos teve o vencedor e quantos eram os eleitores?

Problema 4. Utilize os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, cada um uma única vez, forme 3 números de 3 algarismos cada de modo que o segundo seja o dobro do primeiro e o terceiro seja o triplo do primeiro.

Olimpíada Regional de Matemática Grande Porto Alegre – 2001

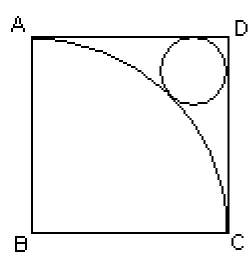
Nível 2 – Fase 2

Instruções:
- *A duração da prova é de 4 horas*
- *Não é permitido o uso de calculadora nem consulta a livros ou notas*
- *Você pode solicitar papel para rascunho*
- *Entregue somente as folhas de respostas*
- *Todas as suas respostas devem ser justificadas*

Problema 1. Prove que existe um conjunto S de infinitos números inteiros positivos que satisfaz as seguintes condições:
(i) quaisquer dois elementos possuem divisores comuns maiores do que 1
(ii) qualquer numero inteiro possui um múltiplo no conjunto
(iii) nenhum elemento é primo
(iv) não existe um número inteiro maior do que 1 que divide todos elementos

Problema 2. São escolhidos 2001 pontos sobre uma reta AB fora do segmento AB. É possível que a soma das distâncias dos pontos até A seja igual a soma das distâncias dos pontos até B?

Problema 3. Seja ABCD um quadrado de lado 1. Traça-se uma circunferência C_1 com centro em B e raio 1, e uma circunferência C_2 que tangencia os segmentos AD e DC e a circunferência C_1 como mostra a figura abaixo.



Calcule o raio da circunferência C_2.

Problema 4. Após se prolongar os lados de um hexágono regular (h), obtém-se uma estrela de seis pontas. Em seguida, une-se as pontas da estrela por segmentos de reta, formando um hexágono regular (H). Qual a razão das áreas de H e h?

Olimpíada Regional de Matemática Grande Porto Alegre – 2001

Nível 3 – Fase 2

Instruções:

- *A duração da prova é de 4 horas*
- *Não é permitido o uso de calculadora nem consulta a livros ou notas*
- *Você pode solicitar papel para rascunho*
- *Entregue somente as folhas de respostas*
- *Todas as suas respostas devem ser justificadas*

Problema 1. Prove que existe um conjunto S de infinitos números inteiros positivos que satisfaz as seguintes condições:
(i) quaisquer dois elementos possuem divisores comuns maiores do que 1
(ii) qualquer numero inteiro possui um múltiplo no conjunto
(iii) nenhum elemento é primo
(iv) não existe um número inteiro maior do que 1 que divide todos elementos

Problema 2. Uma seqüência $(s_1,s_2,...,s_k)$ de números inteiros positivos consecutivos (na ordem dada) é dita uniforme e sua soma vale $s_1+s_2+...+s_k$, por exemplo: (1,2,3,4), (10,11,12), (3) e (1000,1001) são seqüências uniformes. Seja N um número inteiro positivo. Mostre que a quantidade de seqüências uniformes distintas cuja soma vale N é igual ao número de divisores positivos ímpares de 2N.

Problema 3. Prove que se N é um número inteiro positivo maior do que 1, então a soma $1+{}^1/_2+...+{}^1/_N$ não é um número inteiro.

Problema 4. Escrevem-se números, nos vértices de um tetraedro regular. Escreve-se, em cada aresta, a soma dos números escritos nos seus vértices. Por fim escreve-se, em cada face, a soma dos números escritos nos suas arestas. É possível que a soma dos números escritos nas faces seja 2001?