Como Resolver Problemas I

Kin-Yin LI

O famoso livro de George Polya "A Arte de Resolver Problemas" é altamente recomendado a todo estudante que quer ler sobre como se resolver problemas. Ao nos defrontarmos com um problema difícil, Polya nos instrui a fazer as seguintes perguntas: Que condição precisa ser satisfeita? Você já viu um problema parecido? Você consegue reescrever o problema de um outro modo? de um modo similar? Onde está a dificuldade? Se você não consegue resolvê-lo, você consegue resolver uma parte do problema se as condições são enfraquecidas? Você consegue resolver casos especiais? Existe algum padrão nesses casos particulares? Você tem algum palpite para a resposta? Que pistas essa resposta ou esses casos especiais lhe fornecem? Abaixo iremos fornecer alguns exemplos de como analisar problemas.

Exemplo 1. Dado um triângulo ABC com AB o maior lado. Construa um quadrado tendo dois vértices sobre o lado AB e um vértice em cada um dos lados BC e CA utilizando-se de uma régua (sem medidas) e de um compasso.

Análise. (*Onde está a dificuldade?)* A dificuldade está na exigência de que os quatro vértices estejam sobre os lados do triângulo. Se pudermos afrouxar de quatro para três, o problema torna-se fácil. Sobre CA, tome um ponto P perto de A. Trace uma perpendicular de AB passando por P, cujo pé é Q. Com Q como o centro e PQ como o raio, trace um círculo e deixe-o intersectar AB em R. Desenhe a linha perpendicular a AB por R e seja S o ponto de interseção dessa perpendicular com a linha paralela à AB que passa por P. O quadrilátero PQRS é um quadrado com P em CA e Q, R em AB.

(*O que acontece se movermos o ponto P sobre o lado CA?*) Você obtém um quadrado semelhante a PQRS. (*O que acontece no caso especial P=A?)* Você obtém um único ponto. (O que acontece a S se você move P de A até C?) Enquanto P se move em AC, o triângulo APQ irá ser similar a todo outro triângulo APQ. Então o triângulo APS irá, também, ser semelhante à todo outro triângulo APS, e S irá traçar um segmento de reta partindo de A. Essa linha AS intersecta BC em um ponto S, que é o quarto vértice procurado. De S, nós podemos encontrar os três outros vértices traçando retas perpendiculares e rotando pontos.
Obs. Existe uma redundância proposital. Ás vezes S quer dizer um S específico, e às vezes ele quer dizer um genérico. Cabe a você perceber esta sutileza.

Exemplo 2. (*Olimpíada Matemática Russa 1995*) Há n>1 assentos em um carrossel. Um menino dá n voltas. Entre cada volta, ele se move no sentido do relógio um certo número (inferior a n) de vagas até um novo cavalo. Cada vez ele se move um número diferente de vagas. Encontre todos n para os quais ele consegue pilotar cada cavalo.

Análise. (*Você consegue resolver casos particulares?*) Os casos n = 2, 4, 6 funcionam, mas os casos n = 3, 5 não funcionam. (*Você consegue adivinhar a resposta?*) A resposta deve ser n par. (*Que pista os casos particulares lhe fornecem?*) Através da experimentação com casos particulares, nós vemos que se n é ímpar, então a última volta parece sempre repetir o cavalo da primeira volta. Da primeira até a última volta, o garoto se move 1 + 2 + ... + (n – 1) = n(n – 1)/2 vagas. Se n é ímpar, esse número é múltiplo de n e portanto nós repetimos o primeiro cavalo.

(*Existe algum padrão que você percebe dos casos particulares em que n é par?*) Nomeie os cavalos 1, 2, ..., n no sentido horário. Para n=1, nós podemos cavalgar os cavalos 1, 2 nesta ordem e a seqüência de movimentos é 1. Para n=4, nós podemos cavalgar os cavalos 1, 2, 4, 3 nesta ordem e a seqüência de movimentos é 1, 2, 3. Para n=6, os cavalos podem ser 1, 2,6, 3, 5, 4 e a seqüência de movimentos 1, 4, 3, 2, 5. Então para o caso geral n par, nós podemos cavalgar os cavalos 1, 2, n, 3, n – 1, ..., n/2 + 1 nesta ordem com os movimentos 1, n – 2, 3, n – 4, ..., 2, n – 1. Os números na seqüência de movimentos são todos distintos assim como é o resultado dos números ímpares 1, 3, ..., n – 1 com os pares n – 2, n – 4, ..., 2.

Exemplo 3. (*Putnam 1982*) Seja K(x,y,z) a área do triângulo cujos lados medem x, y, z. Para quaisquer dois triângulos cujos lados medem a, b, c e a', b', c', respectivamente, mostre que

$$\sqrt{K(a,b,c)}+\sqrt{K(a',b',c')}\le\sqrt{K(a+a',b+b',c+c')}$$

Determine quando vale a igualdade.

Análise. (*Você consegue reescrever o problema de outro modo?*) Como o problema é sobre a área e os lados de triângulos, nos vem à mente a fórmula de Heron, que informa a área de um triângulo somente conhecendo a medida de seus lados, x, y, z e é dada por

$$K(x,y,z)=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)},$$

onde p é o semi-perímetro, i.e., $p=\frac{1}{2}(x+y+z)$. Utilizando-se dessa fórmula, o problema torna-se demonstrar que

$$\sqrt[4]{stuv}+\sqrt[4]{s't'u'v'}\le\sqrt[4]{(s+s')(t+t')(u+u')(v+v')}$$

onde $s=\frac{1}{2}(a+b+c), t=s-a, u=s-b, v=s-c$ e similar para s', t', u', v'.

(*Você já viu um problema similar ou você pode enfraquecer as condições?*) Para aqueles que conhecem a demonstração por indução de trás para frente da desigualdade das médias, o problema é similar àquele do caso n=4 vindo do caso n=2. Para os outros, que não viram, trabalhar com quatro variáveis é difícil. Consideremos o caso mais simples n=2. A desigualdade se tornaria

$$\sqrt{xy}+\sqrt{x'y'}\le\sqrt{(x+x')(y+y')}$$

que é mais fácil de se provar. Elevando ambos os lados da igualdade ao quadrado, cancelando termos comuns, e fatorando, encontramos a desigualdade $\left(\sqrt{xy'}-\sqrt{x'y}\right)^2\ge 0$. Vale a igualdade se e somente se x/x' = y/y'. Aplicando esta desigualdade – mais simples – duas vezes, facilmente chegamos à desigualdade do enunciado

$$\sqrt[4]{stuv}+\sqrt[4]{s't'u'v'}$$
$$\le\sqrt{\left(\sqrt{st}+\sqrt{s't'}\right)\left(\sqrt{uv}+\sqrt{u'v'}\right)}$$
$$\le\sqrt{\sqrt{(s+s')(t+t')}\sqrt{(u+u')(v+v')}}$$

A igualdade vale se e somente se a, b, c forem proporcionais a a', b', c', ou seja, quando os triângulos forem semelhantes.

Exemplo 4. Existe como distribuir 250 peças 1x1x4 numa caixa 10x10x10?

Análise. (*Onde está a dificuldade?*) 10 é grande para um cubo tridimensional. Nós podemos facilitar o problema um pouco se considerarmos uma caixa bidimensional com números menores, digamos peças 1x2 em uma caixa 8x8. Isso é claramente possível de montar. (*E se o problema fosse com um tabuleiro de xadrez e retirássemos duas peças?*) Aí a montagem pode se tornar impossível. Por exemplo, se retiramos duas casas pretas, já que 1x2 ocupa uma casa preta e uma branca qualquer cobertura do tabuleiro deve cobrir a mesma quantidade de casas brancas e pretas. (*Que dicas você tira dos casos particulares?*) Colorir as casas da caixa pode ajudar a resolver o problema. (*Podemos reescrever o problema de um modo similar?*) É possível colorir as casas de uma caixa 10x10x10 usando quatro cores de forma que em cada quatro casas consecutivas, cada cor aparece uma vez? Sim, nós podemos colocar uma cor 1 na quina da caixa, e então estender periodicamente 1, 2, 3, 4 em cada uma das três direções perpendiculares paralelas às arestas da caixa. Contudo, uma contagem mostra que para a caixa 10x10x10, existem 251 casas de cor 1, 251 de cor 2, 248 de cor 3 e 249 de cor 4. Portanto a montagem pedida é impossível.

Exercício. (*Olimpíada de Moscou 1985*) Para todo n > 2, mostre que $2^n = 7x^2 + y^2$ para certos inteiros ímpares x e y.

Perguntas. (*Você consegue resolver casos particulares?*) (*Existe algum padrão que você perceba nesses casos particulares?*)

Bibliografia

Revista chinesa Mathematical Excalibur, Maio-Juno de 2002. Site oficial: http://www.math.ust.hk/excalibur/

Obs. Esta tradução foi feita com a autorização do editor da revista Excalibur: Doutor Kin-Yin LI, da Hong Kong University of Science and Tecnology.