Olimpíada Regional de Matemática Grande Porto Alegre – 2001

Nível 1

Instruções:

- *A duração da prova é de 3 horas*
- *Não é permitido o uso de calculadora nem consulta a livros ou notas*
- *Você pode solicitar papel para rascunho*
- *Entregue somente a folha de respostas*

01. O valor de $2^3.3^2.2^2.3^3$ é igual a:

A) 5^5 B) 5^6 C) 6^5 D) 6^6 E) 36^{10}

02. Um retângulo é dividido em quatro retângulos por intermédio de dois segmentos paralelos aos seus lados. As áreas de três dos retângulos assim obtidos são mostradas na figura abaixo.

6	15
?	25

Qual é a área do outro retângulo?

A) 10 B) 15 C) 18 D) 20 E) 31

03. Quando $10^{10}-1$ é desenvolvido, a soma de seus algarismos é igual a:

A) 81 B) 90 C) 99 D) 108 E) 117

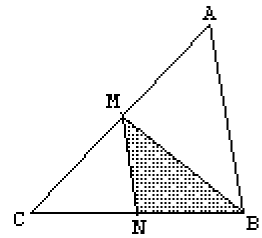
04. Gabriel é incumbido de colocar números em frente às casas da Rua de Mata Cavalos. A primeira casa possui número um (1); a segunda, número dois (2); e assim por diante. Ele precisou comprar noventa e nove (99) algarismos, numa ferragem. Quantas casas ele teve de numerar?

A) 52 B) 53 C) 54 D) 55 E) 90

05. Um baú de meias possui 50 meias das quais 10 são pequenas, 20 são médias, 10 são grandes e das 10 restantes algumas são extra-grandes e as outras são extra-pequenas. Qual o número mínimo de meias que devemos retirar do baú, sem conferir seus tamanhos, de modo a termos certeza que entre elas existem 10 do mesmo tamanho?

A) 21 B) 36 C) 37 D) 38 E) 40

06. A área do triângulo ABC é 24. O ponto M está na metade do segmento AC, e o ponto N está na metade do segmento BC. Qual a área da parte hachurada (= triângulo BMN)?:



A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

07. O resultado de um dado, após seu arremesso, é o número da face voltada para cima. Renata arremessa dois lados e soma o resultado do primeiro dado com o dobro do resultado do segundo dado. A quantidade de diferentes resultados dessa adição é:

A) 36 B) 11 C) 12 D) 15 E)16

08. Carlinhos digitou um número positivo em sua calculadora, somou dois (2), dividiu o resultado por três (3), diminuiu quatro (4) e obteve o resultado cinco (5). O número digitado foi:

A) 1 B) 6 C) 11 D) 16 E) 21

09. Escolhi um número, multipliquei-o por quatro (4) e somei oito (8) ao resultado, finalmente dividi o que restou por dois (2). O resultado foi igual:

A) ao dobro do número
B) a quatro (4) vezes o número mais quatro (4)
C) ao dobro do número mais quatro (4)
D) a quatro (4) vezes o número mais oito (8)
E) ao dobro do número mais oito (8)

10. Quantos números de dois (2) algarismos existem cuja soma de seus algarismos é 10?

A) 1 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

11. Escreva um número em cada círculo da fila abaixo, de modo que a soma de três números quaisquer vizinhos (consecutivos) seja 21.

No último círculo à direita deve estar escrito o número

A) 7 B) 6 C) 5 D) 1 E) 12

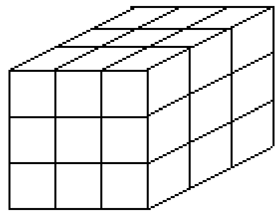
12. Um estacionamento cobra 1 real pela primeira hora e 75 centavos a cada hora ou fração de hora seguinte. Gisele estacionou seu carro às 11h 20min e saiu às 15h 40min. Quantos reais ela deve pagar?

A) 2,50 B) 4,00 C) 5,00 D) 4,75 E) 3,75

13. Um semáforo é um dispositivo de três luzes – uma verde, uma amarela e uma vermelha – onde uma e somente uma luz está acesa. Na rua de Mata Cavalos, no festival anual do semáforo reuniram-se todos os 2001 semáforos desta longa rua. Sabe-se que em determinado instante 1000 dos semáforos estavam amarelos, e uma quantidade par de semáforos estavam verdes. Dos números abaixo, qual o único que apresenta uma possibilidade para a quantidade de semáforos vermelhos naquele instante?

A) 994 B) 997 C) 1000 D) 1003 E) 0 (zero)

14. Vinte e sete (27) cubos estão dispostos como mostra a figura abaixo. A quantidade de vizinhos de um cubo é igual a quantidade de cubos que possuem uma face em comum com ele. Quantos cubos possuem exatamente 4 vizinhos?



A) 6 B) 8 C) 12 D) 26 E) 0 (zero)

15. Em certo grupo de quatro (4) pessoas, sabemos que exatamente três (3) pares de pessoas são amigos, quantos pares de pessoas não são amigos?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

E) impossível determinar

Olimpíada Regional de Matemática Grande Porto Alegre – 2001

Nível 2

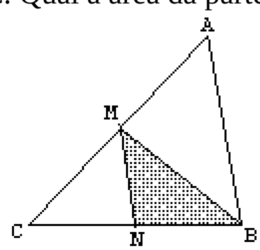
Instruções:

- *A duração da prova é de 3 horas*
- *Não é permitido o uso de calculadora nem consulta a livros ou notas*
- *Você pode solicitar papel para rascunho*
- *Entregue somente a folha de respostas*

16. Gabriel é incumbido de colocar números em frente às casas da Rua de Mata Cavalos. A primeira casa possui número um (1); a segunda, número dois (2); e assim por diante. Ele precisou comprar noventa e nove (99) algarismos, numa ferragem. Quantas casas ele teve de numerar?

A) 52 B) 53 C) 54 D) 55 E) 90

17. A área do triângulo ABC é 24. O ponto M está na metade do segmento AC, e o ponto N está na metade do segmento BC. Qual a área da parte hachurada (= triângulo BMN)?:



A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

18. O resultado de um dado, após seu arremesso, é o número da face voltada para cima. Renata arremessa dois lados e soma o resultado do primeiro dado com o dobro do resultado do segundo dado. A quantidade de diferentes resultados dessa adição é:

A) 36 B) 11 C) 12 D) 15 E)16

19. Um semáforo é um dispositivo de três luzes – uma verde, uma amarela e uma vermelha – onde uma e somente uma luz está acesa. Na rua de Mata Cavalos, no festival anual do semáforo reuniram-se todos os 2001 semáforos desta longa rua. Sabe-se que em determinado instante 1000 dos semáforos estavam amarelos, e uma quantidade par de semáforos estavam verdes. Dos números abaixo, qual o único que apresenta uma possibilidade para a quantidade de semáforos vermelhos naquele instante?

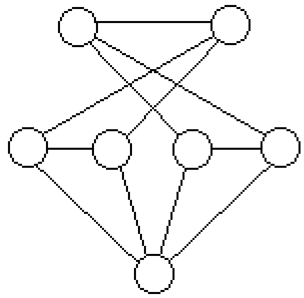
A) 994 B) 997 C) 1000 D) 1003 E) 0 (zero)

20. Dizemos que duas pessoas (por exemplo, Pedro e Alice) se conhecem se pelo menos um dos dois sabe alguma coisa sobre o outro e que duas pessoas se desconhecem se não se conhecem. Em certo grupo de quatro (4) pessoas, sabemos que exatamente três (3) pares de pessoas se conhecem, quantos pares de pessoas se desconhecem?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

E) impossível determinar

21. Deve-se colorir todos os círculos da figura abaixo de forma que dois círculos ligados por um segmento de reta tenham cores distintas. Qual o número mínimo de cores que se precisa para colorir os círculos?



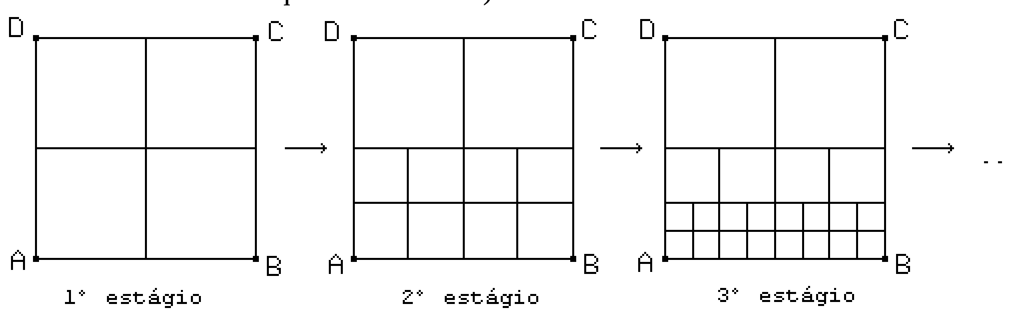
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

22. Numa jarra, inicialmente com volume 1 de suco, realizam-se operações de retirada de líquido. Na 1ª operação, retira-se metade do conteúdo da jarra; na 2ª operação, retira-se um terço do conteúdo restante da jarra; na 3ª operação, retira-se um quarto do conteúdo restante da jarra; e assim por diante. Logo após a 2001ª operação, o volume restante de líquido será:

A) $\frac{1}{2002}$ B) $\frac{1}{2001}$ C) $\frac{1}{2.3.4...2002}$ D) $\frac{1}{2.3.4...2001}$

E) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+-...+\frac{1}{2001}$

23. Uma divisão em cruz de um quadrado é traçar dois segmentos paralelos aos lados e que começam na metade de um lado e terminam na metade do lado oposto. No 1º estágio, dividimos um quadrado ABCD de lado 1 em cruz; no 2º estágio, dividimos em cruz todos os quadrados mais inferiores que são criados; e assim por diante como mostra a figura abaixo. No 5º estágio, a soma do comprimento de todos os segmentos criados (excluindo os lados do quadrado ABCD) é:



A) 5 B) 15 C) 6 D) 30 E) 10

24. Define-se um conjunto $P = \{3,6,9,12,...,3n,...,999\}$ dos múltiplos positivos de 3 (três) menores que 1000 e $Q = \{5,10,15,20,...,5n,...,995\}$ dos múltiplos positivos de 5 (cinco) menores que 1000. Quantos são os números ímpares do conjunto $P \cap Q$?

Nota. O conjunto $P \cap Q$ é formado pelos elementos que estão em P e Q simultaneamente.

A) 31 B) 32 C) 33 D) 34 E) 66

25. Um número inteiro positivo é dito tetra-legal se a soma dos seus algarismos for múltipla de quatro (4). A quantidade de números tetra-legais maiores que zero (0) e menores que cem (100) é igual a:

A) 24 B) 21 C) 20 D) 22 E) 25

26. Rafael inventou um jogo, o qual ele chamou de par-ou-ímpar estendido. O jogo é disputado por dois jogadores, que escolhem, primeiramente, "par" ou "ímpar" assim como o jogo usual. Em seguida, os dois jogadores escolhem aleatoriamente uma quantidade de dedos de uma das mãos (as possíveis escolhas são: 1, 2 ou 3 dedos), e os mostram simultaneamente. Se a quantidade de dedos mostrada for um número par, ganha quem pediu "par"; caso contrário, ganha quem pediu "ímpar". Rafael pediu "par", qual a probabilidade de ele ganhar uma disputa de par-ou-ímpar estendido?

A) 33,33...% B) 44,44...% C) 50% D) 55,55...% E) 66,66...%

27. Num campeonato de futebol, participam quatro times: A, B, C e D. Cada time disputa com cada time exatamente uma vez; uma vitória vale 2 pontos; um empate, 1 ponto; e uma derrota, nenhum ponto. Ao final do campeonato, A ganhou 5 pontos, B ganhou 4 pontos e C ganhou 1 ponto. Quantos pontos ganhou o time D?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) faltam dados

28. Sejam a=1, b=4 e c=11. Qual o valor de x que torna mínimo o valor da expressão $|x-a|+|x-b|+|x-c|$?

Nota. O módulo de um número real x é denotado pelo símbolo $|x|$, e é igual ao valor de x sem o sinal. Por exemplo: $|5|=5$, $|0|=0$ e $|-3|=3$.

A) 1 B) 4 C) 5 D) 11 E) 0 (zero)

29. Um número inteiro positivo é tri-cúbico se é soma de três cubos positivos distintos (por exemplo, 19125 é tri-cúbico pois $19125 = 5^3 + 15^3 + 25^2$). Qual é o menor número tri-cúbico?

A) 16 B) 24 C) 36 D) 42 E) 64

30. Sejam p, q e r três números primos ímpares distintos. Qual das afirmações abaixo é verdadeira:

A) o número $(pq)^r - 1$ pode ser primo

B) os números (p + r) e (q + r) podem possuir divisores maiores que um em comum com r

C) os números p^q e q^p podem ser, simultaneamente, cubos perfeitos

D) o número (p + q + r) pode ser primo

E) a igualdade $p - q = q - r$ não pode ocorrer

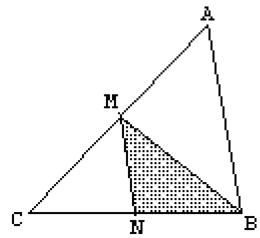
Obs. Por "poder" entenda o seguinte: existem p, q e r seguindo as condições do enunciado que satisfaçam as condições da alternativa.

Olimpíada Regional de Matemática Grande Porto Alegre – 2001

Nível 3

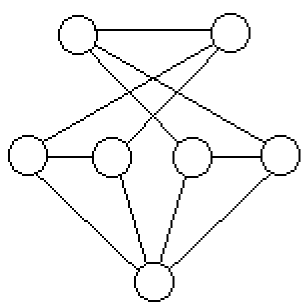
Instruções:
- *A duração da prova é de 3 horas*
- *Não é permitido o uso de calculadora nem consulta a livros ou notas*
- *Você pode solicitar papel para rascunho*
- *Entregue somente a folha de respostas*

31. A área do triângulo ABC é 24. O ponto M está na metade do segmento AC, e o ponto N está na metade do segmento BC. Qual a área da parte hachurada (= triângulo BMN)?:



A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

32. Deve-se colorir todos os círculos da figura abaixo de forma que dois círculos ligados por um segmento de reta tenham cores distintas. Qual o número mínimo de cores que se precisa para colorir os círculos?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

33. Um número inteiro positivo é dito tetra-legal se a soma dos seus algarismos for múltipla de quatro (4). A quantidade de números tetra-legais maiores que zero (0) e menores que cem (100) é igual a:

A) 24 B) 21 C) 20 D) 22 E) 25

34. Rafael inventou um jogo, o qual ele chamou de par-ou-ímpar estendido. O jogo é disputado por dois jogadores, que escolhem, primeiramente, “par” ou “ímpar” assim como o jogo usual. Em seguida, os dois jogadores escolhem aleatoriamente uma quantidade de dedos de uma das mãos (as possíveis escolhas são: 1, 2 ou 3 dedos), e os mostram simultaneamente. Se a quantidade de dedos mostrada for um número par, ganha quem pediu “par”; caso contrário, ganha quem pediu “ímpar”. Rafael pediu “par”, qual a probabilidade de ele ganhar uma disputa de par-ou-ímpar estendido?

A) 33,33...% B) 44,44...% C) 50% D) 55,55...% E) 66,66...%

35. Sejam a=1, b=4 e c=11. Qual o valor de x que torna mínimo o valor da expressão $|x-a|+|x-b|+|x-c|$?

Nota. O módulo de um número real x é denotado pelo símbolo $|x|$, e é igual ao valor de x sem o sinal.

Por exemplo: $|5|=5$, $|0|=0$ *e* $|-3|=3$.

A) 1 B) 4 C) 5 D) 11 E) 0 (zero)

36. Sejam p, q e r três números primos ímpares distintos. Qual das afirmações abaixo é verdadeira:

A) o número $(pq)^r - 1$ pode ser primo

B) os números (p + r) e (q + r) podem possuir divisores maiores que um em comum com r

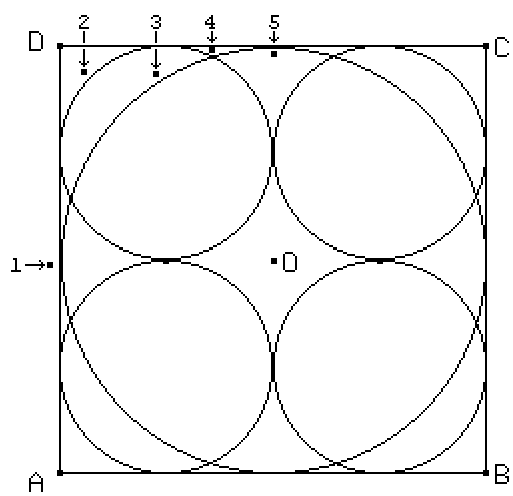
C) os números p^q e q^p podem ser, simultaneamente, cubos perfeitos

D) o número (p + q + r) pode ser primo

E) a igualdade $p-q=q-r$ não pode ocorrer

Obs. Por "poder" entenda o seguinte: existem p, q e r seguindo as condições do enunciado que satisfaçam as condições da alternativa.

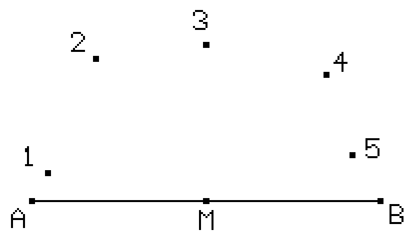
37. No quadrado ABCD inscreveu-se um círculo de centro O que tangencia os seus quatro lados e quatro círculos de mesmo raio que se tangenciam e aos lados como se vê na figura abaixo. Qual dos pontos 1, 2, 3, 4 ou 5 está mais perto do ponto O?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

38. Patrícia marcou sete pontos no plano: A, B, 1, 2, 3, 4 e 5 (três a três não-colineares). Em seguida marcou o ponto M que está na metade do segmento AB. Ela queria descobrir qual é o menor dentro os ângulos $\hat{1} = A\hat{1}B$, $\hat{2} = A\hat{2}B$, $\hat{3} = A\hat{3}B$, $\hat{4} = A\hat{4}B$ e $\hat{5} = A\hat{5}B$. Utilizando uma régua ela chegou nas seguintes medidas: o segmento AB mede 13.4; o segmento M1 mede 6.2; o segmento M2 mede 7.0; o segmento M3 mede 6.2; o segmento M4 mede 6.7; e o segmento M5 mede 5.9. Sendo boa em geometria, o que ela pode afirmar sobre o menor ângulo?

Obs. A figura não segue as proporções do enunciado.



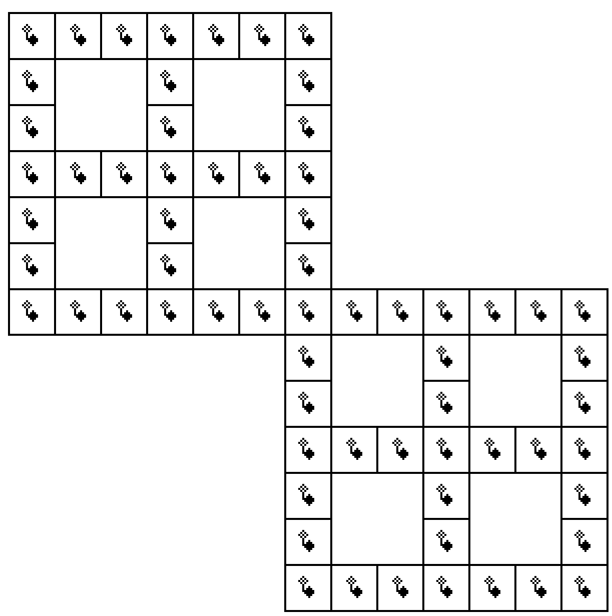
A) É $\hat{1}$ B) É $\hat{2}$ C) É $\hat{4}$ D) É $\hat{3}$ ou $\hat{5}$

E) Faltam dados para determiná-lo

39. Quantos pares de inteiros positivos (x, y) satizfazem a equação $2^x - 2^y = 56$?

A) Nenhum B) 1 C) 2 D) 4 E) Infinitos

40. O bicho "come-come" é inicialmente abandonado em alguma das casas do labirinto abaixo. Cada casa contem exatamente uma (1) noz. Em cada turno, "come-come" move-se da casa onde está para uma vizinha que é diferente da qual estava no último turno. Ele nunca passa por uma casa sem devorar a noz que nela está contida. Ao chegar numa casa vazia, "come-come" devora-se, morrendo então. Qual o máximo de nozes que pode o "come-come" comer em uma vida?



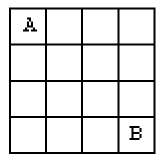
A) 44 B) 45 C) 51 D) 53 E) 55

41. A colméia da inteligência militar das abelhas, em forma de pentágono, foi atingida por um ataque terrorista, de insetos suicidas, sem precedentes na história dos Enxames Unidos. As quatro espécies de insetos opostos ao monopólio de produção de mel praticado pelas abelhas neoliberais deram as seguintes declarações:

Ctenus Lapestinas: As *Teraphosas Crutos* realizaram o atentado.
Teraphosa Crutos: As *Latrodectus Tupiniquins* realizaram o atentado.
Drosophila Incognitis: Nós não realizamos o atentado.
Latrodectus Tupiniquins: As *Teraphosa Crutos* mentem ao nos acusar pelo atentado.

Sabendo que apenas um dos quatro diz a verdade, quem é o responsável?
A) *Ctenus Lapestinas*
B) *Teraphosa Crutos*
C) *Drosophila Incognitis*
D) *Latrodectus Tupiniquins*
E) Impossível de se determinar

42. Saindo-se da casa que contem um “A” e fazendo movimentos somente para a direita ou para baixo (de casa em casa) de quantos modos diferentes se pode chegar até a casa que contém um “B”?



A) 70 B) 65 C) 60 D) 55 E) 16

43. Uma ameba qualquer se parte em duas amebas a cada minuto. Toda ameba pesa 10^{-3} miligramas. Em um local propício à vida de bactérias e sem obstáculos à sua reprodução, quanto tempo aproximadamente é preciso para transformar uma (1) ameba em um milhão de toneladas de ameba?
A) Uma hora B) Um dia C) Uma semana D) Um mês E) Um ano

44. Uma música é uma seqüência ordenada e finita de notas: dó, ré, mi, fá, sol, lá ou si. Dá-se o nome de plágio de uma certa música M a uma música que possua o mesmo número de notas e uma delas é diferente. Quantos plágios de uma música de 100 notas existem?
A) 100 B) 200 C) 300 D) 500 E) 600

45. Um número inteiro positivo é tri-cúbico se é soma de três cubos positivos distintos (por exemplo, 19125 é tri-cúbico pois $19125 = 5^3 + 15^3 + 25^2$). Qual é o terceiro menor número tri-cúbico?
A) 36 B) 56 C) 73 D) 92 E) 125