

Perspectivas matemáticas del calendario prehispánico y las grecas de Mitla en la cultura *ñuu savi*

Octavio Alberto Agustín Aquino

25 de enero de 2008

1. Exordio

Kadji ini kakai yo, viko ñuu djau ditu'in xi ndi'indo. Kue'e ka'ain nan katu'uin tansande ta sata. Tanda'ani nkier, tanda'ania va'a, tandiviti üia, nda ntina nuua. Tanda'ania va'a yo, künua tandiviti kuni katüi'ña, taa kuni tani kietainda.

Kuni ndiendio'o tío tu'un djau, ka'anda, tu'un ndatun kia yo. Taxva'anda ñiun, tanda tu'un va'a, nkatö'on xi tar kanu. Xindien ñuu, nda kandanda xi'i ndü va'anda na ndi kankoo ñuu yata.

Chuun kia ndia nii yao¹.

Estoy muy contento de estar aquí, de estar en esta fiesta de *ñuu savi* para hablar con ustedes. Voy a hablarles de lo que aprendí sobre nuestros antepasados, que hace mucho tiempo hicieron grandes obras que todavía hoy perduran, y que nos revelan su gran sabiduría. Esta sabiduría es tan grande que todavía me inspira para hacerme de nuevo conocimiento, y los invito a que ustedes hagan lo mismo.

Los exhorto a que, los que sepan, hablen el hermoso *tu'un savi*, guarden en su memoria los preciosos cuentos de sus abuelos, colaboren en su comunidad y que cuiden y mejoren lo que nos han legado nuestros ancestros.

Todo trabajo que hacemos tiene su pago².

¹Lema de la Universidad Tecnológica de la Mixteca

²Quiero expresar aquí mi profundo agradecimiento a mi discípulo Virgilio Vásquez Hipólito por ser mi asesor de lengua *Ñuu Savi*, y a mi grupo de la Licenciatura en Matemáti-

2. Introducción

La Matemática logra inmiscuirse con sus poderosos métodos en los asuntos más insospechados, incluso en el estudio de las culturas antiguas. Auxiliados por ella, profundizaremos en este trabajo en dos aspectos de la cultura *ñuu savi*.

El primero será el calendario. El registro preciso y bien estructurado del tiempo es campo fértil para los números, sin mencionar que es de suma importancia para programar las actividades de una sociedad tan organizada como lo fue la *ñuu savi*. Aquí lo interpretaremos utilizando herramientas de la teoría de números relativamente elementales, tales como la división con residuo y el concepto de congruencia. Nos hemos basado fundamentalmente en la versión del calendario del códice Cospi y, de manera suplementaria, en los códices Borgia, Nutall, Vindobonensis y Colombino.

En segundo lugar haremos una clasificación de los frisos de Mitla. Las herramientas en este caso son las isometrías del plano y un útil teorema que nos garantiza que, esencialmente, sólo existen siete tipos de grecas distintas. También se señalara posibles relaciones entre la forma de los diseños de Mitla y el calendario. Se tomaron fotos de la edificación para apreciar mejor las formas geométricas. Los diseños se han extraído y convertido en imágenes digitales.

Se espera que con este trabajo se consiga:

1. En primera instancia, que se incremente el uso de métodos matemáticos en otras disciplinas científicas aparte de la Física, la Química, la Astronomía, etcétera.
2. Además, que se le pierda miedo a la Matemática, mostrando su eficaz (y no necesariamente compleja) actuación al resolver el tipo de problemas que se nos ha presentado.
3. Finalmente, dar promoción a la gran cultura de *ñuu savi*, de la que somos herederos y por la cual debemos trabajar no sólo para descubrirla, sino también para incrementarla.

cas Aplicadas por el trabajo fotográfico que realizó en Mitla. También deseo manifestar mi gratitud al profesor Gabriel Caballero de la Universidad Tecnológica de la Mixteca por hacer las correcciones ortográficas pertinentes de *Tu'un Savi* según las convenciones de *Ve'e Tu'un Savi* (Academia de la Lengua Mixteca)

3. El calendario mesoamericano

3.1. Conceptos preliminares

La numeración de los pueblos mesoamericanos tiene por base el número 20, que está presente en el número total de dedos del ser humano. En *Tu'un Savi*, los 20 primeros números son (Caballero, 2002: [2]):

1	In	6	Iñu	11	Uxi in	16	Xa'un in
2	Uvi	7	Usa	12	Uxi uvi	17	Xa'un uvi
3	Uni	8	Una	13	Uxi uni	18	Xa'un uni
4	Kumi	9	Iin	14	Uxi kumi	19	Xa'un kumi
5	U'un	10	Uxi	15	Xa'un	20	Okó

El cuerpo humano tiene 13 articulaciones principales. Ésta podría ser una motivación no matemática de la disposición calendárica *ñuu savi*, en la cual se utilizan solamente los trece primeros números (Romero,1988:[10]).

En el cómputo *ñuu savi* del tiempo, cada día tiene un símbolo. Al igual que la base de numeración, son veinte en total.

I	Koo yuchi (Lagarto)	VI	Ndii (Muerte)	XI	Kodo (Mono)	XVI	Ndi kaka (Zopilote)
II	Tachi (Viento)	VII	Skua (Venado)	XII	Yukü (Hierba)	XVII	Kanda (Movimiento)
III	Ve'e (Casa)	VIII	Idu (Conejo)	XIII	Ndoo (Caña)	XVIII	Yuchi yuu (Pedernal)
IV	Mila (Lagartija)	IX	Takui (Agua)	XIV	Ndi ka'a (Jaguar)	XIX	Djau (Lluvia)
V	Koo (Serpiente)	X	Tina (Perro)	XV	Ndi ya'a (Águila)	XX	Ita (Flor)

Los veinte símbolos se combinan con los trece numerales, dando lugar a 260 combinaciones. Esto es según el principio fundamental de conteo: cada símbolo de portar los números del in (1) al uxi uni (13), es decir, $20 \times 13 = 260$. Obsérvese que es la cantidad de días que tarda el ser humano en gestarse, aproximadamente.

En el Cuadro 1 reproducen todas las combinaciones diferentes posibles, ordenadas como lo están en el código Cospi. En este código aparecen distribuidas en 5 renglones de 52 columnas cada una; cada símbolo que tiene al 1 como numeral representa a su trecena. En el Cuadro 1 se utilizan las siguientes abreviaturas, y los representantes de cada trecena está marcado en negrita.

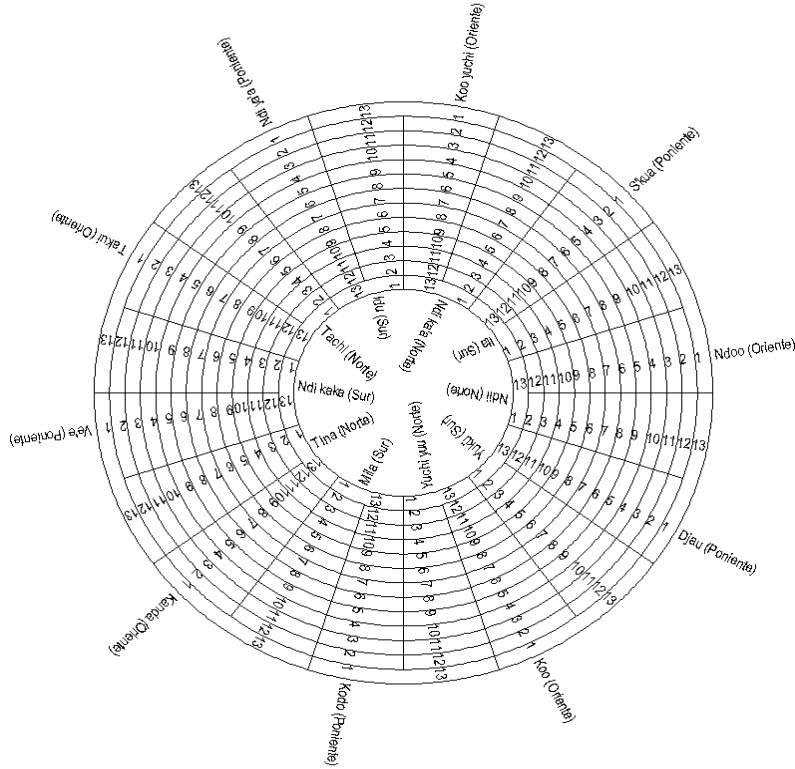


Figura 1: Esquematización de lectura continua del calendario prehispanico

Koo yuchi - kyc	Ndii - ndi	Kodo - kod	Ndi kaka - nkk
Tachi - tac	Skua - sku	Yukü - yuk	Kanda - kan
Ve'e - vee	Idu - idu	Ndoo - ndo	Yuchi yuu - yuc
Mila - mil	Takui - tak	Ndi ka'a - ndk	Djau - dja
Koo - koo	Tina - tin	Ndi ya'a - ndy	Ita - ita

Los 260 días representados por estas combinaciones conforman el calendario ritual. En el código Cospi esta cuenta se agrupa en 5 renglones y 52 columnas. Las columnas se dividen en cuatro grupos de trece columnas cada uno, según cada punto cardinal: oriente, norte, poniente y sur. Esta disposición puede reconstruirse de modo que se puede leer casi sin interrupciones en una rueda.

En el caso de la Figura 2 , se comienza en la trecena de Koo yuchi, y se sigue en espiral. El círculo con una cruz significa entrar en el papel y el

O	1	kyc	ndo	koo	kan	tak
	2	tac	ndk	ndi	yuc	tin
	3	vee	ndy	sku	dja	kod
	4	mil	nkk	idu	ita	yuk
	5	koo	kan	tak	kyc	ndo
	6	ndi	yuc	tin	tac	ndk
	7	sku	dja	kod	vee	ndy
	8	idu	ita	yuk	mil	nkk
	9	tak	kyc	ndo	koo	kan
	10	tin	tac	ndk	ndi	yuc
	11	kod	vee	ndy	sku	dja
	12	yuk	mil	nkk	idu	ita
	13	ndo	koo	kan	tak	kyc
N	1	ndk	ndi	yuc	tin	tac
	2	ndy	sku	dja	kod	vee
	3	nkk	idu	ita	yuk	mil
	4	kan	tak	kyc	ndo	koo
	5	yuc	tin	tac	ndk	ndi
	6	dja	kod	vee	ndy	sku
	7	ita	yuk	mil	nkk	idu
	8	kyc	ndo	koo	kan	tak
	9	tac	ndk	ndi	yuc	tin
	10	vee	ndy	sku	dja	kod
	11	mil	nkk	idu	ita	yuk
	12	koo	kan	tak	kyc	ndo
	13	ndi	yuc	tin	tac	ndk
P	1	sku	dja	kod	vee	ndy
	2	idu	ita	yuk	mil	nkk
	3	tak	kyc	ndo	koo	kan
	4	tin	tac	ndk	ndi	yuc
	5	kod	vee	ndy	sku	dja
	6	yuk	mil	nkk	idu	ita
	7	ndo	koo	kan	tak	kyc
	8	ndk	ndi	yuc	tin	tac
	9	ndy	sku	dja	kod	vee
	10	nkk	idu	ita	yuk	mil
	11	kan	tak	kyc	ndo	koo
	12	yuc	tin	tac	ndk	ndi
	13	dja	kod	vee	ndy	sku
S	1	ita	yuk	mil	nkk	idu
	2	kyc	ndo	koo	kan	tak
	3	tac	ndk	ndi	yuc	tin
	4	vee	ndy	sku	dja	kod
	5	mil	nkk	idu	ita	yuk
	6	koo	kan	tak	kyc	ndo
	7	ndi	yuc	tin	tac	ndk
	8	sku	dja	kod	vee	ndy
	9	idu	ita	yuk	mil	nkk
	10	tak	kyc	ndo	koo	kan
	11	tin	tac	ndk	ndi	yuc
	12	kod	vee	ndy	sku	dja
	13	yuk	mil	nkk	idu	ita

Cuadro 1: Las combinaciones en el código Cospi

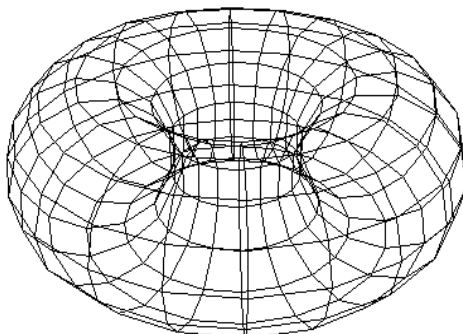


Figura 3: Toroide

forma se tendrá la siguiente sucesión de 4 símbolos y 13 números de los primeros días de cada año: In Ndoo (1 Caña), Uvi Yuchi yuu (2 Pedernal), Uni Ve'e (3 Casa), Kumi Idu (4 Conejo), U'un Ndo (5 Caña), etcétera.

Precisamente estos cuatro símbolos son los llamados portadores de los años, y siempre indican las fechas en los códices, con su numeral correspondiente. Ocurre así porque, al considerar la sucesión de los símbolos mencionada al principio, el quinto símbolo después de Ndoo es Yuchi yuu, el quinto después de Yuchi yuu es Ve'e y el quinto después de Ve'e es Idu. Son cada cinco símbolos pues el ciclo de 20 cabe 18 veces en 365 y sobran, evidentemente, 5 símbolos. De la misma manera: ya que el ciclo de 13 numerales cabe 28 veces en 365 y sobra 1, se explica que se recorran los 13 numerales.

Cincuenta y un años después del año In Ndoo el portador es Uxi uni Idu (13 Conejo), y el año siguiente es nuevamente es In Ndoo. Entonces se cerraba un ciclo ceremonial de 52 años.

4. Propuesta de correlación entre años

El método que se propone a continuación no se ve afectado por el cambio del calendario juliano al gregoriano, pues no se alteró la cuenta de años al efectuar dicha reforma. Sin embargo, para calcular el mes y día, tal error debe tomarse en consideración (aunque no lo haremos aquí). En tal caso, además de una correspondencia entre el número de año y su glifo, se requiere también de una relación entre el día y el mes y su glifo correspondiente. También aquí se supone que el día que lleva el portador coincide con el 1°

de enero del año que se ha fechado; puesto que no necesariamente es así, bastaría sumar o restar un año dependiendo del mes y el día exacto en que ocurrió un hecho.

4.1. De años occidentales a mesoamericanos

En este apartado y el siguiente por fecha entenderemos un número de años contados a partir del nacimiento de Cristo.

Puesto que los años mesoamericanos se identificaban con uno de cuatro símbolos y uno de trece números, sólo existen 52 años diferentes, que se repiten cíclicamente.

Teorema 1 (Algoritmo de la división). *Si a y b son enteros y $b \neq 0$, existen dos enteros q y r , únicos, tales que $a = bq + r$ con $0 \leq r < b$.*

Demostración. Aparece en (Cárdenas, 1986:[7]). □

Observación 1. El número r se conoce como *residuo*. Si $r = 0$, se dice que b divide a a .

Según este teorema, dada una fecha x , existen dos enteros (en este caso, positivos) q y r tales que

$$x = 4q + r, \quad 0 \leq r < 4.$$

Dicho de otro modo, al ver cuántas veces cabe el ciclo de cuatro símbolos portadores (Ndoo, Yuchi yuu, Ve'e e Idu) en la fecha, puede ser que quepa un número exacto de veces o sobrar 1, 2 ó 3 símbolos. Si para una fecha se conoce su representación prehispánica, puede utilizarse esta información para elaborar tablas de conversión. Por ejemplo, *suponiendo* que el año 1521 fuera In Ndoo (1 Caña) entonces, al ser

$$1521 = 4 \times 380 + 1,$$

la tabla de residuos quedaría como sigue.

Residuo	0	1	2	3
Símbolo	Idu	Ndoo	Yuchi yuu	Ve'e

Tomando este dato como cierto, y siendo que

$$2002 = 4 \times 500 + 2$$

entonces el año 2002 gregoriano tendría a Yuchi yuu (pedernal) como portador. Continuando con la secuencia, los años 2003, 2004 y 2005 serían Ve'e, Idu y Ndo, respectivamente.

Análogamente, cada trece años la numeración en la secuencia de los portadores empezaba en un mismo número. Recurriendo nuevamente al algoritmo de la división, para el año gregoriano x se escribe

$$x = 13q + r, \quad 0 \leq r < 13,$$

donde q y r son enteros positivos. Prosiguiendo con el ejemplo anterior, dado que

$$1521 = 13 \times 117 + 0,$$

la tabla de residuos para el numeral del año quedaría como sigue.

Residuo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Numeral	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

De esta forma, como

$$2002 = 13 \times 154 + 0,$$

entonces también le corresponde el número 1. El año 2002 se expresaría entonces como In Yuchi yuu (1 Pedernal).

4.2. De años mesoamericanos a occidentales

El problema de convertir años gregorianos a mesoamericanos es relativamente sencillo comparado con el problema recíproco. Como ya se mencionó, sólo existen 52 años que se repiten cíclicamente, por lo cual no existe un único año que sea In Ndo, pues cada 52 años habría otro.

Sin embargo, se puede establecer un algoritmo para localizar años con cierto símbolo y numeral.

Definición 1. Sean a y b enteros.

1. Se dice que tales enteros son congruentes módulo m si m divide a la diferencia $a - b$. Esto se escribe como

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

2. Se dicen primos entre sí, si existen enteros r y s tales que $ar + bs = 1$. Esto se escribe como $(a, b) = 1$.

Cuando en un código se anota que un año tiene cierto número n y símbolo s (acordando unas tablas de conversión como las ya expuestas), se nos dice que es un año gregoriano x que se puede expresar simultáneamente como $x = 13q + n$ y $x = 4p + s$, siendo q y p enteros desconocidos. Estas ecuaciones se pueden describir como

$$\begin{aligned}x - n &= 13q, \\x - s &= 4p.\end{aligned}$$

De la nota anterior, las ecuaciones anteriores indican que 13 divide a $x - n$ y 4 divide a $x - s$. Por la definición,

$$\begin{aligned}x &\equiv n \pmod{13}, \\x &\equiv s \pmod{4},\end{aligned}$$

lo que se conoce como un *sistema de congruencias*.

Para demostrar el teorema que nos permite resolver un sistema como el planteado, se requiere un lema.

Lema 1. Sean a , b y m son primos entre sí, entonces existe un entero x tal que

$$ax + b \equiv 0 \pmod{m}.$$

Además, si x_1 y x_2 satisfacen la congruencia entonces $x_1 \equiv x_2 \pmod{m}$.

Demostración. Puesto que a y m son primos entre sí, podemos encontrar enteros r y s tales que

$$1 = ar + ms,$$

por lo que

$$ar - 1 = -ms$$

y al multiplicar por $-b$ obtenemos

$$a(-br) + b \equiv 0 \pmod{m}.$$

De aquí que $x = -br$ sea el entero buscado. Supongamos ahora que x_1 y x_2 satisfacen

$$\begin{aligned}ax_1 + b &\equiv 0 \pmod{m}, \\ax_2 + b &\equiv 0 \pmod{m}.\end{aligned}$$

Restando las congruencias tenemos

$$a(x_1 - x_2) \equiv 0 \pmod{m},$$

es decir, m divide a $a(x_1 - x_2)$. Por un resultado de la teoría de números, por ser a y m primos relativos, debe ocurrir que m divide a $(x_1 - x_2)$, de donde

$$x_1 \equiv x_2 \pmod{m},$$

lo que demuestra el teorema. \square

Observación 2. Bajo el supuesto de que x_1 es solución y x_2 es un entero tal que $x_2 \equiv x_1 \pmod{m}$, entonces

$$ax_2 + b - (ax_1 + b) = maq,$$

lo que implica que

$$ax_2 + b \equiv ax_1 + b \equiv 0 \pmod{m},$$

y se sigue que x_2 también es solución del sistema de congruencias. En particular, para cada entero k , los enteros de la forma

$$u = x_1 + km \tag{1}$$

satisfacen

$$x_1 - u = x_1 - x_1 - km = -km$$

es decir, $x_1 \equiv u \pmod{m}$. Es decir, todos los enteros de la forma (1) son soluciones de la congruencia del lema.

Teorema 2 (Chino del residuo). *Si m y n son primos entre sí, entonces las congruencias*

$$\begin{aligned} x &\equiv a \pmod{m}, \\ x &\equiv b \pmod{n}, \end{aligned}$$

tienen solución común.

Demostración. Para la primera congruencia, como 1 y m son primos relativos entre sí, el lema anterior nos indica que tiene una solución u , y por la observación se tiene cualquier entero $v = u + mk$ con k entero es una solución.

Busquemos alguna que resuelva la segunda congruencia, esto es, hallemos un entero k tal que

$$u + mk \equiv b \pmod{n},$$

o lo que es lo mismo

$$mk + (u - b) \equiv 0 \pmod{n}.$$

Pero tal congruencia también satisface las hipótesis del lema anterior, y por lo tanto tiene solución. El teorema queda demostrado. \square

Este teorema garantiza que existe una solución al sistema de congruencias que nos interesa, pues 13 y 4 son primos entre sí (puesto que $13 \times 1 + 3 \times (-4) = 1$). Lo que es más: si u es una solución al sistema, cualquier otra solución sistema es de la forma $u + mnk$, donde k es un entero arbitrario. En nuestro caso, una vez localizado un año que tenga cierto numeral y símbolo, digamos x , otro año con el mismo numeral y símbolo será $x + 4 \times 13k = x + 52k$, lo cual es obvio ya, pues cada 52 se repite la secuencia de numerales y portadores.

La demostración del teorema chino del residuo proporciona un método para calcular una solución a cualquier sistema de congruencias que satisfaga sus hipótesis. En efecto, en el primer caso, como $13 + (-12) = 1$, tenemos que $ar = -12$ y $b = -n$ y, según el lema, una solución de la primera congruencia es $u = -12n$. Ahora buscamos un entero k tal que

$$13k \equiv 12n + s \pmod{4}.$$

Aplicando nuevamente el lema vemos que

$$k = 12n + s,$$

por lo que una solución a ambas congruencias es

$$v = -12n + 13(12n + s) = 144n + 13s.$$

Supongamos, a modo de ejemplo, que se escribe en un códice el año In Yuchi yuu (1 Pedernal). Consultando las tablas ficticias anteriores, resulta que $s = 2$ y que $n = 0$. Luego un año In Yuchi yuu fue

$$144 \times 0 + 13 \times 2 = 13 \times 2 = 26.$$



Figura 4: La placa de Cuilapan

Sumándole a este año múltiplos enteros de 52 tendremos una lista de años In Yuchi yuu:

$$\dots, 26, 76, \dots, 1794, 1846, 1898, 1950, 2002, \dots$$

Para obtener tablas reales de conversión se necesita evidencia arqueológica o escrita.

En la placa de Cuilapan se tiene anotado que el año 1555 (en la mitad izquierda) fue un año Uxi Ndoo (10 Caña). De aquí obtenemos que

$$1555 = 13 \times 119 + 8 = 4 \times 388 + 3,$$

luego las tablas de residuos son

Residuo	0	1	2	3
Símbolo	Yuchi yuu	Ve'e	Idu	Ndoo

y

Residuo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Numeral	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	1

En el códice Colombino (según María de los Ángeles Ojeda Díaz) dice que Una Yakuaa (8 Venado) nació el año Uxi uvi Ndoo (12 Caña). Esto quiere decir que pudo haber nacido en los años

$$144 \times 10 + 13 \times 3 + 52k = 1479 + 52k$$

donde k es un entero. Un entero adecuado (que nos da una fecha inmediatamente posterior a 1000 d. C.) es -8 , y así un año muy probable es 1011 d. C.

De acuerdo con la cronología de Caso citada por Ojeda Díaz esto está equivocado en 12 años, pues él propone el año 1023. En cambio, el siguiente año Uxi uvi Ndo, que es 1063 d. C., corresponde a la fecha dada por Emily Rabin (según Jansen) para el nacimiento de Una Yakuaa.

4.3. Observaciones

Hasta este punto no se ha tocado el asunto escabroso de los años bisie-tos. Se tiene la teoría de que los antiguos también tuvieron problemas de desfase de su calendario y que periódicamente lo reajustaban, apoyados en observaciones astronómicas.

Como nos hemos ocupado exclusivamente de los años, y no de los días, los cálculos que proponemos estarían equivocados en alrededor de un año cada 1507 años³, suponiendo que el sistema de cuatro símbolos fuera relativamente independiente con respecto a la cuenta de los días y que solamente los *ñuu savi* corrigieran su calendario. Esto constituye un error aceptable en términos de los periodos de desarrollo de las culturas antiguas. Por ejemplo, desde el año calculado para el nacimiento de Una Yakuaa, el año trópico se ha desfasado alrededor de 224 días. Pero este lapso no es un año completo, por lo que no es probable que afectase a la cuenta de los cuatro símbolos.

Por otra parte, si la información de la placa de Cuilapan es correcta, cualquier evento que se haya registrado 52 años antes o después se podría fechar de manera muy precisa, pues hemos visto que el error probable en ese intervalo de tiempo es mínimo. Por ejemplo, la fecha Uxi Yuchi yuu que aparece en la parte derecha de la placa podría ser un año posterior. Calculando con las tablas de residuos

$$144 \times 8 + 13 \times 0 + 52k = 1152 + 52k,$$

y si $k = 0$, obtenemos 1568, fecha en la que la Real Audiencia ordenó se detuvieran los trabajos del convento (véase [12]). Sin embargo, si consideramos el orden de lectura de los códices de derecha a izquierda, bien podría ser una fecha anterior a 1555, la inmediatamente anterior es 1516.

En todo caso, si desea reajustar el método propuesto, basta con calcular nuevamente las tablas de residuos para una nueva equivalencia entre un año

³En efecto,

$$\frac{365}{0,2422} \approx 1507,019.$$

occidental y su representación glífica. Más aún, el resultado vale para cualquier cuenta de años con una fecha inicial establecida (como el nacimiento de Cristo o la cuenta larga maya, por ejemplo) pues el cálculo de las tablas de residuos es independiente del punto de partida de la cuenta de años.

Para los años antes de Cristo se debe tener en cuenta que no hubo un año 0. Así, para convertir años previos a nuestra era, es necesario considerar el negativo del año y sumarle 1. Por ejemplo, el año 1 a. C. debe considerarse en las ecuaciones de correlación como $-1 + 1 = 0$.

Al hacer la correlación recíproca, a los resultados no positivos se les resta 1 y se considera el negativo. Por ejemplo, si en las ecuaciones se obtiene -2 , la fecha en cuestión es $-2 + (-1) = -3$, es decir, 3 a. C.

5. Los frisos de Mitla

5.1. Conceptos preliminares

En esta sección utilizaremos un concepto muy importante, el de *simetría*. En esencia, se considera que un objeto matemático es simétrico si, al efectuarle alguna transformación, termina por no ser alterado en absoluto. Por ejemplo, si tenemos un triángulo equilátero, al girarlo con respecto a su centro 120° en cualquier dirección, queda igual.

Las transformaciones en el plano que preservan distancias se denominan *isometrías*. En el ejemplo anterior, la rotación es una isometría: los lados del triángulo siguen midiendo lo mismo antes y después de girarlo. Nótese también que toda simetría es isometría pero no recíprocamente.

Se enlistan ahora todas las posibles isometrías del plano.

1. Traslación.
2. Reflexión respecto a una recta.
3. Giro con centro en un punto P y un cierto ángulo α (en sentido anti-horario).
4. Reflexión con deslizamiento, que es la composición de los incisos 1 y 2.
5. La identidad, esto es, no realizar transformación alguna.

Otro concepto que nos falta es el de *grupo*. En este caso, se establece una definición rigurosa.

Definición 2. Un conjunto G no vacío es un grupo si tiene definida una operación $*$: $G \times G \rightarrow G$ con las siguientes propiedades.

1. Se cumple que $(a * b) * c = a * (b * c)$ para cualesquiera $a, b, c \in G$. Esto se conoce como *propiedad asociativa*.
2. Existe $e \in G$ tal que $e * a = a * e = a$ para todo $a \in G$. Esta es la propiedad de existencia del neutro.
3. Para todo $a \in G$ existe $b \in G$ tal que $a * b = b * a = e$. El elemento b se conoce como *inverso* de a .

Los números enteros \mathbb{Z} forman un grupo con la operación suma. Por otro lado, los números naturales \mathbb{N} no son un grupo pues no todos sus elementos tienen inverso.

Imagínese una figura F cualquiera en el plano. Dos transformaciones hechas a F se *componen* si se aplican una después de la otra. Sea G el conjunto de todas las transformaciones que se pueden practicar a la figura sin deformarla. Resulta que G es un grupo con respecto a la operación de componer transformaciones. Veamos por qué.

- El conjunto G no es vacío porque la isometría 5, la que deja sin cambios a la figura, está en G .
- Se verifica fácilmente que el orden en que agrupemos la aplicación de transformaciones de G no cambia el resultado final.
- El neutro en G es precisamente la isometría 5.
- No es muy difícil ver que para cada isometría su inverso es una isometría.

Cuando un subconjunto H de un grupo G también es un grupo con la misma operación, se dice que H es un *subgrupo* de G .

Si en un grupo se efectúa la operación con un elemento n veces, esto es, se hace

$$\underbrace{a * a * \cdots * a}_{n \text{ veces}}$$

escribimos a^n . Al inverso b de a se le escribe como a^{-1} y n veces a^{-1} se escribe como a^{-n} . Se puede demostrar ahora que

$$a^m * a^n = a^{m+n}$$

para cualesquiera m, n enteros. Como $a^1 * a^{-1} = a^{1-1} = a^0$, entonces $a^0 = e$. El conjunto de todos los a^n con n entero es un grupo con la operación $*$, y se le conoce como subgrupo cíclico de G generado por a .

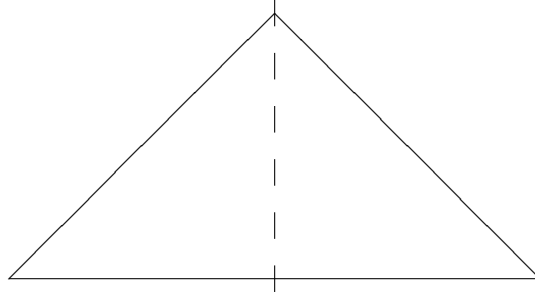


Figura 5: Triángulo isósceles

Definición 3. Se llama *grupo de simetría* de una figura F al conjunto de transformaciones que dejan invariante a F .

Como ejemplo, consideremos a un triángulo isósceles, como el de la Figura 5. Su grupo de simetrías tiene, forzosamente, a la isometría 5 como elemento. Tiene otro más: el de la reflexión con respecto a su eje de simetría que aparece como una línea punteada. El grupo de simetría de este triángulo consiste únicamente en estos dos elementos.

Definición 4. Un grupo de simetría G *conserva la orientación* si consiste únicamente en giros, traslaciones o ambos. Esto es, sus únicos elementos son las isometrías 3 y 1. Un grupo no conserva la orientación si tiene cualesquiera otras isometrías.

Naturalmente, un grupo que conserve la orientación también tiene a la isometría 5. En el caso del triángulo isósceles, su grupo de simetría no conserva la orientación, pues además de la isometría 5 tiene a la isometría 2.

Definición 5. Un giro tiene orden n si el ángulo que se gira es $360^\circ/n$. Equivalentemente, n es el número de veces que ha de repetirse el giro para obtener la isometría 5.

Con este marco teórico, podemos discutir ahora los grupos de simetrías de los frisos. Un friso puede pensarse como una banda en el plano, recta e infinita, que se extiende en ambas direcciones. Esto implica que su grupo de simetría, cualquiera que éste sea, deberá tener un subgrupo cíclico con infinitos elementos generados por traslaciones.

Tipo	Generadores	¿Conserva la orientación?	Ejemplo
F_1	Traslación	Sí	FFFFF
F_2	Semigiro y traslación o dos semigiros	Sí	NNNN
F_1^1	Traslación y reflexión respecto a la recta centro	No	DDDD
F_1^2	Traslación y reflexión o dos reflexiones	No	VVVV
F_1^3	Reflexión con deslizamiento	No	LFLF
F_2^1	Tres reflexiones	No	HHHH
F_2^2	Reflexión y semigiro	No	VAVA

Cuadro 2: Clasificación de frisos

Los posibles grupos de simetría de un friso tienen restringida la isometría 2 a rectas verticales y horizontales. Si un friso es simétrico con respecto a una recta horizontal, será la que lo divida a la mitad y no habrá otra recta horizontal con esa propiedad. Dado que tal recta es única, se denominará *recta centro*. Por otro lado, si un friso es simétrico con respecto a una recta vertical, entonces hay infinitas rectas verticales con la misma propiedad.

Que los frisos sean rectos también limita los giros de la isometría 3 a los órdenes 1 y 2, es decir, a rotaciones de 360° (que en este caso es idéntica a la isometría 5) y 180° .

Estamos ahora en condiciones de enunciar el único teorema de esta parte.

Teorema 3. *Sólo hay siete grupos de simetría para los frisos.*

Demostración. Véanse [7] y [8]. □

En el Cuadro 2 se describen los siete grupos, donde adicionalmente se les otorga una nomenclatura.

Para concluir esta sección de conceptos preliminares, presentamos el siguiente algoritmo de clasificación (véase [11]).

Algoritmo 1. Obtención del grupo de isometrías de un friso.

Entrada: Un friso F .

Salida: Su grupo G de isometrías.

```

1: si hay giros de orden 2 entonces
2:   si la recta centro es eje de simetría entonces
3:     devolver  $F_2^1$ 
4:   si no
5:     si hay ejes de simetría verticales entonces
6:       devolver  $F_2^2$ .
7:     si no
8:       devolver  $F_2$ .
9:     fin si
10:  fin si
11: si no
12:  si la recta centro es eje de simetría entonces
13:    devolver  $F_1^1$ .
14:  si no
15:    si hay ejes de simetría verticales entonces
16:      devolver  $F_1^2$ 
17:    si no
18:      si la recta centro es eje de simetría con deslizamiento entonces
19:        devolver  $F_1^3$ .
20:      si no
21:        devolver  $F_1$ .
22:      fin si
23:    fin si
24:  fin si
25: fin si

```

5.2. Clasificación de los frisos de Mitla

Entre todos los grupos de frisos, en Mitla el más común es el F_1^1 . El patrón más utilizado es el de la Figura 6.

Este motivo, manejado apropiadamente, es germen para no menos de cinco tipos diferentes de friso. Tiene un área de 25 unidades cuadradas y un perímetro de $40 = 2 \times 20$ unidades. El triángulo que tiene en el interior es frecuente, y su significado parece ser el de la dirección de conteo de sus cuadros. Puede indicar ya sea el número 4, 7, 10 o 18, según la posición que ocupa, o quizá otros números que por el momento no somos capaces de determinar.

Una posible interpretación es la siguiente: Abraham Castellanos afirma

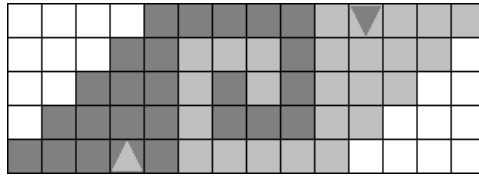


Figura 6: Patrón geométrico de Mitla

que la greca *ñuu savi* significa la serpiente (Castellanos, 1917:[4]). Ésta, a su vez, representa el movimiento. Si el triángulo es una flecha que indica la dirección del movimiento, quiere decir que a cada movimiento en la naturaleza le corresponde uno complementario de igual magnitud en sentido opuesto, el cual sabemos que es un principio válido de la física clásica, interpretando al movimiento como ímpeto o como fuerza.

La parte triangular del diseño tiene exactamente 15 unidades cuadradas, mientras que la parte espira tiene 10 unidades cuadradas. En el paralelogramo que forman dos grecas, una rotación de 180° de la otra, reúnen 50 unidades cuadradas.

Se señala todo esto porque esta greca es muy parecida a otra que aparece en el Códice Vindobonensis, que se muestra en la Figura 7.

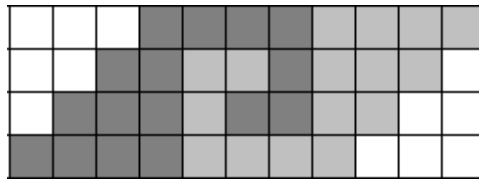


Figura 7: Patrón geométrico del Códice Vindobonensis

En tal caso es un poco más simple, pues tiene 16 unidades cuadradas, que con su conjugada dan un total de 32. Su perímetro es de $26 = 2 \times 13$, que es un número importante para los cálculos calendáricos (Romero, 1988:[10]).

En todo caso, debe notarse que la greca del Códice Vindobonensis alude al 13 y su contraparte mitleca alude al 20. El producto de ambos es, desde luego, 260. Se ha buscado una relación explícita con el calendario, perlas cifras presentes en los frisos son bastante ambiguas.

Clasifiquemos ahora algunos frisos *ñuu savi*.



Figura 8: Grupo F_1

Grupo: F_1 . ¿Hay giros de orden 2? No. ¿La recta centro es eje de simetría? No. ¿Hay ejes de simetría verticales? No. ¿La recta centro es eje de simetría con deslizamiento? No.



Figura 9: Grupo F_2

Grupo: F_2 . ¿Hay giros de orden 2? Sí. ¿La recta centro es eje de simetría? No. ¿Hay ejes de simetría verticales? No. ¿La recta centro es eje de simetría con deslizamiento? No.



Figura 10: Grupo F_1^1

Grupo: F_1^1 . ¿Hay giros de orden 2? No. ¿La recta centro es eje de simetría? Sí.

Grupo: F_1^3 . ¿Hay giros de orden 2? No. ¿La recta centro es eje de simetría? No. ¿Hay ejes de simetría verticales? No. ¿La recta centro es eje de simetría con deslizamiento? Sí.

Grupo: F_2^1 . ¿Hay giros de orden 2? Sí. ¿La recta centro es eje de simetría? Sí.

Existen en Mitla otros patrones geométricos que no son frisos, los de la Figura 13. Estos diseños forman embaldosados que cubren todo el plano. Una observación cuidadosa nos revela que la parte de color gris claro (o en relieve) es idéntica a la parte en gris oscuro (en bajorrelieve), lo cual nos sugiere el equilibrio recursivo de fuerzas omnipresente en el universo.



Figura 11: Grupo F_1^3



Figura 12: Grupo F_2^1

Por último, propongo ejemplos sencillos utilizando el patrón fundamental de cómo debieran ser los frisos con grupos de simetría F_1^2 y F_2^2 .

Si bien el grupo F_2^2 no se encuentra en Mitla, se puede encontrar en el tocado de una figurilla expuesta en el Museo Amparo de la ciudad de Puebla, con la forma de la Figura 16.

6. Conclusión

Para el autor, ésta fue la primera experiencia en la que se aplican instrumentos matemáticos para el análisis de las culturas mesoamericanas. No cabe duda de que los esfuerzos han rendido fruto y que el resultado es satisfactorio (sin embargo, está muy lejos de ser completo).

Los *ñuu savi* tenían una concepción del mundo impregnada profundamente de principios matemáticos. Esto se plasma en su calendario, que influía de manera determinante en su vida y que ya han sido discutido con cierto detalle.

Lo que hemos observado en Mitla resulta una confirmación de varias conjeturas iniciales, entre las cuales la primera ha sido que los *ñuu savi* poseían una destreza matemática insospechada, sin la cual la construcción de Mitla y sus diseños, la formulación de sus calendarios, su astronomía y posiblemente otros aspectos, hubiera sido imposible.

Sus descubrimientos matemáticos han quedado tallados en piedra o plasmados en los códices. Se afirma que estos últimos son de naturaleza ritual. Creo que en otros códices quedaron asentados, de manera más explícita, sus



Figura 13: Otros patrones geométricos



Figura 14: Grupo F_1^2

conocimientos matemáticos, pues para alcanzar tal desarrollo de los mismos era indispensable contar con una escritura y notación en particular. En lo que refiere a la astronomía, aún quedan indicios. Pero en lo que respecta a las matemáticas, aún no se tiene noticia de nada. Algún documento con estos datos, por insignificante que sea, sería de incalculable utilidad para las investigaciones.

Referencias

- [1] Ortiz, Ignacio y Ortiz, Reina (eds.) *La tierra del Sol y de la Lluvia*. Memorias de la 2a. Semana de la Cultura Mixteca. Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapán de León, Oaxaca, 2002.
- [2] Caballero, Gabriel. *Propuesta: la reconstrucción de la numeración de Tu'un Savi como sistema vigesimal*. Edición personal (2002).
- [3] Cárdenas, Humberto, *et al.* *Álgebra superior*. Editorial Trillas, México, 1990. Segunda edición.
- [4] Castellanos, Abraham. *Conferencias histórico-pedagógicas*. Ayuntamiento de Mérida. Yucatán, 197.
- [5] Códice Cospi.
- [6] Códice Vindobonensis.



Figura 15: Grupo F_2^2



Figura 16: Grupo F_1^2

- [7] Coxeter, H. S. M. *Fundamentos de geometría*. Editorial Limusa, México, 1986.
- [8] De la Peña, José Antonio. *Álgebra en todas partes*. Fondo de Cultura Económica, México, 1999.
- [9] Herstein, I. N. *Álgebra abstracta*. Editorial Iberoamérica, México 1986.
- [10] Romero, María Elena. *Nepohualtzitzin. Matemática nahua contemporánea*. SEP, México, 1988.
- [11] *Grupos ornamentales*.
URL: www.maf.arq.uva.es/GYCGA/Apuntes/raiz/.
- [12] *México Desconocido. Siglo XVI. Misiones dominicanas en Oaxaca (I)*.
URL: www.mexicodesconocido.com.mx/espanol/historia/colonia/detalle.cfm?idpag=33&idsec=2&idsub=13Resultado#4