Introducción a la Relatividad especial

José Gabriel Abreu

4 de diciembre de 2004

Índice

1. Introducción

Sin darnos cuenta a veces en la vida cotidiana pensamos de forma relativista, como cuando alguien pregunta ¿Qué tan lejos queda Caracas? y uno responde “ como 12 horas”; en ese momento estamos pensando en la velocidad de los vehículos en los que viajamos. Así mismo funciona la teoría especial de la relatividad, donde se piensa en otra velocidad, la de la luz.

El propósito de estas notas es dar una introducción a los conceptos básicos de la relatividad especial, tal como la noción de tiempo y espacio, de una forma gráfica y sencilla. Con las ideas de tiempo y distancia estableciadas, se introduce un poco la notación covariante de la teoría, la cual es una herramienta de mucha utilidad para la misma.

1.1. Antecedentes Históricos

Antes de la relatividad especial las leyes de Newton y las transformaciones de Galileo eran el modelo para describir el movimiento de las partićulas y otros fenómenos naturales.

En la física Newtoniana no existe un límite para la velocidad que puede alcanzar un cuerpo, siempre y cuando estuviese actuando sobre él una fuerza, lo cual experimentalmente no es cierto y se ha comprobado para partículas cargadas aceleradas por campos magnéticos (como un electrón).

Otro aspecto resaltante de la cinemática pre-relativista son las simetrías de las leyes Newton, estas son covariantes al grupo de Galileo; lo que quiere decir que los vectores se definen con estas transformaciones. Dicho grupo esta conformado como sigue

Traslaciones espaciales (3)	$x \to x' = x + a$
Traslación temporal (1)	$t \to t' = t + b$
Rotaciones (3)	$x^i \to x'^{i'} = R^{i'}_j x^j$
Transformaciones de Galileo(3)	$x^i \to x^{i'} = x^i - V^i_0 t$

Este grupo de 10 simetrías establecen los vectores en la física Newtoniana.

Por otra parte, la teoría electromagnética no es compatible con la mecánica de Newton. El electromagnetismo, como lo formuló Maxwell, no es inveriante bajo las transformaciones de Galileo, por lo que alguna debió ser corregida. Además, de la teoría electromagnética se deduce que la velocidad de la luz es constante.

Es conocido como un experimento para medir la velocidad de la luz originó el desarrollo de la teoría que estamos exponiendo. El experimento de Michelson-Morley indicaba que la velocidad de la luz es constante, sin importar donde se mida, lo cual es contradictorio con las transformaciones de Galileo.

2. Postulados de la Relatividad Especial

En un trabajo titulado "Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento", Albert Einstein escribió lo que luego sería interpretado como los postulados de la teoría especial de la Relatividad. Estos dos postulados tienen la suficiente contundencia, en su simplicidad, como para ser la base de una de las teorías más existosas.

Los postulados de la relatividad son:

1. Las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas inerciales. No hay sistema inercial preferido.

2. La velocidad de la luz en el vacio tiene el mismo valor c en todos los sistemas inerciales.

Estas premisas de la teoría tienen en sí ideas radicales con respecto a la relatividad de Galileo y veremos como del par de postulados se desprenden las bases de la relatividad especial.

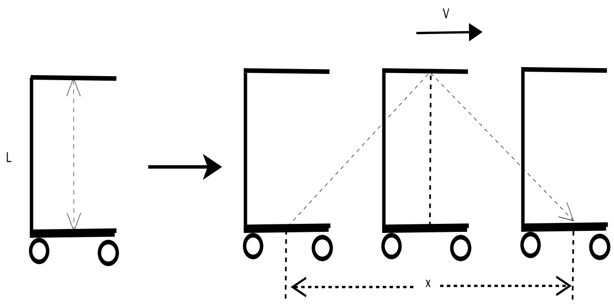

Figura 1: Reloj Fotónico

3. El Reloj fotónico

De los postulado de la relatividad especial se tiene que la velocidad de la luz es una constante universal (c), por lo que es interesante ver el caso del reloj fotónico.

En un reloj fotónico un haz de luz choca entre dos espejos separados a una cierta distancia (L), entonces el tiempo que tarda en ir del primer espejo, chocar con el segundo y volver es el periodo del reloj

$$\triangle\tau = \frac{2L}{c} \tag{1}$$

Ahora, si el reloj esta moviendose a una velocidad (V) se puede ver en la figura como la trayectoria del haz de luz es más larga para el observador que esta en reposo. De la misma figura, mediante simple geometría, se obtiene que el periodo calculado por el observador en reposo es

$$\Delta t = \frac{2\sqrt{L^2 + (x/2)^2}}{c}, \tag{2}$$

donde $x = V\Delta t$, luego

$$\Delta t^2 = \frac{4L^2}{c^2} + \frac{V^2}{c^2}\Delta t^2 \Rightarrow \Delta t^2 = \frac{2L/c}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \tag{3}$$

notemos que numerador de la última ecuación es el periodo medido por un observador que se mueve con el reloj, por lo tanto

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{4}$$

Inmediatamente se observa que el periodo medido por el observador comóvil es diferente al medido por el observador en reposo, más aún, el observador en reposo mide un periodo menor al medido por el observador comóvil.

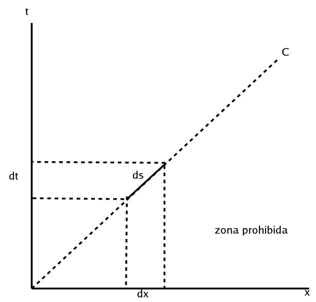

Figura 2: Diagrama espacio-tiempo

4. Diagramas espacio-tiempo

Una herramienta de mucha ayuda para visualizar la diferencia de la relatividad espacial para con la geometria Euclidea, son los diagramas espacio-tiempo. En (1+1) dimensiones (1 temporal y otra espacial) es sencillo representar dicho diagrama, en principio el eje temporal se coloca en la vertical y el espacial en la horizontal.

En la figura 2, vemos como en el diagrama se muestran el ds y la trayectoria de un haz de luz (linea punteada), la cual es una recta de pendiente 1. El ds en la figura corresponde al de un fotón, por lo que

$$\frac{dx^2}{dt^2} = c^2, \tag{5}$$

pero esta sobre una recta $t = x$, por lo que resulta natural utilizar unidades tales que $c = 1$, o unidades relativistas, las cuales usaremos de aquí en adelante.

Notemos que al ser c la velocidad máxima, la zona (en la figura) por debajo de la recta punteada no puede ser "habitada"por partículas con masa.

Otro ejemplo de la utilidad de los diagramas espacio-tiempo es el de resolver problemas de forma más visual. Por ejemplo, supongamos que un observador inercial S' se mueve con velocidad V en la dirección x con respecto a un observador S; S' lleva consigo una regla de longitud propia (medida en un sistema comóvil a la regla) L, calculemos la longitud que S le atribuye.

En la figura 3, inmediatemente notamos que para el observador S', la regla es un evento sin dimensión temporal, mientras que para el observador S esta tiene asociada coordenadas espaciales y temporales. Entonces el ds' lo escirbimos como

$$ds'^2 = dt'^2 - dx'^2\,,\; dt' = 0\,, dx' = L' \Rightarrow\; ds'^2 = -L'^2. \tag{6}$$

Por otra parte, para el observador S

$$ds^2 = dt^2 - dx^2\,, V = \frac{dx}{dt}\,, dx = L \Rightarrow\; ds^2 = \frac{dx^2}{V^2} - dx^2, \tag{7}$$

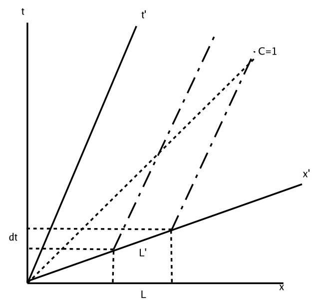

Figura 3: Diagrama de dos observadores S y S'

luego

$$\begin{aligned} ds'^2 = ds^2 \quad &\Rightarrow \quad -L'^2 = \frac{dx^2}{V^2} - dx^2 \\ &\Rightarrow \quad L = \frac{-V^2 L'}{\sqrt{1-V^2}} \end{aligned} \tag{8}$$

Por lo tanto para el observador S, la regla de S' no es una regla muy adecuada.

5. Equivalencia entre observadores

Los dos postulados de la teoría nos indican que para diferentes observadores las leyes de la naturaleza son inmutables, incluyendo la constancia de la velocidad de la luz. Entonces si un observador (S) mide la velocidad de la luz como

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = 1 \Rightarrow \Delta t^2 = \Delta x^2 \Rightarrow \Delta t^2 - \Delta x^2 = 0, \tag{9}$$

otro observador (S') debe medirla de forma similar

$$\Delta t'^2 - \Delta x'^2 = 0, \tag{10}$$

pero ambos observadores deben coinsidir en la magnitud de dicha velocidad, por lo tanto

$$\Delta t^2 - \Delta x^2 = \Delta t'^2 - \Delta x'^2. \tag{11}$$

De forma infinitesimal, lo anterior se escribe como

$$ds^2 = ds'^2 \quad , \quad ds^2 = dt^2 - dx^2 \tag{12}$$

Lo anterior se puede generalizar para las otras dimensiones espaciales como

$$ds^2 = \eta_{00} dt^2 + \eta_{11} dx^2 + \eta_{22} dy^2 + \eta_{33} dz^2, \tag{13}$$

donde η_{ab} es la métrica de Minkowski, y viene dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$ds^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b \quad , \quad x^0 = t \, , x^1 = x \, , x^2 = y \, , x^3 = z. \tag{14}$$

El ds es "la regla" con la cual cada observador mide la distancia, y esta regla es equivalente entre los diferentes observadores. Obviamente la forma de medir en relatividad es diferente a la utilizada en geometría Euclideana, donde en lugar de utilizar η_{ab} se usa δ_{ab}.

6. Espacio de Minkowski

Ya conocemos la métrica para la relatividad especial, ahora definiendo un grupo de transformaciones podemos establecer vectores en nuestro espacio Minkowskiano. Como vimos antes, el tiempo no es un invariante de la teoría, si no que cambia, tal como la componente de un vector.

El grupo de covariancia de la relatividad especial es el grupo de las transformaciones de Lorentz (Λ^a_b), que para un observador que se mueve con velocidad V, respecto a otro en la dirección x se pueden expresar por la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} & \frac{-V}{\sqrt{1-V^2}} & 0 & 0 \\ \frac{V}{\sqrt{1-V^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego, la métrica del observador en movimiento, escrita en función del observador en reposo es

$$\eta_{k'm'} = \Lambda^a_{k'} \Lambda^b_{m'} \eta_{ab}. \tag{15}$$

Las transformaciones de Lorentz es el grupo (de transformaciones) que define los vectores en el espacio Minkowskiano. Notemos que un vector clásico deja de ser un vector en relatividad especial, ya que se contrae bajo las transformaciones de Lorentz.

6.1. 4-vectores

Ahora que sabemos cuales son las transformaciones que moldean la teoría, y como transforma la métrica que sube y baja los índices, podemos ver como son los vectores en relatividad especial.

Los 4-vectores serán aquellos cuyas componentes cambian como

$$x^a \to x^{a'} = \Lambda^{a'}_b x^b. \tag{16}$$

Sí tenemos dos 4-vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, cuyas componentes cambian como

$$\begin{aligned} A^a \rightarrow A^{a'} = \Lambda^{a'}_b A^b \\ B^a \rightarrow B^{a'} = \Lambda^{a'}_b B^b, \end{aligned} \tag{17}$$

el producto escalar entre ellos viene dado como

$$\eta_{ab} A^a B^b = \eta_{k'm'} A^{k'} B^{m'} = \Lambda^a_{k'} \Lambda^b_{m'} \eta_{ab} \Lambda^{k'}_a A^a \Lambda^{m'}_b B^b, \tag{18}$$

donde $\Lambda^{k'}_a$ es la transformación inversa a $\Lambda^a_{k'}$, por lo tanto

$$\Lambda^{k'}_a \Lambda^a_{k'} = \mathbf{1} \tag{19}$$

y el producto escalar es un invariante de la teoría, como es de esperarce.

Ahora si tenemos un 4-vector cualquiera u se puede escribir en sus componentes (u^0, u^1, u^2, u^3), y en el sistema propio del vector sus componentes son $(t, 0, 0, 0)$.

6.2. 4-velocidad y 4-aceleración

Ahora nos concierne ver qué es la velocidad como 4-vector. $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ no es un 4-vector, ya que el denominador no es un escalar, entonces se debe usar una cantidad invariante en su lugar, como Δs, el cual se escribe en función de Δt como

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &= \Delta t^2 - \Delta x^2, V = \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ \Rightarrow \Delta s^2 &= \Delta t^2 - V^2 \Delta t^2 \Rightarrow \Delta s = \sqrt{1 - V^2} \Delta t, \end{aligned} \tag{20}$$

luego, usamos Δs para derivar con respceto al tiempo, agregando el término de la última ecuación. Las componentes de la 4-velocidad son

$$u^a = \frac{\Delta x^a}{\Delta s} \Rightarrow u = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - V^2}}, \frac{V_x}{\sqrt{1 - V^2}}, \frac{V_y}{\sqrt{1 - V^2}}, \frac{V_z}{\sqrt{1 - V^2}} \right). \tag{21}$$

Haciendo $|u|^2 = u^a u_a$, tenemos que

$$|u|^2 = \eta_{ab} u^a u^b = \frac{1}{1 - V^2} - \frac{V_x^2}{1 - V^2} - \frac{V_y^2}{1 - V^2} - \frac{V_z^2}{1 - V^2}, \tag{22}$$

donde V es el vector velocidad clásico, por lo que $\overrightarrow{V} = (V_x, V_y, V_z) \Rightarrow V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$, entonces

$$|u|^2 = \frac{1}{1 - V^2} - \frac{V^2}{1 - V^2} \Rightarrow \eta_{ab} u^a u^b = 1. \tag{23}$$

El resultado obtenido es que la 4-velocidad es de módulo normalizado, es unitaria. Esto también se puede ver si escribimos las componentes la 4-velocidad en el sistema propio $(1, 0, 0, 0)$.

De forma natural podemos definir la 4-aceleración como $a = \frac{du}{ds}$ y las componentes serán

$$a = \left(\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\sqrt{1-V^2}}\right), \frac{d}{ds}\left(\frac{V^i}{\sqrt{1-V^2}}\right)\right)$$

$$\Rightarrow a = \left(\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{V}}{(1-V^2)^2}, \frac{(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{V})\overrightarrow{V}}{(1-V^2)^2} + \frac{\overrightarrow{a}}{1-V^2}\right) \tag{24}$$

Vi son las componentes del vector $\overrightarrow{V}$.

Sí calculamos el módulo (ejercicio) de a, tenemos que

$$\eta_{ab}a^a a^b = -|\overrightarrow{a}|^2, \tag{25}$$

lo cual es válido para todo sistema. Otro ejercicio calcular el producto escalar entre la 4-velocidad y la 4-aceleración

$$V \cdot a = \eta_{ab}V^a a^b = 0. \tag{26}$$

6.3. 4-momento

Para construir el 4-momento (P) podemos recurrir a la definición clásica de momento ($\overrightarrow{P}$), donde la velocidad es multiplicada por la masa del cuerpo, entonces

$$P = mu \Rightarrow P = \left(\frac{m}{\sqrt{1-V^2}}, \frac{m\overrightarrow{V}}{\sqrt{1-V^2}}\right) = (\mathcal{E}, \overrightarrow{p}), \tag{27}$$

donde $\mathcal{E}$ es la energía relativista (notemos que no es un escalar, es una componente) y $\overrightarrow{p}$ es el momento semi-relativista. El módulo de P es

$$p \cdot p = \frac{m^2}{1-V^2} - \frac{m^2V^2}{1-V^2} = m^2, \tag{28}$$

lo cual no da la ecuación

$$\mathcal{E}^2 - \overrightarrow{p}^2 = m^2 \Rightarrow \mathcal{E} = \pm\sqrt{\overrightarrow{p}^2 + m^2}, \tag{29}$$

que para una partícula en reposo ($\overrightarrow{p} = 0$) queda como (recordando que $c = 1$)

$$\mathcal{E} = m \rightarrow \mathcal{E} = mc^2. \tag{30}$$

En una formulación Lagrangeana de la relatividad especial, el 4-momento, la energía y otras cantidades de impotancia son deducidas a partir de un principio variacional.