# Algunas cuestiones sobre las fracciones continuas

Octavio Alberto Agustín Aquino

21 de marzo de 2006

## 1. Resultados preliminares

Las fracciones continuas son herramientas muy útiles en el análisis y la teoría de números. Para manipularlas, primero tenemos que definirlas.

**Definición 1.** Una fracción continua es una tripla $(\{a_n\}_1^\infty, \{b_n\}_1^\infty, \{w_n\}_1^\infty)$ donde $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ de sucesiones complejas, con $a_n \neq 0$ para $n = 1, 2, \ldots$, y $w_n$ se define como sigue. Si $t_k$ es la transformación

$$t_k(u) = \frac{a_k}{u + b_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

entonces

$$w_n := t_1 \circ \cdots \circ t_n(0), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

A $w_n$ le llamamos $n$-ésimo aproximante de la fracción continua.

Si al cociente $\frac{x}{y}$ lo escribimos como el vector $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^T$ vemos que cada $t_k$ es equivalente a la matriz

$$M_k = \begin{pmatrix} 0 & a_k \\ 1 & b_k \end{pmatrix}$$

pues

$$\begin{pmatrix} 0 & a_k \\ 1 & b_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k \\ u + b_k \end{pmatrix}.$$

De la definición es evidente que $w_n$ es equivalente al valor de

$$M_{1,n} = M_1 \cdots M_{n-1} M_n \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Escribamos a la matriz $M_{1,n}$ como

$$M_{1,n} = \begin{pmatrix} r_m & p_m \\ s_m & q_m \end{pmatrix};$$

tenemos por construcción que

$$M_{1,n} = M_{1,n-1} M_n = \begin{pmatrix} r_{n-1} & p_{n-1} \\ s_{n-1} & q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_n \\ 1 & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n-1} & a_n r_{n-1} + b_n p_{n-1} \\ q_{n-1} & a_n s_{n-1} + b_n q_{n-1} \end{pmatrix}$$

y entonces

$$r_n = p_{n-1}, \quad s_n = q_{n-1},$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} p_n &= a_n r_{n-1} + b_n p_{n-1} = a_n p_{n-2} + b_n p_{n-1}, \\ q_n &= a_n s_{n-1} + b_n q_{n-1} = a_n q_{n-2} + b_n q_{n-1}, \end{aligned}$$

y que en notación matricial es simplemente

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n-2} & p_{n-1} \\ q_{n-2} & q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M_{1,n-1} \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}^T. \tag{2}$$

Como $M_{1,n} = I M_{1,n}$, tiene sentido definir

$$M_0 = \begin{pmatrix} p_{-1} & p_0 \\ q_{-1} & q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

lo que hace que la recurrencia (2) tenga sentido para $n \geq 1$.

Tenemos que

$$M_{1,n} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}^T,$$

y a $p_n$ y $q_n$ los llamamos $n$-ésimo denominador y numerador de la fracción continua. Es claro que

$$w_n = \frac{p_n}{q_n}.$$

Resumimos todo lo anterior en el siguiente resultado.

**Teorema 1.** *Sea $t_k$ como en la ecuación* (1). *Entonces para $n \geq 1$ la transformación*

$$t_{1,n} := t_1 \circ \cdots \circ t_n$$

*está asociada a la matriz*

$$M_{1,n} = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{pmatrix}$$

*donde $p_n$ y $q_n$ están definidas a través de las ecuaciones* (2) *y* (3)*. Además,*

$$w_n = \frac{p_n}{q_n}.$$

## 2. Aplicaciones de la teoría

Hemos visto que el enfoque matricial nos ha dado una recursión para un cálculo efectivo del $n$-ésimo aproximante de una fracción continua. Pero vamos a obtener un poco más: en virtud de la identidad

$$\det M_{1,n} = \det M_1 \det M_2 \cdots \det M_n$$

resulta que

$$p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1} = (-1)^n a_1 \cdots a_n;$$

dividendo esto último entre $q_{n-1}q_n$ si es posible, nos conduce a

$$w_n - w_{n-1} = (-1)^{n+1} \frac{a_1 \cdots a_n}{q_{n-1}q_n}.$$

Definiendo $w_0 = 0$ y $q_0 = 1$ y sumando desde $n = m$ hasta $n = 1$, llegamos a una importante relación:

$$w_m = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \frac{\prod_{\ell=1}^{k} a_\ell}{q_{k-1}q_k},$$

La transformación $t_m$ puede escribirse equivalentemente como

$$t_m(u) = \frac{d_m a_m}{d_m b_m + d_m u}$$

donde $\{d_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de números complejos no nulos. Más aún, definiendo

$$s_m(u) = \frac{d_m a_m}{d_m b_m + u}$$
$$r_m(u) = d_m u$$

tenemos que $t_m = s_m \circ r_m$ y adicionalmente

$$t_1 \circ \cdots \circ t_m = s_1 \circ r_1 \circ \cdots \circ s_m \circ r_m = s_1 \circ (r_1 \circ s_2) \circ \cdots \circ (r_{m-1} \circ s_m) \circ r_m,$$

entonces

$$t_m^*(u) := r_{m-1} \circ s_m(u) = \frac{d_{m-1} d_m a_m}{d_m b_m + u}$$

y ya que $r_m(0) = 0$, se sigue que

$$w_m = t_1 \circ t_2 \circ \cdots \circ t_m(0) = t_1^* \circ \cdots \circ t_m^*(0).$$

Llegamos a otra relación importante: si remplazamos las sucesiones $\{a_m\}$ y $\{b_m\}$ por

$$\{d_{m-1} d_m a_m\}, \quad \{d_m b_m\} \tag{4}$$

respectivamente (y definiendo $d_0 := 1$), obtenemos una fracción continua con la misma sucesión de aproximantes. Dos fracciones continuas con dicha propiedad se dicen equivalentes.

Ahora estamos en posición de examinar qué sucede con las sucesiones

$$\begin{aligned} a_1 &= c_1, & a_k &= -c_k/c_{k-1}, \\ b_1 &= 1, & b_k &= 1 + c_k/c_{k-1}, \end{aligned}$$

donde $c_k \neq 0$. Primeramente:

$$(-1)^{n+1} a_1 \cdots a_n = c_n,$$

y además $q_2 = a_2 q_0 + b_2 q_1 = a_2 + b_2 b_1 = 1$. Por lo tanto, suponiendo que $q_{k-1} = q_{k-2} = 1$, entonces $q_k = 1$ por las relaciones de recurrencia. Luego $q_{k-1} q_k = 1$ para $k \geq 1$. Entonces tenemos un resultado debido a Euler,

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} c_n.$$

Usando esto para los números $c_n = z^n/n!$, vemos que

$$\begin{aligned} a_1 &= z, & a_k &= -z/k, \\ b_1 &= 1, & b_k &= 1 + z/k, \end{aligned}$$

y esto, además, es equivalente a

$$\begin{aligned} a_1 &= z, & a_k &= -(k-1)z, \\ b_1 &= 1, & b_k &= k+z, \end{aligned}$$

utilizando la sucesión $d_k = k$ en (4).

De aquí que

$$e^z = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + \cfrac{z}{1 - \cfrac{1 \cdot z}{2 + z - \cfrac{2 \cdot z}{3 + z - \cdots}}},$$

y en particular, cuando $z = 1$,

$$e = 1 + \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{2}{4 - \cfrac{3}{5 - \cdots}}}},$$

y cuando $z = -1$,

$$1 - \frac{1}{e} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \dots}}}}},$$

de donde es fácil concluir que

$$\frac{e}{e-1} - 1 = \frac{1}{e-1} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \dots}}}.$$

Todo esto funciona bien para $e$. Probemos para $\pi$. Sabemos que si $|z| \leq 1$, entonces

$$\arctan z = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}$$

y según el resultado de Euler,

$$\begin{aligned} a_1 &= x, & a_k &= -\frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}/(2k-1)}{(-1)^{k-2}x^{2k-3}/(2k-3)} = \frac{2k-3}{2k-1}x^2, \\ b_1 &= 1, & b_k &= 1 + \frac{2k-3}{2k-1}x^2, \end{aligned}$$

tomando $d_k = 2k-1$, nos lleva a los coeficientes

$$\begin{aligned} a_1 &= x, & a_k &= (2k-3)^2 x^2, \\ b_1 &= 1, & b_k &= 2k-1+(2k-3)x^2, \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\arctan x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{1 \cdot x^2}{3 - x^2 + \cfrac{9 \cdot x^2}{5 - 3x^2 + \cfrac{25 \cdot x^2}{7 - 5x^2 + \dots}}}}.$$

Ya que $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, tenemos

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \dots}}}}.$$

# 3. La fracción elegante de Euler

Consideremos a la fracción continua simple

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}$$

que denotaremos como

$$[a_1, a_2, a_3, \ldots],$$

sabemos por las recurrencias (2) y (3) que

$$p_n = p_{n-2} + a_n p_{n-1}, \quad q_n = q_{n-2} + a_n q_{n-1}.$$

Euler descubrió, en 1774, la particularmente bella expresión

$$e - 2 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}},$$

que más sucintamente es

$$e - 2 = [1, 2, 1, 1, 4, 1, \ldots, 1, 2n, 1, \ldots],$$

y que probaremos ahora, siguiendo a Cohn [1]. De la fracción continua anterior fácilmente se siguen las recurrencias para $n \geq 0$

$$\begin{aligned} p_{3n+1} &= p_{3n-1} + p_{3n}, & q_{3n+1} &= q_{3n-1} + q_{3n}, \\ p_{3n+2} &= p_{3n} + 2n p_{3n+1}, & q_{3n} &= q_{3n} + 2n q_{3n+1}, \\ p_{3n+3} &= p_{3n+1} + p_{3n+2}, & q_{3n+3} &= q_{3n+1} + q_{3n+2}. \end{aligned}$$

**Lema 1.** *Dados los números*

$$\begin{aligned} A_n &= \int_0^1 \frac{x^n (x-1)^n}{n!} e^x \, dx, \\ B_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1} (x-1)^n}{n!} e^x \, dx, \\ C_n &= \int_0^1 \frac{x^n (x-1)^{n+1}}{n!} e^x \, dx, \end{aligned}$$

*para $n \geq 0$ se satisfacen las relaciones*

$$\begin{aligned}
A_n &= q_{3n-2}(e-2) - p_{3n-2},\\
B_n &= p_{3n-1} - q_{3n-1}(e-2),\\
C_n &= p_{3n} - q_{3n}(e-2).
\end{aligned}$$

*definiendo $p_{-2} = -1$ y $q_{-2} = 1$.*

*Demostración.* Integrando por partes la expresión para $A_n$, tenemos

$$A_n = -\int_0^1 \frac{x^{n-1}(x-1)^n e^x}{(n-1)!} - \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^{n-1}e^x}{(n-1)!} = -C_{n-1} - B_{n-1}, \tag{5}$$

y ahora examinamos la derivada

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n(x-1)^{n+1}}{n!}e^x\right) &= \frac{x^n(x-1)^{n+1}}{n!}e^x + \frac{nx^{n-1}(x-1)^{n+1}}{n!}e^x +\\
&\quad \frac{(n+1)x^n(x-1)^n}{n!}e^x\\
&= \frac{x^n(x-1)^{n+1}}{n!}e^x + \frac{2nx^n(x-1)^n}{n!}e^x\\
&\quad - \frac{nx^{n-1}(x-1)^n}{n!}e^x + \frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x\\
&= \frac{x^{n+1}(x-1)^n}{n!}e^x + 2n\frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x\\
&\quad - \frac{x^{n-1}(x-1)^n}{(n-1)!}e^x,
\end{aligned}$$

que puede integrarse en el intervalo $[0,1]$ y obtenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}(x-1)^n}{n!}e^x\,dx + 2n\int_0^1 \frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x\,dx\\
&\quad - \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x-1)^n}{(n-1)!}e^x\,dx\\
&= B_n + 2nA_n - C_{n-1}.
\end{aligned}$$

que implica

$$B_n = -2nA_n + C_{n-1}. \tag{6}$$

Por último,

$$A_n - B_n = (p_{3n+1} + p_{3n+2}) - e(q_{3n+2} + q_{3n+1}) \qquad (7)$$
$$= p_{3n+3} - q_{3n+3}e = C_n.$$

Finalmente

$$A_0 = \int_0^1 e^x\,dx = e - 1 = q_{-2}(e-2) - p_{-2}$$
$$B_0 = \int_0^1 xe^x\,dx = 1 = p_{-1} - q_{-1}(e-2)$$
$$C_0 = \int_0^1 (x-1)e^x = \int_0^1 xe^x - \int_0^1 e^x$$
$$= 2 - e = p_0 - q_0(e-2),$$

que junto con las recurrencias (5), (6) y (7) implican el lema. □

**Teorema 2.** *Se satisface* $e - 2 = [1, 2, 1, \ldots, 1, 2n, 1, \ldots]$.

*Demostración.* Claramente $A_n$, $B_n$ y $C_n$ tienden a 0 conforme $n \to \infty$. Por el Lema 1 se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} q_k(e-2) - p_k = 0,$$

y como $q_k > 0$ cuando $k \geq 1$, se sigue que

$$e - 2 = \lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{q_k} = [1, 2, 1, \ldots, 1, 2n, 1, \ldots]. \qquad \square$$

# Referencias


[1] COHN, Henry. *A short proof of the simple continued fraction expansion of e*. American Mathematical Monthly, 2006, pp. 57-62.

[2] HENRICI, Peter. *Applied and computational complex analysis*. Vol. II, Wiley, 1977.