

# Olimpíada Regional de Matemática da Grande Porto Alegre – 1998

## Segunda Fase – Nível 3

1) Seja  $N$  um número inteiro. Mostre que existem dois inteiros  $X$  e  $Y$  que satisfazem  $X^2 - Y^2 = N$  se e somente se  $N$  pode ser representado pelo produto de **dois** inteiros de mesma paridade ( i.e., ambos pares ou ambos ímpares ).

2) Se  $R$  é um número real, indica-se por  $\{ R \}$  a parte fracionária de  $R$ . Por exemplo  $\{ 2,78 \} = 0,78$  e  $\{ 0,45 \} = 0,45$ . Defina uma função  $F$  nos reais positivos por

$$F(x) = \{ x \} + \{ 1/x \}.$$

- (a) Encontrar um  $x$  que satisfaz  $F(x) = 1$ ;
- (b) Encontrar infinitas soluções distintas para  $F(x) = 1$ .

3) Mostre que para todo  $N$  inteiro positivo, vale

$$(1 + 1/N)^N < 3.$$

4) Definimos uma função  $h$ , nos inteiros positivos, por  $h(N) = 1 + 1/2 + \dots + 1/N$ . Mostre que se  $N \geq 2$  então

$$N + h(1) + h(2) + \dots + h(N-1) = N \cdot h(N).$$

5) De cada uma de **três** varetas de comprimento  $L$  quebra-se um pedaço. Calcule a probabilidade de que com esses **três** pedaços, seja possível se construir um triângulo.

This document was created with Win2PDF available at <http://www.daneprairie.com>.  
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.