Cuadrados mágicos de orden impar

Octavio Alberto Agustín Aquino

4 de junio de 2005

1. Preeliminares

Notación. Hacemos las siguientes convenciones:

1. Por n denotaremos a un entero impar positivo.
2. P_m denota al grupo de matrices de permutación de $m \times m$.
3. Q_n denota al elemento de P_n con todas las entradas de su supradiagonal iguales a uno. Por ejemplo

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; Q_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ etc.}$$

   Nótese que Q_n tiene siempre en su esquina inferior izquierda un uno.

4. R_n denota a la matriz simétrica de $n \times n$ cuya primera fila es $0, 1, 2, \ldots, (n-1)$ y cuyas siguientes columnas son transposiciones sucesivas, por ejemplo

$$R_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observación. Lo siguiente será útil en las demostraciones.

1. Q_n tiene orden multiplicativo n (esto es, $Q_n^n = I_n$) y ningún par de potencias $0 \leq i < j \leq n-1$ tiene un uno en la misma entrada.
2. Si en una matriz arbitraria $A = (a_{kl})$ las n diagonales de izquierda a derecha son los n vectores

$$(a_{1,1+t}, a_{2,2+t}, \ldots, a_{n-t,n}, a_{n-t+1,1}, \ldots, a_{n,t}),\ t = 0, \ldots, (n-1),$$

   entonces cada entero del 0 al $(n-1)$ ocurre en cada una de las n diagonales de $A + R_n$.

2. Algoritmo de construcción

Una matriz $n \times n$ cuyas entradas consisten en los enteros del 1 al n^2 se llama cuadrado mágico si las sumas de sus columnas y filas son iguales. Es fácil construir cuadrados mágicos de orden impar, y una pequeña variación al siguiente algoritmo permite construir algunos de orden par.

Teorema 1. *La matriz $M_n = [\sum_{i=0}^{n-1}(ni+1)Q_n^i] + R_n$ es un cuadrado mágico de orden n.*

Demostración. Basta probar que la suma de las filas y las columnas de M_n es $n(n^2+1)/2$ y que cada entero del 1 al n^2 ocurre como entrada de M_n.

Por la observación 1, las sumas en las columnas y filas de $\sum_{i=0}^{n-1}(ni+1)Q_n^i$ son $\sum_{i=0}^{n-1}(ni+1)$, y las de R_n son claramente $\sum_{i=0}^{n-1} i$ por construcción. Entonces las sumas en las filas y columnas de M_n son

$$\sum_{i=0}^{n-1}[(ni+1)+i] = (n+1)\sum_{i=0}^{n-1} i + \sum_{i=0}^{n-1} 1 = \frac{(n+1)(n-1)n}{2} + n = \frac{n(n^2+1)}{2},$$

como se pedía.

Como la t-ésima diagonal de izquierda a derecha de R_n (contando desde el inicio izquierdo con 0) se suma a la t-ésima diagonal correspondiente de $\sum_{i=0}^{n-1}(ni+1)Q_n^i$ (que consiste justamente en las entradas no nulas de $(nt+1)Q_n^t$), la t-ésima diagonal de M_n recorre un sistema de residuo completo módulo n, según la observación 2. Las entradas de la t-ésima diagonal caen entre $(nt+1)$ y $n(t+1)$, así que ocurren todos enteros los entre 1 y n^2 en M_n. Esto termina la demostración. ■

Ejemplo 1.

$$\begin{aligned}
M_3 &= I_3 + 4Q_3 + 7Q_3^2 + R_3, \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_5 &= I_5 + 6Q_5 + 11Q_5^2 + 16Q_5^3 + 21Q_5^4 + R_5 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 7 & 13 & 19 & 25 \\ 22 & 3 & 9 & 15 & 16 \\ 18 & 24 & 5 & 6 & 12 \\ 14 & 20 & 21 & 2 & 8 \\ 10 & 11 & 17 & 23 & 4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Puesto que la permutación de filas o columnas no altera las sumas, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2. *Si M es un cuadrado mágico de $m \times m$ y $P \in P_m$, entonces PM y MP son cuadrados mágicos de orden m.*

El cuadrado M_n no es mágico en sus dos diagonales principales. Nos interesaría, por supuesto, saber si entre la órbita de M_n bajo P_n (esto es, $\{PM_n : P \in P_m\}$) existe algún cuadrado que satisfaga dicho requisito. Así es, en efecto, y puede hallarse de forma explícita.

Definamos T_n como la suma directa en bloques de las matrices $P_{(n+1)/2}$ y $P_{(n-1)/2}$ que tengan unos a lo largo de su antidiagonal, y coloquemos la de orden mayor en la esquina superior izquierda de T_n, por ejemplo,

$$T_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $T_n \in P_n$, tenemos el siguiente

Teorema 3. . *El cuadrado mágico $T_n M_n$ es mágico en sus diagonales también.*

Demostración. . Un inspección de M_n revela que los n números

$$\frac{n+1}{2}, \frac{3n+1}{2}, \frac{5n+1}{2}, \ldots, \frac{(2n-1)n+1}{2}$$

ocurren en la diagonal $(n+1)/2$ de izquierda a derecha y que los números

$$\frac{n(n-1)}{2}+1, \frac{n(n-1)}{2}+2, \ldots, \frac{n(n+1)}{2}$$

ocurren en la diagonal $(n+1)/2$ de derecha a izquierda. La suma de cada conjunto de números es la requerida $n(n^2+1)/2$ y un simple cómputo muestra que bajo T_n se transforman en las diagonales principales. Nótese que una de las diagonales posee los números consecutivos del $\frac{n(n-1)}{2}+1$ al $\frac{n(n+1)}{2}$. ∎

Como una ilustración, considérense

$$T_3 M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

y

$$
\begin{aligned}
T_5 M_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 13 & 19 & 25 \\ 22 & 3 & 9 & 15 & 16 \\ 18 & 24 & 5 & 6 & 12 \\ 14 & 20 & 21 & 2 & 8 \\ 10 & 11 & 17 & 23 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 18 & 24 & 5 & 6 & 12 \\ 22 & 3 & 9 & 15 & 16 \\ 1 & 7 & 13 & 19 & 25 \\ 10 & 11 & 17 & 23 & 4 \\ 14 & 20 & 21 & 2 & 8 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

La construcción de estos cuadrados es sencilla, pues las matrices que se suman puede ser fácilmente implementada en una computadora.

Para construir cuadrados mágicos de orden par igual a $2n$ basta colocar bloques apropiadamente ordenados de 2×2 con elementos entre $4(i-1)$ y $4(i-1)+4$ en la posición donde i ocurre en el cuadrado construído previamente.

Referencias

[1] C. R. Johnson, *A matrix theoretic construction of magic squares*, The American Mathematical Monthly, Noviembre de 1972. 1004-1006.