# Geometr'ia Plana Elemental

Oscar Castillo-Felisola

18 de febrero de 2005

## Índice



**Resumen**

En este articulo se presenta, de manera programada, un pequeño curso de geometr'ia. En este se pretende introducir algunas demostraciones de teoremas a partir de los axiomas de Euclides.

## 1. Los elementos de Euclides

Poco se sabe del origen del autor de los Elementos para el estudio de la geometr'ia, ya que su vida fue tan oscura que no existe asociado a su nombre ning'un lugar de nacimiento. Sin embargo, es conocido por Euclides de Alejandr'ia debido a que fue llamado por Ptolomeo I, como profesor de la escuela o instituto conocido como Museo, establecida por este gobernante de ese imperio hacia 306 a.C.

Los elementos est'an divididos en trece libros o cap'itulos, los cuales tratan sobre la geometr'ia plana elemental, teor'ia de n'umeros, los inconmensurables y geometr'ia de s'olidos y est'an integrados por su autor de acuerdo a lo siguiente:

Libro I: Las 48 proposiciones que contempla este libro, se dividen en tres grupos. Las primeras 26 tratan principalmente de las propiedades de los tri'angulos, de la 27 a la 32 establecen la teor'ia de las paralelas y demuestran que la suma de los 'angulos de un tri'angulo es igual a dos 'angulos rectos. Las proposiciones restantes de este primer libro tratan de paralelogramo, tri'angulos, cuadrados, el teorema de Pit'agoras y su inverso que se establecen en las proposiciones en la 47 y 48 respectivamente. En este libro se observan entre otras las siguientes definiciones iniciales:

- Un punto es lo que no tiene parte ni dimensi'on
- Una l'inea es una longitud sin anchura
- Una recta es una l'inea que tiene todos sus puntos en la misma direcci'on
- Una superficie es la que tiene solo longitud y anchura
- Un 'angulo plano es la inclinaci'on entre s'i de dos l'ineas de un plano, si estas se cortan y no est'an en una misma recta
- Cuando las l'ineas que comprenden el 'angulo son rectas, se dice que el 'angulo es rectil'ineo
- Un c'irculo es una figura plana contenida en una l'inea, llamada circunferencia, tal que todas las rectas que van desde un punto particular hasta puntos de ella, quedando dentro de la figura son iguales
- Figuras rectil'ineas son las contenidas entre rectas, figuras son las contenidas entre tres rectas (tri'angulos), cuadrilaterales o cuadril'ateros son los contenidos entre cuatro y los multilaterales o pol'igonos son las contenidas entre m'as de 4 rectas.
- Rectas paralelas son las que, estando en el mismo plano y prolong'andolas indefinidamente en ambos sentidos, no se cortan ni en uno ni en el otro sentido.

**Postulados de Euclides**

1. Una recta puede trazarse desde un punto cualquiera hasta otro.
2. Una recta finita puede prolongarse continuamente y hacerse una recta ilimitada o indefinida.
3. Una circunferencia puede describirse con un centro y una distancia.
4. Todos los 'angulos rectos son iguales entre s'i.
5. Si una recta que corte a otras dos forma con 'estas 'angulos interiores del mismo lado de ella que sumados sean menores que dos rectos, las dos rectas, si se prolongan indefinidamente, se cortan del lado en que dicha suma de 'angulos sea menor que dos rectos.

Libro II: El libro II trata de la transformaci'on de 'areas y el 'algebra geom'etrica griega de la escuela pitag'orica. En ese libro se establece la equivalencia geom'etrica de diversas identidades algebraicas y una generalizaci'on del teorema de Pit'agoras conocido como la ley de los cosmos.

Libro III: Este libro trata de aquellos teoremas relativos a circunferencias, cuerdas, tangente y la medici'on de 'angulos.

Libro IV: Contempla las exposiciones de las construcciones pitag'oricas, con regla y comp'as de pol'igonos regulares de tres, cuatro, cinco, seis y quince lados.

Libro V: Contiene una exposici'on magistral de la teor'ia de la proposici'on aplicable a magnitudes inconmensurables y conmensurables. Teor'ia que resolvi'o un esc'andalo l'ogico creado por el descubrimiento pitag'orico de los n'umeros irracionales.

Libro VI: Se aplica la teor'ia eudoxiana de la proposici'on a la geometr'ia plana, se establecen los teoremas fundamentales de unos tri'angulos semejantes y construcciones que dan la tercera, la cuarta y media proporcionales. Se establece una soluci'on geom'etrica a las ecuaciones cuadr'aticas y la proposici'on de que la bisectriz interna de un 'angulo de un tri'angulo divide al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los otros dos lados.

Libro VII, VIII y IX: Estos libros tratan de la teor'ia elemental de los n'umeros.

Libro X: En este libro se trata de los irracionales, esto es de segmentos rectil'ineos que son inconmensurables respecto al segmento rectil'ineo dado. Gran parte del contenido de este libro se cree es debido a Theaetetus, pero lo extraordinariamente completo, la clasificaci'on y el acabado se acreditan a Euclides.

Libro XI, XII Y XIII: Los restantes libros tratan de la geometr'ia s'olida o del espacio, cubriendo la mayor parte del material. Las definiciones, los teoremas acerca de rectas y planos en el espacio y los teoremas relativos a los paralelepipedos se encuentran en el libre XI, los vol'umenes se tratan h'abilmente en el libro XII y las construcciones de los cinco poliedros regulares se tratan en el libro XIII.

# 2. Propiedades Fundamentales

## 2.1. De la pertenencia de puntos y rectas en el plano

**Axioma 1.** *Cualquera sea la recta, existen puntos que pertenecen a la recta y puntos que no.*

**Axioma 2.** *Cualesquiera que sean dos puntos, existe una recta que pasa por estos puntos, y solo una.*

**Proposici'on 1.** Dos rectas diferentes no se cortan o se cortan en un punto 'unico.

## 2.2. De la posici'on rec'iproca de los puntos en la recta y en plano

Sean $A$, $B$ y $C$ tres puntos sobre una recta, si el punto $B$ est'a entre los puntos $A$ y $C$, se dice que $A$ y $C$ est'an a distintos lados del punto $B$, o equivalentemente que $B$ separa a $A$ y $C$.

Un punto divide la recta en dos semirectas o rayo. Las semirectas que forman una recta se denominan complementarias.

**Proposici'on 2.** El segmento $AB$ es la parte de la recta formada por todos los puntos $X$ que separan a $A$ y $B$. Los puntos $A$ y $B$ se denominan extremos del segmento.

**Proposici'on 3.** El segmento $AB$ es una parte de la semirecta $AB$, o sea, todo punto en el segmento $AB$ pertenece a la semirecta $AB$.

Una recta divide el plano en dos semiplanos. Si dos puntos $A$ y $B$ se encuentran en el mismo semiplano, el segmento $AB$ no intersecta a la recta.

Sea $a$ una recta, y $A$ un punto sobre ella. Sea $B$ un punto que no pertenece a la recta $a$, entonces la semirecta $AB$ solo intersecta a $a$ en el punto $A$ (por proposici'on 1). Si $X$ es un punto cualquiera sobre la semirecta $AB$, se sigue que $X$ no pertenece a la recta $a$, por tanto podemos enunciar

**Teorema 1.** *Si por el punto de origen $A$ de una semirecta $AB$ se traza una recta, $a$, que no pase por $B$, toda la semirecta $AB$ estar'a en un semiplano respecto a la recta $a$.*

De la proposici'on 3 se deriva que

**Teorema 2.** *Si por el extremo $A$ del segmento $AB$ se traza una recta $a$, todo el segmento $AB$ quedar'a en un semiplano respecto a $a$.*

Las propiedades fundamentales de la posici'on rec'iproca las podemos enunciar como:

**Axioma 3.** *De tres puntos de una recta, uno de ellos y solo uno, se halla entre los otros dos.*

**Axioma 4.** *Un punto situado en una recta la divide en dos semirectas. Los puntos de una semirecta no est'an separedos por el punto de divisi'on. Los puntos de diferentes semirectas est'an separados por el punto de divisi'on.*

**Axioma 5.** *Toda recta divide el plano en dos semiplanos. Si los extremos de un segmento pertenecen al mismo semiplano, el segmento no corta la recta. Si los extremos del segmento no pertenecen al mismo semiplano, el segmento corta la recta.*

## 2.3. De la medici'on de los segmentos

**Axioma 6.** *Todo segmento tiene una longitud determinada mayor que cero.*

**Axioma 7.** *Si el punto $C$ de la $AB$ se halla entre los puntos $A$ y $B$, la longitud del segmento $AB$ es igual a la suma de las longitudes $AC$ y $BC$.*

.

**Definici'on 1 ('Angulo).** Se llama 'angulo a la figura formada por dos semirectas distintas con un punto de origen com'un. Este punto se denomina v'ertice del 'angulo y las semirectas se denominan lados del 'angulo.

Se introducir'a a continuaci'on un poco de notaci'on. Como se ha visto, se designar'a a los puntos con letras latinas may'usculas, a las rectas con letras latinas min'usculas, a las semirectas o segmentos con dos puntos, siendo el primero el origen si es una semirecta. Los 'angulos se designan con el s'imbolo $\measuredangle$, seguido bien por el nombre del v'ertice o por tres puntos que indican el 'angulo. y el s'imbolo $\in$ indica pertenencia.

**Defini'on 2.** El 'angulo formado por dos semirectas complementarias se denomina 'angulo llano. La medida del 'angulo llano es de 180°.

**Axioma 8.** *Todo 'angulo tiene una medida en grados determinada y mayor que cero.*

**Axioma 9.** *Si un rayo $c$ parte del v'ertice de un 'angulo $(ab)$ y pasa entre sus lados, el 'angulo $(ab)$ es igual a la suma de los 'angulos $(ac)$ y $(bc)$.*

## 2.4. De la construcci'on de segmentos y 'angulos

**Axioma 10.** *Cualquiera que sea el n'umero positivo $m$, en una semirecta se puede construir a partir de su punto de origen un segmento de longitud $m$ y solo uno.*

**Axioma 11.** *Cualquiera que sea el n'umero positivo $n$ menor de 180, en una semirecta se puede construir, dado un semiplano, a partir de su punto de origen un segmento de longitud $m$ y solo uno.*

**Teorema 3.** *Si en una semirecta $AB$ se construye, a partir de su punto de origen $A$, un segmento $AC$ menor que $AB$, estar'a $C$ entre $A$ y $B$.*

*Demostración.* Del axioma 3 se sigue que un punto est'a entre los otros dos. $A$ no est'a entre $B$ y $C$ porque estos 'ultimos pertenecen a la misma semirecta. Si $B$ estubiese entre $A$ y $C$, del axioma 10 se deriva que $AB + BC = AC$, o sea, $AB < AC$, que contradice la hipoótesis. Luego $B$ no est'a entre $A$ y $C$. Por consiguiente es $C$ el punto en cuestión. □

## 2.5. Primer criterio de igualdad de tri'angulos

**Defini'on 3.** Un tri'angulo es una figura de tres puntos no pertenecientes a una misma recta y tres segmentos que unes estos puntos de dos en dos. Los puntos se llaman v'ertices y los segmentos lados del tri'angulo.

Para denotar tri'angulos se utiliza el s'imbolo $\triangle$.

Se dice que dos tri'angulos son iguales si todos sus lados y 'angulos son iguales.

**Teorema 4.** *Si en dos tri'angulos $ABC$ y $A_1B_1C_1$ se tiene $\measuredangle A = \measuredangle A_1$, $AB - A_1B_1$ y $AC = A_1C_1$, los tri'angulos son iguales, es decir, $\measuredangle B = \measuredangle B_1$, $\measuredangle C = \measuredangle C_1$ y $BC = B_1C_1$.*

*Demostración.* La demostraci'on se sigie directamente de los axiomas 10 y 11. □

## 2.6. De las paralelas

**Defini'on 4.** Se llaman paralelas a dos rectas que no se cortan, con la particularidad de que las rectas se consideran prolongadas indefinidamente en ambas direcciones.

**Teorema 5.** *Por el punto $B \notin a$, se puede trazar en el plano solo una recta paralela a la recta $a$.*

# 3. Algo sobre figuras

**Teorema 6.** *Si la recta $a$, que no pasa por ninguno de los v'ertices del tri'angulo $ABC$, corta su lado $AB$, tambi'en corta uno y solo uno de los otros lados.*

*Demostración.* La recta $a$ divide al plano en dos semiplanos. Como $a$ corta al segmento $AB$, $A$ y $B$ est'an en distintos semiplanos. $C$ est'a en uno de los dos semiplanos. Como siempre existe un punto en el semiplano opuesto, existe tambi'en un lado del tri'angulo que corta a la recta $a$. □

## 3.1. Posici'on de los 'angulos en un semiplano

**Teorema 7.** *Si a partir de una semi recta $a$ se contruyen en el mismo semiplano dos 'angulos $(ab)$ y $(ac)$, el rayo $b$ pasar'a entre los lados del 'angulo $(ac)$ o el rayo $c$ pasar'a ente los lados del 'angulo $(ab)$.*

*Demostración.* Sea $a'$ la semirecta complementtaria de $a$. Tomese los puntos $A$, $A'$ y $B$ en las semirectas $a$, $a'$ y $b$ respectivamente. Asumase $\measuredangle(ab) < \measuredangle(ac)$. Por el teorema 6 se sigue que $c$ corta o bien al segmento $AB$ o al $A'B$. Si $c$ cortase al segmento $A'B$, pasar'ia entre los lados del 'angulo $(a'b)$, que contradice nuestra suposici'on por el axioma 9. Por tanto, el rayo $c$ no corta al segmento $A'B$, y por consiguiente corta al segmento $AB$. Esto significa que el rayo $c$ pasa ente los lados del 'angulo $(ab)$. □

**Teorema 8.** *Si el rayo $c$ pasa entre los lados del tri'angulo $(ab)$, la recta que contiene el rayo $c$ separa los lados del 'angulo.*

*Demostración.* Sea $A$ un punto sobre la semirecta $a$ y $B$ un punto sobre la semirecta $B$. El segmento $AB$ corta a la semirecta $c$ puesto que separa los lasos del 'angulo, es decir, $A$ y $B$ est'an en distintos semiplanos con respecto a la recta que contiene a $c$.

Del Teorema 1 se obtiene que por lo tanto las semirectas $a$ y $b$ est'an en distintos semiplanos respecto a la recta que contiene a $c$. □

# 4. 'Angulos

**Definici'on 5.** Dos 'angulos se llaman adyacentes si tienen un lado en com'un y sus otros lados son rectas complementarias.

**Teorema 9.** *La suma de los 'angulos adyacentes es igual a* $180°$.

*Demostración.* Del axioma 9 y de la ddefinici'on de 'angulo llano se tiene que la suma de 'angulos adyacentes es $180°$. □

**Definici'on 6.** Dos 'angulos se llaman verticales si los lados de uno son semirectas complementarias de los lados del otro.

**Teorema 10.** *Los 'angulos verticales son iguales.*

*Demostración.* Ya que los 'angulos adyacentes son comunes, se sigue que los 'angulos verticales son iguales. □

**Definici'on 7.** Un 'angulo recto es uno que mide $90°$.

**Definici'on 8.** Si dos semirectas forman un 'angulo de $90°$, se dice que son rectas perpendiculares.

**Teorema 11.** *Por todo punto de la recta se puede trazar una recta perpendicular a ella y solo una.*

*Demostración.* Sea $a$ una semirecta con origen $A$. Se traza una recta $b$ perpendicular a $a$ en el punto $A$, es decir, el 'angulo $(ab)$ es de $90°$. Trazamos una recta $c$, distinta de $b$, que suponemos perpendicular a $a$ en el punto $A$. Por el axioma 11 se deduce que si $\measuredangle ab$ es recto, $\measuredangle ac$ no lo es. $\square$

# 5. Igualdad de Tri'angulos

## 5.1. Segundo criterio de la igualdad de tri'angulos

**Teorema 12.** *Si los tri'angulos $ABC$ y $A'B'C'$ son tales que $AB = A'B'$, $\measuredangle A = \measuredangle A'$ y $\measuredangle B = \measuredangle B'$, los tri'angulos son iguales.*

*Demostración.* Del teorema 4 se tiene que $AC = A'C'$. Supongase que $AC \neq A'C'$, por ejemplo, $AC > A'C'$. En la semirecta $AC$ se ubica un punto $C_1$ que satisface $AC_1 = A'C'$, por el teorema 3 se sabe que $C_1$ est'a entre $A$ y $C$, as'i pues se tiene que $\triangle ABC_1 = \triangle A'B'C'$ (por el primer criterio de igualdad de tri'angulos.

Puesto que el rayo $BC_1$ pasa entre los lados del 'angulo $ABC$, se sigue que el 'angulo $\measuredangle ABC < \measuredangle ABC_1$, llegando a una contradicci'on. $\square$

## 5.2. Tri'angulo is'osceles

**Definici'on 9.** Un tri'angulo se llama is'osceles si tiene dos lados iguales. Estos lados se llaman laterales y el otro se llama base.

**Teorema 13.** *En un tri'angulo is'osceles los 'angulos de la base son iguales. Rec'iprocamente, si $\measuredangle A = \measuredangle C$, el tri'angulo es is'osceles.*

*Demostración.* El tri'angulo $ABC$ es igual al tri'angulo $CBA$ por el primer criterio de igualdad de tri'angulos. De esta igualdad resulta $\measuredangle A = \measuredangle C$. El rec'iproco se prueba usando el segundo criterio de igualdad de tri'angulos. $\square$

**Definici'on 10.** Sea el tri'angulo $ABC$ si sobre el segmento $AB$ se toma un punto $D$ tal que $AD = BD$, el segmento $CD$ es la mediana.

**Definici'on 11.** Sea llama bisectriz al segmento $CD$ tal que $\measuredangle ACD = \measuredangle BCD$.

**Definici'on 12.** El segmento $CD$ se llama altura si $CD \perp AB$.

**Teorema 14.** *En el tri'angulo is'osceles la mediana relativa a la base es la bisectriz y la altura.*

*Demostración.* Puesto que el tri'angulo es is'osceles, del teorema 13 se deriva que $\measuredangle ACD = \measuredangle BCD$ ya que $D$ es el punto medio del segmento $AB$. Lo anterior muestra que la mediana es bisectriz.

Como los 'angulos $\measuredangle ADC$ y $\measuredangle BDC$ son adyacentes y e iguales, resultan rectos, por ello, $CD$ es la altura. $\square$

### 5.3. Tercer criterio de igualdad de tri'angulos

**Teorema 15.** *Si los tri'angulos* $ABC$ *y* $A'B'C'$ *son tales que* $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ *y* $BC = B'C'$*, los tri'angulos son iguales.*

*Demostración.* Supongamos $\measuredangle A \neq \measuredangle A'$ y $\measuredangle B \neq \measuredangle B'$. Contruyase a partir de la semirecta $AB$ en el semiplano en el que se encuaentra $C$ un 'angulo igual al $\measuredangle A'$ y construyase el segmento $AC_1 = A'C'$ □

## 6. Relaci'on entre 'angulos y lados del tri'angulo

**Teorema 16.** *La suma de dos 'angulos cualesquiera del tri'angulo es menor a* $180°$*.*

*Demostración.* Sea el tri'angulo $ABC$ y $O$ el punto medio del segmento $AC$. Sea $D$ el punto sobre la recta $BO$ tal que $BO = DO$. Del teorema 4 se deriva que $\triangle ADO = \triangle BCD$ □