Problemario de Tensores 1

Oscar Castillo-Felisola*

June 13, 2005

Abstract

Los siguientes son un conjunto de problemas propuestos para el curso de Metodos Matemáticos para física, en el área de cálculo tensorial.

Dirección

- Los ejercicios son de dos tipos, de condicionamiento de la notación y problemas.
- Los problemas son los que serán evaluados y son problemas tipo examen.
- ADVISE: mejor intenten los ejercicios de calentamiento antes de resolver los problemas tipo, pues hay una cantidad de trucos que pueden ser útiles.
- Desde el viernes (3-10-05) se dará un plazo de 7 días para la entrega de la misma.
- Se aceptan preguntas... incluso vía e-mail.

Problemas de Condicionamiento

1. En espacio euclídeo $\mathbb{E}^n$, no existe diferencia entre las componentes covariantes y contravariantes de un vector, $V^a = V_a$, escriba explícitamente (en componentes) el producto escalar de vectores para $n = 4$. Recuerde que el producto escalar de vectores se define como $\vec{A} \cdot \vec{B} = A^i B_i$.
2. Para un espacio n-dimensional arbitrario, $\vec{A} \cdot \vec{B} = A^i B_i = g_{ij} A^i B^j$. Escriba el producto escalar de vectores explícitamente para $n = 3$
3. ¿Cuantas componentes independientes tiene un tensor de rango dos que es
   - arbitrario
   - simétrico?
   - antisimétrico?

*o.castillo.felisola@gmail.com

4. Un tensor de rango 3, se descompone en cuatro piezas, una totalmente simétrica, una totalmente antisimétrica, una simétrica en los dos primeros y antisimétrica en los dos últimos, y finalmente una que es antisimétrica en los dos primeros y simétrica en el primero y tercero. Muestre lo dicho anteriormente al escribir las cantidades explícitamente y sumarlas. (al igual que como se hizo en clases para el tensor de rango 2).

5. Note que el ϵ de Levi-Civita es el tensor totalmente antisimétrico de rango igual a la dimensión del espacio. Muestre que un tensor totalmente antisimétrico de rango $p > n$ es idénticamente cero. Hint: recuerde que un tensor totalmente antisimétrico es cero si al menos dos de sus índices son iguales.

6. ¿Cuantas componentes tiene un tensor arbitrario de rango p en un espacio n-dimensional?

7. Muestre que la contracción $\epsilon^{ab}\partial_a\partial_b = 0$. De acá se concluye que la contracción de tensores simétricos con tensores antisimétricos es cero.

8. Usando la definición de Christoffel (10), muestre que

$$\Gamma^a_{bc} = \Gamma^a_{cb}. \tag{1}$$

9. De la definición del Riemann (11), muestre las simetrías siguientes:

   - $\mathcal{R}_{abcd} = -\mathcal{R}_{bacd}$.
   - $\mathcal{R}_{abcd} = -\mathcal{R}_{abdc}$.
   - $\mathcal{R}_{abcd} = \mathcal{R}_{cdab}$.
   - $\mathcal{R}_{a[bcd]} = 0$.

Problemas tipo examen

1 Identidades Vectoriales

1. Utilizando la notación tensorial, muestre las siguientes identidades en $\mathbb{E}^3$:

   - $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$
   - $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C})\vec{A}$
   - $\vec{\nabla} \cdot (\phi\vec{A}) = (\vec{\nabla}\phi) \cdot \vec{A} + \phi\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$
   - $\vec{\nabla} \times (\phi\vec{A}) = (\vec{\nabla}\phi) \times \vec{A} + \phi(\vec{\nabla} \times \vec{A})$
   - $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}$
   - $\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$
   - $\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})$
   - $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) = 0$
   - $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$
   - $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$

2 Determinantes de matrices

1. Utilizando la notación del determinante con el tensor de Levi-Civita, muestre que
$$det(AB) = det(A)det(B). \tag{2}$$
Hint: el único hint es escribir explícitamente todos los términos, y después de "mirar fuertemente" la expresión obtenida (y sabiendo a donde se quiere llegar)... llegar al resultado.

3 Operadores diferenciales en coordenadas curvadas

1. Sean la coordenadas paraboloidales (u, v, ϕ) dadas por
$$\begin{aligned} x &= uv\cos\phi & (3)\\ y &= uv\sin\phi & (4)\\ z &= \frac{1}{2}(u^2 - v^2). & (5)\end{aligned}$$
Calcule la métrica en las nuevas coordenadas.

2. Invierta la métrica.

3. Escriba en las nuevas coordenadas los operadores, Gradiente, Divergencia y Laplaciano.

4 La métrica es covariantemente constante

1. En clases mostramos que la derivada covariante de un vector, bajo el grupo de difeomorfismos, esta dada por
$$D_a V_b = \partial_a V_b - \Gamma^m_{ab} V_m.$$
La generalización para tensores de rango arbitrario está dada por:
$$\begin{aligned} D_s T^{ab..}{}_{mn..} &= \partial_s T^{ab..}{}_{mn..} + \Gamma^a_{ps} T^{pb..}{}_{mn..} + \Gamma^b_{ps} T^{ap..}{}_{mn..} + \cdots \\ &\quad -\Gamma^p_{ms} T^{ab..}{}_{pn..} - \Gamma^p_{ns} T^{ab..}{}_{mp..} - \cdots & (6)\end{aligned}$$
No, no es un error, no hay pregunta en esta parte, alégrate, es una parte menos para hacer ;)

2. Considere la métrica g_{ab}. Construya los Christoffel para esta métrica (No es otra cosa que escribir la definición.

3. Muestre que $D_a g_{bc} = 0$. Un tensor cuya derivada covariante es cero, se dice es un tensor covariantemente constante.

5 Formas diferenciales

1. Considere la transformación del objeto geométrico $\partial_a V_b$ bajo un cambio de coordenadas.
2. Escriba el nuevo objeto $(\mathbf{d}V)_{ab} = \partial_a V_b - \partial_b V_a$ y su transformación bajo cambio arbitrario de coordenada.

   Los tensores covariantes de rango k totalmente antisimétricos se llaman usualmente **k-formas**, y su derivada antisimetrizada en todos los índices, llamada **derivada exterior**, también es una forma diferencial pero un orden mayor, es decir, una $k+1$-forma.
3. Muestre que $\mathbf{d}^2 = 0$. Esta propiedad es conocida como nilpotencia de la derivada exterior.

6 Cálculo del número de componentes independientes del Riemann en 4 dimensiones.

- Calcule el número de componentes independiente de un tensor simétrico de rango 2 en un espacio de dimensión n. Recuerde que el Riemann es simétrico bajo el cambio de el primer par de índices con el segundo par de índices.
- La dimensión de los índices simétricos del ítem anterior, n es igual al número de componentes independientes de un tensor antisimétrico de rango dos en dimensión 4.
- Recuerde la identidad de Bianchi, que es en dimensión 4 un vínculo adicional, así que del numero de componentes hay uno demás.

7 Cálculo de la curvatura de la 2-esfera

- Considere la transformación de coordenadas

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\phi && (7) \\ y &= r \sin\theta \sin\phi && (8) \\ z &= r \cos\theta, && (9) \end{aligned}$$

  y halle la métrica en coordenadas esféricas.
- Calcule la métrica inversa.
- Restrínjase a una superficie $r = \mathit{constante}$, por lo que la métrica de la esfera será 2-dimensional y no 3-dimensional. Defina los símbolos de Christoffel como

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{am} \left(\partial_b g_{cm} + \partial_c g_{bm} - \partial_m g_{bc} \right), \tag{10}$$

  y calcúlelos.
- Finalmente, derive los simbolos de Christoffel y calcule

$$R^a_{bcd} = \partial_c \Gamma^a_{db} - \partial_d \Gamma^a_{cb} + \Gamma^m_{bc} \Gamma^a_{dm} - \Gamma^m_{bd} \Gamma^a_{cm}. \tag{11}$$