

Sobre la geometría prehispánica

Octavio Alberto Agustín Aquino

28 de mayo de 2007

1. Introducción

El autor del presente artículo ha discutido ciertas aplicaciones de las matemáticas en la tradición occidental para entender algunas manifestaciones de la cultura mixteca prehispánica (véase [1], pp. 117-149). Aún así, no se profundiza en la naturaleza del pensamiento matemático de esta cultura antigua. Nuestro propósito aquí es iniciar una línea de investigación que nos acerque a dicho pensamiento.

Una fuente muy directa proviene de las construcciones geométricas realizadas en discos de piedra nahuas y las sugeridas en los códices mixtecos. Se ha señalado erróneamente que los pueblos prehispánicos eran capaces de hacer construcciones que la tradición occidental ha demostrado imposibles, y usando los mismos recursos (específicamente, empleando solamente regla no graduada y compás). Esto, desde luego, refleja nuestro sesgo cultural al pretender evaluar desde el pensamiento occidental lo logrado por la cultura prehispánica. Empezaremos por dar un repaso de dicha demostración para sugerir los caminos que pudieron seguir los geómetras precolombinos para llegar a estas construcciones.

Otra fuente es la misma naturaleza de la escritura y comprensión del mundo manifestada en los códices. Según algunos investigadores, existen evidencias de que no era ajeno al pensamiento prehispánico el concepto conocido actualmente como fractal. Aportaremos mayores evidencias e interpretaciones en términos de una posible física y geometría prehispánicas.

2. Constructibilidad con regla no graduada y compás

El problema que han suscitado las construcciones prehispánicas proviene de la escasa o nula comprensión de las ideas matemáticas que hay detrás. Lejos de restar mérito a nuestros antepasados, un examen minucioso de sus resultados nos plantean posibilidades de su pensamiento geométrico.

De aquí en adelante constructible significa constructible con regla no graduada y compás, a menos que se especifique lo contrario.

Definición 1. *Dado un subconjunto no vacío $S \subset \mathbb{R}^2$, diremos que una recta es constructible a partir de S si dicha recta pasa por dos puntos distintos en S . Igualmente, diremos que una circunferencia es constructible a partir de S si su centro está en S y su radio coincide con la distancia de entre dos puntos de S .*

A partir de las rectas y circunferencias constructibles, puede darse el caso de que sus intersecciones nos den puntos que no están originalmente en S .

Definición 2. *Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ no vacío. Diremos que $P \in \mathbb{R}^2$ es 1-constructible a partir de S si puede obtenerse como intersección de rectas o circunferencias constructibles a partir de S . En general, diremos que P es constructible a partir de S si existe una sucesión de puntos $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{R}^2$ tales que P_1 es 1-constructible a partir de S y P_n es 1-constructible a partir de $S \cup \{P_1, \dots, P_{n-1}\}$ para $n = 2, \dots, r$.*

Suponiendo que $(0, 0), (0, 1) \in S$, es posible demostrar que todo punto de coordenadas racionales es constructible a partir de S . Este supuesto es razonable, ya que a cualesquiera dos puntos tomados en un plano es posible asignarles estas coordenadas. Por lo tanto, supondremos de ahora en adelante que $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = S$.

El siguiente teorema es fundamental para sustentar la teoría. Obsérvese que bajo nuestros supuestos se tiene que $K_0 = \mathbb{Q}$ es el menor cuerpo que contiene a las coordenadas de los puntos en S .

Teorema 1. *Sea K_0 el menor cuerpo que contiene a las coordenadas de S y sea $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un punto 1-constructible a partir de S . Definamos $K_1 = K_0[x_0, y_0]$. Entonces $[K_1 : K_0] = 2^\epsilon$, donde $\epsilon = 0$ o 1 .*

Demostración. Si $P = (x_0, y_0)$ es la intersección de dos rectas constructibles a partir de S , es claro que x_0 y y_0 pertenecen a K_0 , y de aquí que $K_1 = K_0$ y se deduce que $[K_1 : K_0] = 1$.

Ahora bien, supongamos que P está en la intersección de la recta r cuya ecuación es

$$\frac{x-p}{r-p} = \frac{y-q}{s-q}, \quad (p, q), (r, s) \in S$$

con la circunferencia C de ecuación

$$(x-t)^2 + (y-u)^2 = w^2, \quad (t, u) \in S$$

y w es la distancia entre dos puntos en S . Tenemos que $p, q, r, s, t, u, w^2 \in K_0$. Por lo tanto x_0 es la raíz del polinomio cuadrático

$$(x-t)^2 + \left(\frac{s-q}{r-p}(x-p) + (q-u) \right)^2 = w^2,$$

lo que implica que o bien $K_1 = K_0[x_0]$ es un cuerpo distinto a K_0 o bien coinciden. Como $y_0 \in K_0[x_0]$, se sigue que o bien $[K_1 : K_0] = 1$ o bien $[K_1 : K_0] = 2$, pues x_0 es raíz de un polinomio de grado 2.

Finalmente, si P está la intersección de dos circunferencias C_1 y C_2 , basta considerar que este punto también está en la intersección de C_1 y $C_1 - C_2$. Siendo $C_1 - C_2$ una recta, ya hemos considerado este caso y el teorema se sigue. $\square$

Corolario 1. *Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y K_0 el menor subcuerpo de $\mathbb{R}$ que contiene a las coordenadas de los puntos de S . Sea $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un punto constructible a partir de S y sea $K_1 = K_0[x_0, y_0]$. Entonces $[K_1 : K_0] = 2^n$ para algún $n \geq 0$.*

Para el caso de los polígonos regulares no serán suficientes los resultados anteriores, por lo que necesitamos el siguiente teorema, cuya demostración se encuentra en [10].

Teorema 2. *Sea K_0 el menor cuerpo que contiene a las coordenadas del punto P . Si $P = (x, y) \in \mathbb{C}$ es algebraico y la cerradura normal de $K_0(x, y)$ es de grado 2^n para algún entero no negativo n , entonces P es constructible.*

Llamaremos *n-ciclotomía* al conjunto de puntos sobre un círculo que determinan a un polígono regular de n lados. Consideremos a una *n-ciclotomía* como números complejos de la forma

$$X_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n).$$

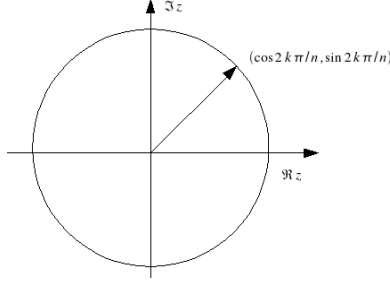


Figura 1: Punto en un polígono visto como un número complejo.

Por la identidad de De Moivre,

$$X_k^n = \cos(2k\pi) + i \sin(2k\pi) = 1.$$

Como todos los puntos $X_1, \dots, X_n$ son distintos, entonces todas las raíces del polinomio $f(X) = X^n + 1$ nos dan puntos distintos sobre un polígono regular. Más aún, es fácil ver que forman un grupo bajo la multiplicación compleja. Denotaremos a este grupo por κ .

Definición 3. Se dice que ζ es una raíz primitiva n -ésima de la unidad si ζ genera a κ . Esto es, para cada $t \in \kappa$ existe u tal que $\zeta^u = t$.

El siguiente teorema es un tanto complicado y por ello se omite la demostración, la cual puede encontrarse en [10]. Recordemos que la función $\phi(n)$ de Euler está definida como el número de enteros positivos que son primos relativos con n (incluido el 1).

Teorema 3. Sea ζ una raíz n -ésima primitiva de la unidad sobre $\mathbb{Q}$. Entonces $[\mathbb{Q}[\zeta] : \mathbb{Q}] = \phi(n)$.

Teorema 4. Un polígono regular de n lados es constructible si, y sólo si,

$$n = 2^r p_1 \cdots p_s \tag{1}$$

con $r \in \mathbb{N}$ y $p_1, \dots, p_s$ primos distintos de la forma $2^t + 1$.

Demostración. Si ζ es una raíz primitiva de la unidad y $n = 2^a p_1^{a_1} \cdots p_m^{a_m}$ con $p_1, \dots, p_m$ primos impares distintos, entonces por el teorema anterior

$$[\mathbb{Q}[\zeta] : \mathbb{Q}] = \begin{cases} 2^{a-1}(p_1 - 1)p_1^{a_1-1} \cdots (p_m - 1)p_m^{a_m-1} & a \geq 1, \\ (p_1 - 1)p_1^{a_1-1} \cdots (p_m - 1)p_m^{a_m-1} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Según la discusión anterior, vemos que el polinomio $X^n - 1$ tiene todas sus raíces (que conforman una n -ciclotomía) en $Q[\zeta]$, lo que quiere decir que es su propia extensión normal. Puesto que $\phi(n) = 2^k$ para algún $k \in \mathbb{N}$ si, y sólo si, $a_1 = \dots = a_m = 1$ y $p_i = 2^{t_i} + 1$ para algún $t_i \in \mathbb{N}$, el teorema se sigue. $\square$

Los primos de la forma $2^t + 1$ se denominan primos de Fermat. Los únicos conocidos hasta hoy son 3, 5, 17, 257 y 65537.

Por la teoría anterior, vemos que son imposibles las siguientes construcciones con sólo regla no graduada y compás.

La trisección de ángulos. En general, es imposible trisecar ángulos. Haciendo $\alpha = \cos(2\pi/9) = \cos(40^\circ)$ tenemos que $4\alpha^3 - 3\alpha + \frac{1}{2} = 0$, en virtud de la fórmula

$$\cos(3\theta) = \cos^3 \theta - \binom{n}{2} \cos \theta \sin^2 \theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

y considerando además que $\cos(3 \cdot 40^\circ) = \cos(120^\circ) = -1/2$. Por lo tanto α es una raíz de $4X^3 - 3X + \frac{1}{2}$, el cual se comprueba fácilmente que es irreducible sobre $\mathbb{Q}$. Al ser un polinomio de grado impar, la extensión de campo sobre sus raíces no es de grado una potencia de 2. Entonces es imposible trisecar ángulos, en particular el de 120° , pues el coseno de 40° no se puede construir.

La construcción de algunos polígonos regulares. Como 7 no es de la forma (1), no es posible construir un heptágono regular. De la misma forma, polígonos con 9, 17, 13, 260 lados, etcétera, son imposibles de construir.

2.1. Una aproximación a la geometría prehispánica

Antes de iniciar la discusión, es pertinente citar el siguiente teorema. Véase [6] para una demostración.

Teorema 5 (Mohr-Mascheroni). *Todos los problemas de construcción que se resuelven con ayuda del compás y la regla, pueden resolverse con precisión¹ usando solamente el compás.*

En algunos discos tallados por la cultura azteca tenemos ejemplos de construcciones geométricas de puntos que determinan polígonos regulares de

¹Con precisión queremos decir que, aunque es imposible con el simple compás trazar el continuo de una recta, sí es posible determinar las intersecciones entre rectas y círculos requeridas para las construcciones geométricas.

7 y 17 lados. Según [9], incluso hay ejemplos de trisección de ángulos, al trisecar un ángulo de 120° al construir un eneágono regular. Sabemos por la teoría anterior que tal cosa es imposible con solamente regla no graduada y compás. Entonces, ¿cómo las realizaron?

La única evidencia que nos da una aproximación a sus métodos es el código Vindobonensis. Por ejemplo, en los folios 5, 11, 13, 14, 16, 18 y 20 aparecen personajes con actitud de medir utilizando un mecate. Por comunicación personal con Virgilio Vásquez Hipólito de Yuku Kimi de Ocampo, sabemos que en algunos pueblos es aún costumbre medir terrenos utilizando mecates.

Por la evidencia arqueológica hallada en la tumba 7 de Monte Albán (en particular, los ornamentos circulares) podemos suponer que podían utilizar el compás.

La conjetura consiste en que los mixtecos (y quizá también los nahuas), una vez que contaban con el disco de piedra, medían su circunferencia con un mecate, el cual es posible partir en cualquier número entero de partes con sólo un compás (según el Teorema 5). Usando esta partición es posible marcar el disco en los puntos apropiados.

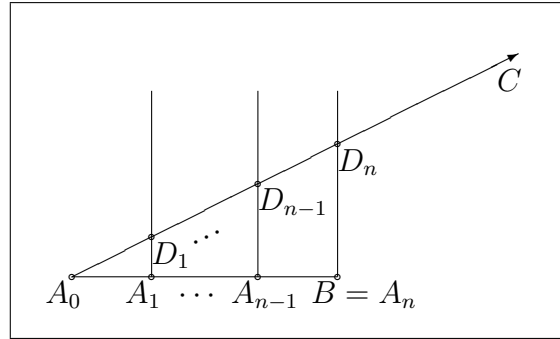


Figura 2: La construcción del Tales sobre un mecate.

La partición del mecate es posible por medio de la construcción de Tales, que a continuación se describe usando compás y regla. Dado el segmento de recta $s = \overline{A_0B}$, trazamos un rayo arbitrario $u = \overrightarrow{A_0C}$, donde $C \notin s$. Sobre el rayo u tomamos un punto arbitrario $D_1 \neq A_0$. Por medio del compás, transportamos n veces la longitud del segmento $\overline{A_1D_1}$ sobre u , obteniendo los puntos $D_2, \dots, D_n$. Ahora prolongamos las paralelas² a BD_n que pasan

²Aunque no sabemos si los geómetras precolombinos tenían el concepto de paralelismo.

por $D_2, \dots, D_{n-1}$ hasta que corten al segmento s , determinando a los puntos $A_1, \dots, A_n = B$. Que la construcción es correcta es consecuencia del teorema de Tales.

Desafortunadamente, no hay evidencia documental ni arqueológica de que los antiguos mixtecos o los nahuas conocieran la construcción de Tales.

Otra posibilidad es que fueran conscientes de que la razón del perímetro al diámetro de una circunferencia arbitraria es una constante, y que hubieran calculado una aproximación a dicha constante. Podían tomar un mecate que ya estuviera dividido en n partes (esto es fácil de conseguir por medios mecánicos sin usar regla ni compás), y usando la constante y la longitud del mecate, era posible construir un disco de piedra cuya circunferencia se aproximara a la longitud del mecate. Después simplemente se transfieren al disco los puntos que ya se tenían marcados en el mecate.

La constante en cuestión, de hecho, es π . Al ser un número trascendente (esto es, no es raíz de ningún polinomio con coeficientes enteros), es imposible que hayan podido conocer con precisión arbitraria su valor a partir de construcciones geométricas con sólo regla no graduada y compás. Sin embargo, tomando un círculo con diámetro conocido, y el mismo mecate de longitud ℓ ya particionado, es posible hallar el diámetro de otro círculo cuya circunferencia es ℓ . Una posibilidad es la construcción de la Figura 3.

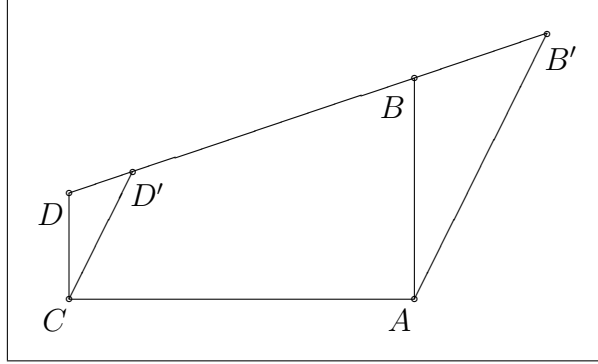


Figura 3: Construcción del diámetro de un círculo con circunferencia dada, cuando se sabe que $\frac{|AB|}{|CD|} = \pi$.

Dado el círculo con circunferencia L y diámetro D , sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos segmentos paralelos de longitudes L y D , respectivamente. Sobre la recta que determinan D y B es posible, mediante el compás, encontrar un punto B'

tal que $|AB'| = \ell$. El punto D' , en el que se cortan la paralela a $\overline{AB'}$ que pasa por C y la recta determinada por D y B , determina al segmento $\overline{C'D'}$. Dicho segmento es el diámetro buscado del círculo tal que su circunferencia mida lo mismo que $\overline{AB'}$. Es evidente que los triángulos $\triangle CD'D$ y $\triangle AB'B$ son proporcionales, y por lo tanto esta construcción es correcta.

Cabe observar que la mayoría de las ciclotomías que aparecen en el código Vindobonensis tienen 4, 8, 10, 12 y 15 puntos y todas ellas son constructibles. En el folio 23 del código, sin embargo, aparece un ejemplo de 48 puntos, mientras que en el folio 3 aparece otro de 14 puntos, y finalmente en el folio 49 aparece una de 11 puntos; todos ellos no son constructibles. Por lo tanto, es necesario realizar una investigación documental más profunda y también de campo, tratando de hallar vestigios de los principios geométricos aún vivos en la tradición oral.

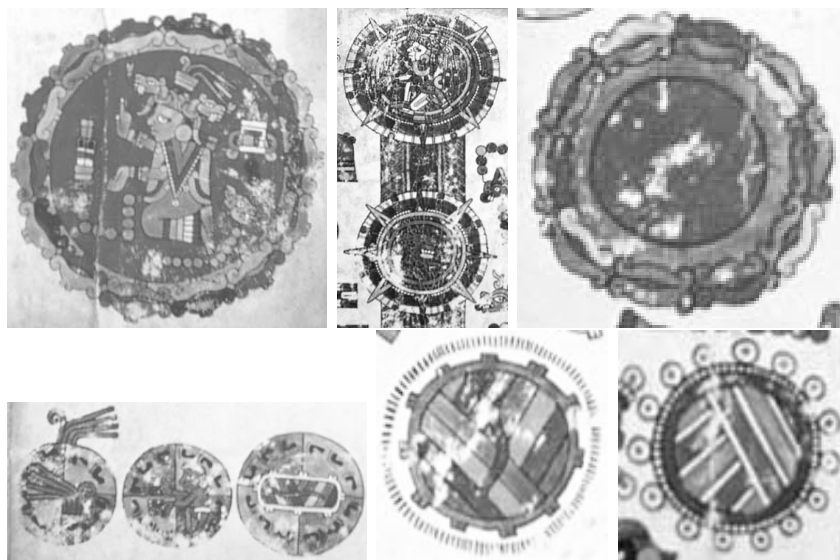


Figura 4: Detalles de algunos folios del código Vindobonensis con ciclotomías.

3. La presencia del concepto de fractal

En esta sección propongo que los mixtecos antiguos (o por lo menos los *ta'ani wisi taku*, los filósofos-artistas que componían los códigos) ya poseían el

concepto de lo que en la matemática contemporánea se conoce como *fractal*. No soy el único en sugerir la posibilidad. El doctor Gerardo Burkle Elizondo, de la Universidad Autónoma de Zacatecas ha realizado extensivas mediciones fractales de la escultura y cerámica mayas y mexicas; los resultados que ha obtenido son muy sugestivos. En sus propias palabras:

“En más de 130 figuras analizadas hasta ahora, que hemos dividido en 10 grupos:

1. Tableros de Palenque,
2. Estelas mayas,
3. Jeroglíficos mayas,
4. Pirámides mayas y mexicas,
5. Páginas de códices diversos correspondientes a *tonalamatl*,
6. Páginas diversas del códice Dresden,
7. Monumentos de piedra (vista frontal),
8. Piedras astronómicas circulares,
9. Secciones de varios murales mesoamericanos y
10. Vasos mayas y otras figuras,

todas han resultado con una dimensión fractal alta, que de hecho hasta ahora en nuestros resultados preliminares hemos podido ubicar en el rango entre 1,803 y 2,277, estando la mayoría entre 1,9 y 2.

Lo anterior creo que podría interpretarse en primer lugar como el hallazgo de dimensión fractal alta a muy alta como una constante en los elementos de Mesomérica estudiados si tomamos en cuenta que la dimensión fractal de los objetos fractales está ubicada entre 1,0 y 2,0”.

En el caso de una escritura como la mixteca, donde la posición, forma, color y relación entre los elementos intervienen en su semántica, no hay otra forma de tratarlo más que como una imagen. De aquí que la dimensión fractal de la escritura mixteca (si es que la tiene) debe ser superior a 1.

Sin embargo, que los códices mixtecos tengan esta complejidad manifestada en su dimensión fractal, no significa que los mixtecos conocieran lo que nosotros denominamos como fractal. Aún así, hay algunas evidencias que tienen un peso considerable.

3.1. El árbol de Apoala

En el folio 37 del código Vindobonensis aparece lo que se muestra en la Figura 5. En la parte inferior, al centro, está la representación de lo que se conoce como el árbol de Apoala, de donde los mitos dicen que descendieron los primeros mixtecos.



Figura 5: Folio 37 del código Vindobonensis.

Si removemos los adornos propios del estilo, obtenemos esencialmente la estructuras presentes en la Figura 6. En el lado izquierda aparece con ángulos rectos para asemejarse más a la representación del código. No hay que alterarlo demasiado para llegar a lo que se ve en el lado derecho; basta disminuir un poco los ángulos entre las ramas.

Es fácil reconocer la estructura fractal de la figura. Pocas culturas contemporáneas a la mixteca pudieron encontrar una representación a la vez sencilla y precisa de un objeto natural como lo es un árbol.

Una justificación de que los mixtecos intentaban representar un fractal con el árbol de Apoala es que siempre una rama del árbol es más grande que la otra. En el árbol, la ramificación izquierda es más larga que la derecha. En el subárbol izquierdo, el árbol se refleja y reescala, pues ahí la rama derecha

es más larga que la rama izquierda. Una vez más esto se repite en las dos ramificaciones pequeñas, siendo (como en el árbol más grande) la ramificación izquierda más larga que la derecha. Pareciera que el artista hiciera a propósito esta asimetría para que el lector supiera que el árbol contiene copias escaladas de sí mismo.

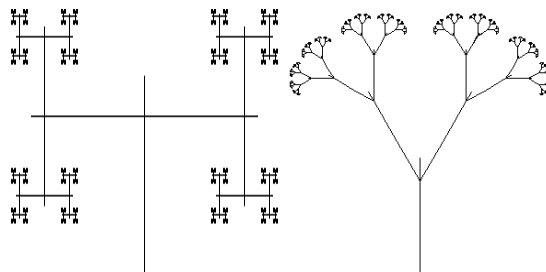


Figura 6: Estructura del árbol de Apola.

Hay tres principios implícitos en la comprensión de los objetos fractales.

Autosemejanza Los objetos fractales son invariantes bajo las llamadas *transformaciones de Hutchinson*. De hecho, esa propiedad los caracteriza completamente, y además implica que son semejantes a sí mismos, en una forma parecida (aunque no igual) a la que lo son las grecas de Mitla. Más aún, los objetos fractales son los puntos fijos o atractores de los operadores de Hutchinson, por lo cual también está presente la idea de estabilidad.

Recursión escalada Para trazar los árboles de la Figura 6 requerimos de un programa recursivo, donde cada paso se vea afectado por un factor de escala menor que 1. La misma idea también está presente en la ciclicidad del calendario, donde los bucles se escalan en bucles sucesivamente más grandes. Una característica de la recursividad es que cada paso de la realización del dibujo depende del anterior.³

Caos y complejidad La manera en la que se construye cada paso de un objeto fractal depende del paso anterior, por lo cual pequeñas altera-

³El doctor Gerardo Burkle Elizondo atinadamente señala: “Si bien los fractales son recursivos, no toda geometría recursiva es fractal, pues se requiere que exista escalancia... en lo referente a los fractales, las ramificaciones del objeto varían de acuerdo a leyes de potencia...” (Comunicación personal).

ciones en uno de los pasos puede afectar de manera dramática el resultado final, conduciéndonos a una respuesta no lineal de un sistema. Un ejemplo puede verse en la Figura 6. Una medida de qué tan complejo es un fractal es su dimensión, la cual discutiremos más adelante en la concepción de Felix Hausdorff.

Al enlistar estas propiedades de los fractales, no queremos decir que los mixtecos dominaran con nuestros términos estas ideas: sólo que comprendían los principios subyacentes. En otras palabras: quizá ellos no tuvieran la noción de una transformación de Hutchinson, o un espacio de Banach y sus propiedades, o de la dimensión de Hausdorff, pero sí tenían los conceptos que hay detrás de dichas formulaciones matemáticas (la recursión escalada, la semejanza en distintos niveles de amplificación, que a pequeños cambios en las causas no necesariamente corresponden pequeños cambios en los efectos, que ciertos comportamientos complejos tienden a ciertos estados estables, etcétera.) Por ello entraremos en detalle sobre lo que es un fractal, y de paso diremos cómo se estima la dimensión fractal por el método de caja.

3.2. ¿Qué es un fractal?

Los árboles de la Figura 6 fueron realizadas con el siguiente algoritmo, escrito para un dispositivo de dibujo como la tortuga de LOGO.

Algoritmo 1 (Figura fractal semejante a un árbol). Se invoca inicialmente como $\text{APOALA}(r, \ell_0, \alpha)$, donde $0 < r < 1$ es el factor de escala, ℓ_0 es la longitud del tronco original y α es el ángulo entre el tronco y las ramas.

```

función  $\text{APOALA}(r, \ell, \alpha)$ 
si  $\ell > 0,1$  entonces
  Avanza  $2\ell$ .
  Gira a la izquierda  $\alpha$  grados y avanza  $\ell$ .
   $\text{APOALA}(r, \ell r, \alpha)$ .
  Retrocede  $\ell$  y gira a la derecha  $\alpha$  grados.
  Avanza y retrocede  $\ell/2$ .
  Gira a la derecha el ángulo  $\alpha$  y avanza  $\ell$ .
   $\text{APOALA}(r, \ell r, \alpha)$ .
  Retrocede  $\ell$  y gira  $\alpha$  grados a la izquierda
  Retrocede  $2\ell$ .

```

```

fin si
fin función

```

El algoritmo se codificó en MSWLOGO versión 6.4, creado por Brian Harvey de la Universidad de California y George Mills de Softronix Inc. Reproducimos el código fuente.

```

to apoala :r :l :alpha
  if :l>0.1 [
    fd 2*:l
    lt :alpha fd :l
    apoala :r :l*:r :alpha
    bk :l rt :alpha
    fd :l/2 bk :l/2
    rt :alpha fd :l
    apoala :r :l*:r :alpha
    bk :l lt :angulo
    bk 2*:l
  ]
end

```

Se eligió LOGO porque es un lenguaje fácil de aprender y es flexible para crear gráficos y codificar procesos recursivos. Este algoritmo es, precisamente, recursivo, y se invoca a sí mismo dos veces: cada una para trazar cada rama del árbol. Gráficamente vemos que podemos descomponer a los árboles de la Figura 6 en dos árboles más pequeños que son casi idénticos al original (no lo son porque no podemos trazar líneas de grosor infinitesimal).

El algoritmo detiene la recursión cuando las copias que va a trazar tienen trocos de longitud menor o igual a 0,1. Sin esta restricción la computadora jamás terminaría de trazar la figura pedida. Por lo tanto lo que obtenemos en realidad es una aproximación.

Precisamente la recursividad y el factor de escala son propiedades fundamentales de un fractal. Supóngase que se tiene un subconjunto compacto S de $\mathbb{R}^2$, y un operador T que toma al conjunto, lo reescala en un factor $0 < k < 1$ y hace un “collage” de copias de S . Un ejemplo de tal transformación es la que genera la figura fractal del árbol: se toma al árbol, se escala en un factor r y se colocan dos copias de la reducción como ramas del árbol. Una transformación como T se llama *transformación de Hutchinson*.

Si T es una transformación de Hutchinson, ¿tiene solución la ecuación $T(S) = S$? Dicho de otra forma, ¿tiene T puntos fijos? Eligiendo una métrica apropiada (la métrica de Hausdorff) para el conjunto de todos los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^2$, se puede demostrar que las transformaciones de Hutchinson son contracciones, y que además el conjunto de todos los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^2$ es un espacio métrico completo bajo tal métrica (véase [8]). Por el teorema de contracción de Banach obtenemos que T tiene un punto fijo y que, además, es único. Más aún: si $U \subset \mathbb{R}^2$ es compacto entonces la sucesión $T(U), T^2(U), \dots$ converge a dicho punto fijo.

Definición 4. *El fractal F definido por una transformación de Hutchinson T es el único subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$ que es punto fijo de T . Esto es, $T(F) = F$.*

Los fractales provenientes de ciertas transformaciones de Hutchinson tienen un comportamiento relativamente “simple” cuando el factor de escala es constante en todo el espacio métrico. En tal caso, se dice que el fractal es *uniformemente autosimilar*. Puede ser, sin embargo, que el factor de escala sea distinto en diferentes puntos del espacio métrico, en cuyo caso hablamos de *multifractales*. Aún en ese caso una transformación de Hutchinson tiene un único punto fijo.

3.3. Dimensión de un fractal

Una forma común de medir la “complejidad” de un fractal es a través del concepto de dimensión. La siguiente formulación, debida a Hausdorff, es la más común.

Definición 5 (Medida de Hausdorff). *Sea X un espacio métrico, $A \subset X$, $d \geq 0$ y*

$$\mathcal{C}_R = \{B(s_i, r_i) : s_i \in X, r_i \leq R\}$$

una cubierta contable de bolas abiertas de A . El número

$$H^d(A) = \inf_{\mathcal{C}_R} \left\{ y : \sum_{i=0}^{\infty} r_i^d \leq y \right\}$$

es la medida d -dimensional de Hausdorff del conjunto A .

Notamos que la medida d -dimensional de Hausdorff puede no ser entera ni finita.

Definición 6 (Dimensión de Hausdorff). *Con la notación de la definición anterior, la dimensión de Hausdorff del conjunto A es el número*

$$D(A) = \inf_d \{H^d(A) = 0\}.$$

Por ejemplo, un punto x en $\mathbb{R}^n$ puede cubrirse con una bola cerrada de radio 0. Ahora bien, $0^d = 0$ para $d > 0$, por lo tanto $H^d = 0$ para $d > 0$, de donde $D(\{x\}) = 0$. Esto coincide con la dimensión euclidiana.

Un defecto de la definición de dimensión de Hausdorff es que es extremadamente difícil de determinar en general. Más aún, no nos permite estimar de manera práctica la dimensión de una imagen dada. Por ello se utiliza una definición alternativa de dimensión.

Definición 7 (Dimensión de capacidad). *Sea X un espacio métrico, $A \subset X$ totalmente acotado y una cubierta finita de $n(r)$ de cardinalidad mínima bolas cerradas de radio r de A . Definimos la dimensión inferior de capacidad $\underline{D}_b(A)$ de A como*

$$\underline{D}_b(A) = - \liminf_{r>0} \frac{\log n(r)}{\log r}$$

y la dimensión superior de capacidad de $\overline{D}_b(A)$ como

$$\overline{D}_b(A) = - \limsup_{r>0} \frac{\log n(r)}{\log r}.$$

Si ambos valores coinciden designamos a dicho valor como la dimensión de capacidad $D_b(A)$ de A .

Tristemente la dimensión de capacidad no siempre coincide con la dimensión de Hausdorff. Puede demostrarse que todo conjunto contable tiene dimensión de Hausdorff 0. Sin embargo, $\{\frac{1}{n^\alpha}\}_{n=1}^\infty$ para $\alpha > 1$ es contable pero

$$D_b\left(\left\{\frac{1}{n^\alpha}\right\}_{n=1}^\infty\right) = \frac{1}{\alpha + 1} > 0$$

como se demuestra en [7]. Sólo para el caso de fractales uniformemente autosimilares se sabe que estas dimensiones coinciden, como fue demostrado por Hutchinson.

No es de esperar que los códigos mixtecos sean fractales autosimilares, y por ello no aspiraremos a conocer su dimensión de Hausdorff. En su lugar, la dimensión de capacidad puede estimarse por el algoritmo de conteo de cajas,

y además esta dimensión da una idea de “qué tanta información” contiene la imagen en cuestión.

Para tal fin, se cubre con un retículo de cajas de lado d a la imagen en cuestión. A continuación, contamos cuántas cajas $n(d)$ contienen alguna porción de la imagen. Hacemos lo mismo para sucesivos valores dr^k , donde $0 < r < 1$, y graficamos $-\ln dr^k = -k \log rd$ contra $\ln n(dr^k)$. Esperamos que si ajustamos una recta de mínimos cuadrados obtendremos una estimación de D_b .

Puesto que la topología generada por las bolas definidas a través de p -normas son equivalentes, es indiferente en la definición de dimensión de capacidad cuál de ellas utilizemos (cuadrados, en este caso).

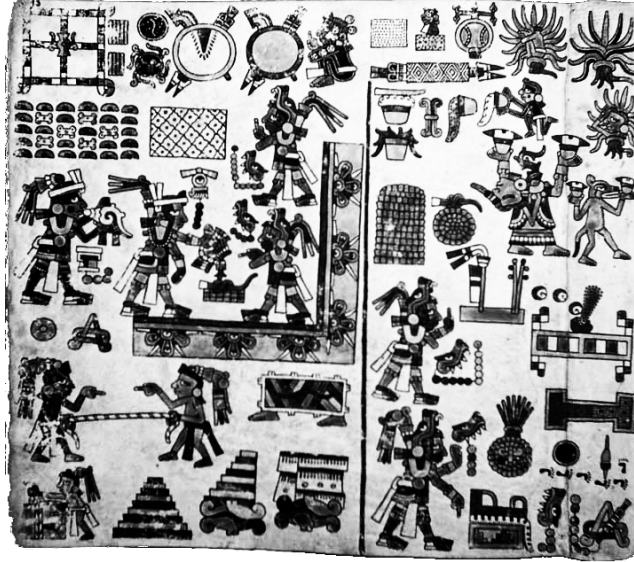


Figura 7: Folio 13 del código Vindobonensis.

Para ilustrar el método, estimaremos D_b para el folio 13 del código Vindobonensis (Figura 7), con los parámetros $r = 1,2$, y desde $d = 135$ píxeles hasta $d = 6$ píxeles. Utilizando el programa `fdc` de Paul Bourke, obtenemos los resultados de la Tabla 1.

Utilizamos el programa R para calcular el ajuste de mínimos cuadrados, devolviéndonos la estimación $D_b = 1,784811$ con un error estándar de 0,01692. Como puede verse en la Figura 8, el ajuste es bastante bueno. Aún

d	$n(d)$	$-\ln d$	$\ln n(d)$
135	30	-4.90527	3.4012
112	48	-4.7185	3.8712
93	71	-4.5326	4.26268
77	97	-4.34381	4.57471
64	127	-4.15888	4.84419
53	186	-3.97029	5.22575
44	261	-3.78419	5.56452
36	374	-3.58352	5.92426
29	572	-3.3673	6.34914
24	804	-3.17805	6.6896
19	1187	-2.94444	7.07918
15	1793	-2.70805	7.49165
12	2577	-2.48491	7.85438
9	4144	-2.19722	8.32942
7	6251	-1.94591	8.7405

Cuadro 1: Resultados para el algoritmo de conteo de cajas para el folio 13 del c3dice Vindobonensis.

así, este resultado es un poco bajo para los estándares de Burkle Elizondo. Es posible que esto se deba a dos razones: la primera es que las páginas de códigos que él tomó corresponden a pictografías concernientes al calendario, y la segunda es que él utilizó un programa comercial para realizar sus mediciones.

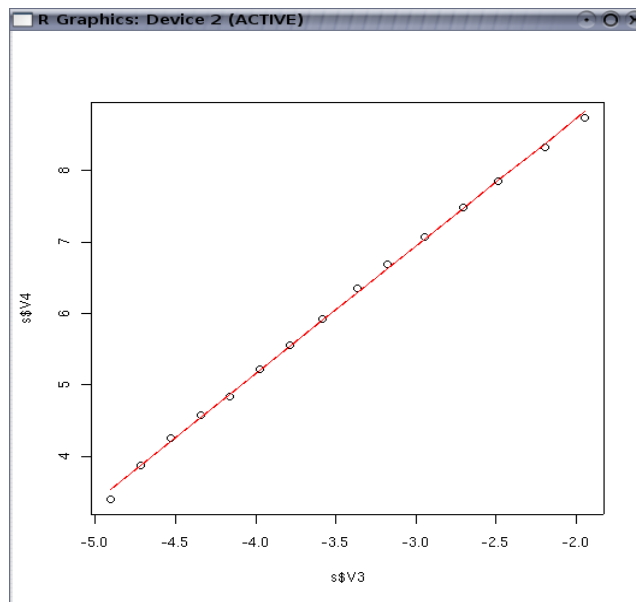


Figura 8: Gráfica de los conteos y el ajuste de mínimos cuadrados para el folio 13 del código Vindobonensis.

A fines de comparación, estimaremos la dimensión fractal de un fragmento de texto (visto como imagen) de una nota periodística reciente, como aparece en la Figura 9. En este caso la estimación de la dimensión fractal es $D_b = 1,646313$ con un error estándar de 0,02956, y en este caso el ajuste no es tan bueno como en el caso del código. Además, la dimensión de capacidad resultó menor que en el caso del código.

En conclusión, podemos considerar que tiene mayor “fractalidad” la imagen proveniente del código que una muestra de texto alfabético visto como imagen.

EFE

Mérida (México) (EFE).- Arqueólogos mexicanos anunciaron el hallazgo de un campo para disputar el juego de pelota maya de 25 siglos de antigüedad, en una zona donde de construcción de viviendas cercana a Mérida, capital del estado de Yucatán.

Los arqueólogos Fernando Acevedo y Donato Martín España, investigadores del Instituto Nacional de Antropología e Historia (INAH), indicaron que esta cancha para jugar a la pelota de 25 metros de largo por 4,5 metros de ancho se encuentra a unos doce kilómetros de Mérida y fue construida en el siglo V antes de Cristo.

Acevedo explicó a la prensa local que la edificación encontrada es más antigua que las fechadas en la zona arqueológica de Chichén Itzá y data del periodo medio, establecido entre los años 400 ó 500 antes de Cristo, que establece como uno de los más sorprendentes hallazgos de esta civilización.

El descubrimiento obligó a las autoridades a modificar el plan de construcción, dijo el director de la Comisión Ordenadora del Uso del Suelo de Yucatán (Cousey), José Carlos Guzmán Alcocer.

Agregó que de las 260 hectáreas liberadas por el INAH al menos 48 de ellas han sido consideradas como áreas verdes o para la construcción de parques arqueológicos en donde se localizan los vestigios mayas.

Acevedo y Martín España indicaron que en la zona se han encontrado más de 2.700 montículos de los cuales al menos 1.500 de ellos han aportado información trascendental sobre la civilización maya.

Figura 9: Texto de prueba.

3.4. La naturaleza fractal

Como puede confirmarse en los códices, los sabios de los antiguos pueblos *ñuu savi* eran acuciosos observadores de la naturaleza. Probablemente esa atención a los fenómenos naturales les reveló algunos de los principios matemáticos que los gobiernan; tuvieron conciencia de la recursividad y autosimilaridad presente en el crecimiento de los vegetales, como lo atestiguan los glifos que aparecen en la Figura 11.

Pero el ejemplo quizá más sorprendente es la manera en la que representaban algunos fluidos como el aire, el humo y el agua. Para ellos el humo y el viento se trasladan en líneas de flujo bien definidas que se bifurcan y reescalán, como puede verse en la Figura 12. Incluso en el perfil de la ola del mar se percibe la autosimilaridad a un nivel de recursión.

Referencias

- [1] ORTIZ, Ignacio y ORTIZ, Reina (eds.) *Pasado y presente de la cultura mixteca*. Universidad Tecnológica de la Mixteca. Huajuapán de León,

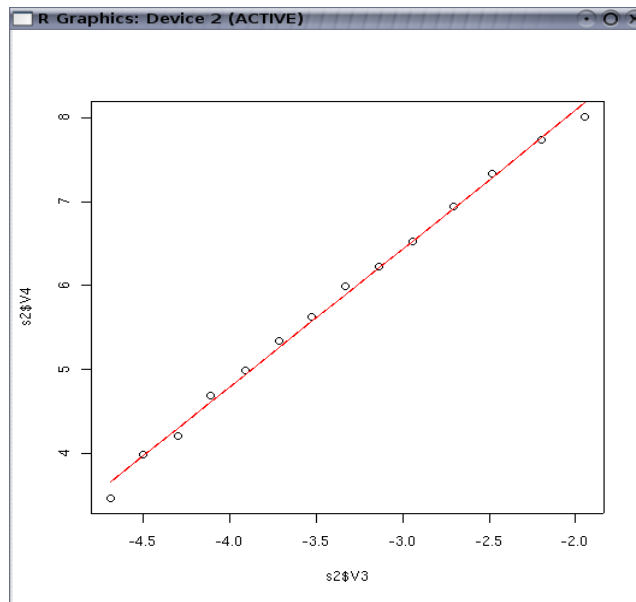


Figura 10: Gráfica de los conteos y el ajuste de mínimos cuadrados para el texto de prueba.

México, 2005.

- [2] BURKE, Paul. *Fractal dimension calculator*.
URL: <http://astronomy.swin.edu.au/~pbourke/fractals>
- [3] BURKLE ELIZONDO, Gerardo. *Análisis fractal de dos estructuras mesoamericanas*.
URL: www.ciu.reduaz.mx/investigacion/Humanisticas/HE06.htm
- [4] CASTELLANOS, Abraham. *Conferencias histórico-pedagógicas*. Ayuntamiento de Mérida. Yucatán, 1917.
- [5] Equipo de desarrollo del núcleo de R. *R: Un lenguaje y entorno para el cómputo estadístico*, la fundación R para el cómputo estadístico, Viena, Austria. ISBN 3-900051-07-0,
URL: <http://www.R-project.org>
- [6] KOSTOVSKY, A. N. *Construcciones geométricas mediante un compás*. Ed. Mir. Moscú, 1980.

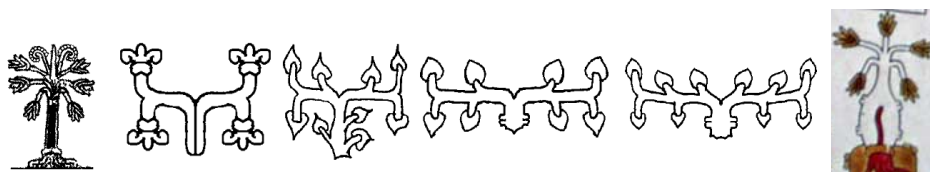


Figura 11: Ejemplos de vegetales recursivos y autosimilares que aparecen en el código Bodley, Selden y Vindobonensis.

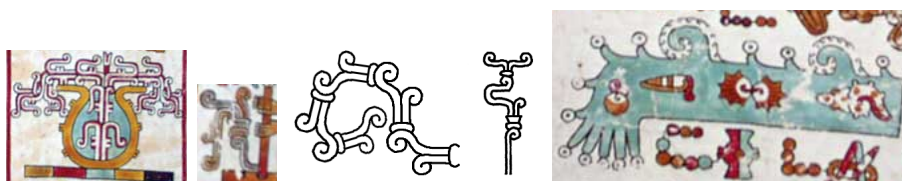


Figura 12: Flujos autosimilares en el código Vindobonensis.

- [7] MIŠÍK, Ladislav y ŽÁČIK, Tibor. *A formula for calculation of metric dimension of converging sequences*. Comment. Math. Univ. Carolinae **31.4** (1999), 393-401.
- [8] PEITGEN, Otto, et al. *Chaos and fractals: new frontiers in science*. Spriger-Verlag, Nueva York, 1992.
- [9] RAMÍREZ BAUTISTA, Francisco Miguel. *Primera visión de la geometría prehispánica*. México Desconocido, No. 219, mayo de 1995.
- [10] VARGAS MENDOZA, José A. *Álgebra abstracta*. Limusa. México, 1986.
- [11] *Códice Vindobonensis*.