Olimpíada Regional de Matemática Grande Porto Alegre, 2001

Nível 1 – Fase 2

1) É possível cobrir um tabuleiro 10 x 10 com dominós 1 x 3?

Solução. Um montante de N dominós 1 x 3 cobrem 3N casas, o tabuleiro 10 x 10 possui 100 casas, como não existe solução inteira para 3N = 100, é impossível cobrir o tabuleiro dessa forma.

2) André, Bernardo e Carla tentam adivinhar um número escolhido aleatoriamente no conjunto {1,2,...,100}. Cada um tem direito a um palpite e há um prêmio para quem mais se aproximar do resultado correto. (em caso de empate, os empatantes ganham) Se André joga no 33 e Bernardo joga no 75, qual a melhor jogada que Carla pode fazer?

Solução. Se Carla joga num número x, inferior a 33, ele ganha se o número escolhido aleatoriamente for 1, 2, ..., x ou se ele for mais perto de x do que de 33, ou seja, ela ganha se o número for um dentre 1, 2, ..., [(x+33)/2]. A melhor jogada é o 32, para o qual ela irá ganhar se o número aleatório for um dos 32: {1, 2, 3, ..., 32}. Se Carla joga num número x, superior a 75, fazendo-se uma análise parecida, ela ganha se o número for [(x+77)/2], ..., 99, 100. A melhor jogada é o 76, para o qual ela irá se o número aleatório for um dos 24: {76, 77, ..., 100}. Se Carla joga num número x, entre 33 e 75, ela ganha caso o número aleatório seja [(33+x)/2], ...,[(75+x)/2], o que resulta (75 – 33)/2 = 21 possibilidades, independentemente do x escolhido.
A melhor jogada que Carla pode fazer, portanto, é no 32.
Obs. [r] calcula o maior inteiro não superior a r.

3) Em uma eleição para representante de turma, havia cinco candidatos e cada um deles obteve 6 votos a mais que o seguinte. Se o último colocado teve 10 votos, quantos votos teve o vencedor e quantos eram os eleitores?

Solução. O último candidato obteve 10 votos; o penúltimo obteve 10+6=16 votos; o ante-penúltimo, 16+6=22 votos; o segundo, 22+6=28; e o primeiro teve 28+6=34 votos. Os candidatos obtiveram: 10, 16, 22, 28 e 34 votos. O primeiro teve 34 votos, e o número de votantes foi 10+16+22+28+34=110.

4) Utilize os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, cada um uma única vez, forme 3 números de 3 algarismos cada de modo que o segundo seja o dobro do primeiro e o terceiro seja o triplo do primeiro.

Solução. Existe mais de uma solução. Um dos números, o menor, deve ser inferior a 333, pois caso contrário o maior seria superior a 3.333 = 999, o que não pode acontecer. Fazendo-se algumas tentativas encontramos uma das soluções. Todas elas são: {192, 384, 576}, {219, 438, 657}, {273, 546, 819} e {327, 654, 981}.

Nível 2 – Fase 2

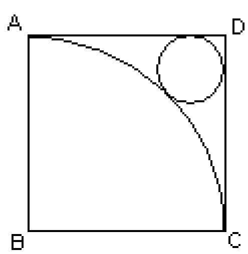
1). Prove que existe um conjunto S de infinitos números inteiros positivos que satisfaz as seguintes condições:
(i) quaisquer dois elementos possuem divisores comuns maiores do que 1
(ii) qualquer numero inteiro possui um múltiplo no conjunto
(iii) nenhum elemento é primo
(iv) não existe um número inteiro maior do que 1 que divide todos elementos

Solução. Obtemos, inicialmente, uma trinca de números inteiros (a, b, c) tais que não existe um divisor maior do que 1 comum aos três, no entanto existem divisores maiores do que 1 comum dos pares. Por exemplo: 10, 12, 15. Em seguida formamos o conjunto S de todos os múltiplos de a, b, c.
A condição i é satisfeita pois mdc(x.a, y.b) >= mdc(a, b) > 1, e análogo para a, c e para b, c. A condição ii é satisfeita pois para todo n, o número a.n pertence ao conjunto. Certamente não há primos em S, o que satisfaz iii. E, por fim, a, b, c pertencem ao conjunto S e não há divisores maiores do que 1 comum aos três, o que implica iv.

É interessante observar que se um conjunto satisfaz as propriedades i, ii, iii e iv, então ele satisfaz a uma quinta:
v) existe um subconjunto finito C de S o qual não possui divisores maiores do que 1 comum a todos seus elementos
De fato, se não existisse tal conjunto C, e colocássemos S = {x1, x2, ..., xn, ...} então cada conjunto {x1}, {x1, x2}, {x1, x2, x3}, ... iria ter um divisor comum a todos seus elementos maior do que 1. O mdc desses conjuntos é certamente não-decrescente, donde, a partir de um determinado n teríamos mdc{x1, x2, ..., xn, ..., x(n+m)} = d > 2 para todo m > 0. Logo d divide todo elemento de S, contradição à iv. Portanto S satisfaz v.

2) São escolhidos 2001 pontos sobre uma reta AB fora do segmento AB. É possível que a soma das distâncias dos pontos até A seja igual a soma das distâncias dos pontos até B?
Solução. Se o ponto P está mais próximo de A, temos
dist(P,B) – dist(P,A) = dist(A, B).
Caso P esteja mais próximo a B, temos
dist(P,B) – dist(P,A) = –dist(A,B).
Sejam n os pontos mais próximos a A e 2001 – n os mais próximos a B. Tem-se
$\sum_P$ dist(P,A) – $\sum_P$ dist(P,B) = [n – (2001 – n)] dist(A,B).
Contudo [n – (2001 – n)] = 2n – 2001 jamais é zero, pois 2001 é ímpar. Logo nunca se terá igualdade, e a resposta do problema é: não é possível.

3) Seja ABCD um quadrado de lado 1. Traça-se uma circunferência C_1 com centro em B e raio 1, e uma circunferência C_2 que tangencia os segmentos AD e DC e a circunferência C_1 como mostra a figura abaixo.



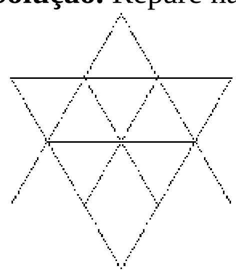
Calcule o raio da circunferência C_2.
Solução. Seja O o centro da circunferência C_2.
A distância de O até B é igual a 1 + r.
A distância de O até D é $r\sqrt{2}$. Partindo de O trace perpendiculares a AD e a DC, se formará um quadrado de lado r, daí a dist(O,D) é a diagonal desse quadrado.

A soma dessas distâncias é igual ao comprimento da diagonal do quadrado maior: $\sqrt{2}$. A equação fica

$$(1+r)+r\sqrt{2}=\sqrt{2}\Rightarrow r=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1},$$

e é esta a resposta.

4) Após se prolongar os lados de um hexágono regular (h), obtém-se uma estrela de seis pontas. Em seguida, une-se as pontas da estrela por segmentos de reta, formando um hexágono regular (H). Qual a razão das áreas de H e h?
Solução. Repare na figura abaixo.



Os seis triângulos eqüiláteros pequenos são semelhantes e proporcionais aos triângulos eqüiláteros refletidos para dentro. Por quê? Os lados correspondentes são paralelos, e um lado é comum.
Na estrela de 6 pontos, H, contamos 12 desses triângulos.
No hexágono h, são 6 os triângulos.
A razão das áreas é 2.

Nível 3 – Fase 2
1) Prove que existe um conjunto S de infinitos números inteiros positivos que satisfaz as seguintes condições:
(i) quaisquer dois elementos possuem divisores comuns maiores do que 1
(ii) qualquer numero inteiro possui um múltiplo no conjunto
(iii) nenhum elemento é primo
(iv) não existe um número inteiro maior do que 1 que divide todos elementos
Solução. Ver solução do problema 1 do nível 2.

2) Uma seqüência (s_1,s_2,...,s_k) de números inteiros positivos consecutivos (na ordem dada) é dita uniforme e sua soma vale $s_1+s_2+...+s_k$, por exemplo: (1,2,3,4), (10,11,12), (3) e (1000,1001) são seqüências uniformes.
Seja N um número inteiro positivo. Mostre que a quantidade de seqüências uniformes distintas cuja soma vale N é igual ao número de divisores positivos ímpares de 2N.
Solução. Seja (a+1,a+2,...,a+b) uma seqüência uniforme arbitrária, cuja soma se iguala a N, calculemos

$$(a+1)+(a+2)+...+(a+b)$$
$$=\underbrace{(a+a+...+a)}_{b}+(1+2+...+b)$$
$$=ab+\frac{b(b+1)}{2}=\frac{b}{2}[2a.+b+1]=N\Rightarrow b(2a+1+b)=b(b+k)=2N$$

Estamos chamando, para simplificar, k = 2a + 1. Pelos critérios do problema, se deve ter $a \geq 0, b \geq 1$. Repare que k pode assumir qualquer ímpar positivo com esse critério. Vamos, agora, demonstrar o enunciado. Tecnicamente, vamos construir uma bijeção entre os divisores ímpares de 2N e as seqüências uniformes cuja soma é N.

Ida. Se d é um divosor ímpar de 2N, então d' = 2N/d é um divisor par de 2N. Chamamos de b o menor dentre d e d', e chamamos k = |d – d'| a distância entre d e d'. É claro que dessa forma, b e a = (k – 1)/2 são inteiros. Portanto existe uma seqüência uniforme cujo primeiro elemento é a+1 e o último é a+b

Volta. Se (a+1,a+2,...,a+b) possui soma N, pelo que vimos b ou b + k é um divisor ímpar de 2N.

Tanto a Ida como a Volta são injetivas, i.e., para dois divisores distintos se geram seqüências distintas, e parar duas seqüências dinstintas se geram divisores distintos. Portanto são bijetoras, donde conclui-se o problema.

3) Prove que se N é um número inteiro positivo maior do que 1, então a soma $1+{}^{1}/_{2}+...+{}^{1}/_{N}$ não é um número inteiro.

Solução. Fazemos a soma das parcelas calculando-se o mmc do denominador. Seja mmc(1, 2, ..., n) = $p.2^q$ onde p é ímpar e q é inteiro. Temos

$$1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}=\frac{\frac{p.2^q}{1}+\frac{p.2^q}{2}+...+\frac{p.2^q}{p.2^q}}{p.2^q}=\frac{\sum_{1\leq k\leq n}\frac{p.2^q}{k}}{p.2^q} \text{ (*)}$$

Os termos $(p.2^q)/k$ serão ímpares só quando k for múltiplo de 2^q, o único múltiplo de 2^q inferior a n é o próprio 2^q. Portanto o somatório de (*) é ímpar, ou seja, o numerador é ímpar e o denominador é par: nunca é inteiro.

4) Escrevem-se números, nos vértices de um tetraedro regular. Escreve-se, em cada aresta, a soma dos números escritos nos seus vértices. Por fim escreve-se, em cada face, a soma dos números escritos nos suas arestas. É possível que a soma dos números escritos nas faces seja 2001?

Solução. Escrevem-se a, b, c e d nos vértices. Nas 6 arestas vão aparecer: a+b, a+c, a+d, b+c, b+d, c+d. Nas 4 faces vão aparecer: 2a+2b+2c, 2a+2b+2d, 2a+2c+2d e 2b+2c+2d. A soma final é 6a+6b+6c+6d, par, logo não pode valer 2001.