

## Segundo Certamen de Física Matemática 2

Curso: 510.319,

Semestre: 2005-1

Profesor: Paul Minning.

Ayudante: Oscar Castillo-Felisola

### 1 Isometrías del espacio tiempo 2 dimensional

Sea

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

la métrica del espacio de Minkowski 2-dimensional. Definamos el grupo de isometrías como el conjunto de matrices  $\Lambda$  que satisfacen

$$\eta_{ab} = \Lambda^m{}_a \Lambda^n{}_b \eta_{mn}. \quad (2)$$

Si  $(A^p{}_q)^t = A^q{}_p$ ,

- Escriba (2) como un producto de matrices.
- Halle la forma genérica de las matrices  $\Lambda$ .

### Solución

Recordemos que si escribimos la ecuación tensorial como una ecuación matricial, debemos estar seguros de que los índices de multiplicación de matrices estén “lo más cerca posible”, es decir, que no hayan otros índices de por medio entre los índices contraídos. Por lo tanto,

$$\eta_{ab} = \Lambda^m{}_a \Lambda^n{}_b \eta_{mn} \quad (3)$$

$$= (\Lambda^a{}_m)^t \eta_{mn} \Lambda^n{}_b. \quad (4)$$

Luego, para saber como es la matriz  $\Lambda$ , proponemos

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (5)$$

así que la multiplicación de matrices nos da

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 - a^2 & cd - ab \\ cd - ab & d^2 + b^2 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

ecuaciones que pueden ser resueltas si  $a = d = \cosh(\theta)$  y  $b = c = \sinh(\theta)$  donde  $\theta$  es un parámetro arbitrario. Por lo tanto

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

## 2 Tensores Duales y Anti-duales

Considere el tensor  $F_{\mu\nu}$  en un espacio de Minkowski 4-dimensional (i.e.  $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ ), defina el tensor dual como

$$*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}. \quad (8)$$

Calcule  $*(F)$  usando el hecho de que en signatura Lorentziana  $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta\lambda\rho} = -2\delta^{\mu\nu}_{\lambda\rho}$ .

### Solución

Si

$$*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}, \quad (9)$$

se sigue que

$$*(F)_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\rho\lambda}F_{\rho\lambda} \quad (10)$$

$$= \frac{1}{4}(-2\delta^{\rho\lambda}_{\mu\nu})F_{\rho\lambda} \quad (11)$$

$$= -\frac{1}{2}(\delta^{\rho}_{\mu}\delta^{\lambda}_{\nu} - \delta^{\rho}_{\nu}\delta^{\lambda}_{\mu})F_{\rho\lambda} \quad (12)$$

$$= -F_{\mu\nu}. \quad (13)$$

## 3 Cálculo de las conexiones del agujero negro de Schwarzschild

- Muestre que un Lagrangeano y su cuadrado generan las mismas ecuaciones de movimiento.
- Considere la métrica cuyo elemento de línea es

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2, \quad (14)$$

y construya el Lagrangeano  $\mathcal{L} = ds$  y halle las geodésicas

- Identifique de las curvas geodésicas las conexiones de la métrica de Schwarzschild.

### Solución

Consideremos la acción devida a un Lagrangiano arbitrario  $\mathcal{L}$ , cuya acción es  $S = \int \mathcal{L} dt$ . Minimizando la acción obtenemos

$$\delta S = 0 \Rightarrow \delta \mathcal{L} = 0. \quad (15)$$

Consecuentemente, si consideramos la acción generada por el Lagrangiano al cuadrado,  $S' = \int \mathcal{L}^2 dt$ , tenemos que

$$\delta S' = 0 \Rightarrow \delta(\mathcal{L}^2) = 2\mathcal{L}\delta\mathcal{L} = 0, \quad (16)$$

puesto que  $\mathcal{L} \neq 0$ , las ecuaciones de movimiento son las mismas que las del primer Lagrangeano.

Así bien, podemos considerar el lagrangeano de la distancia en el espacio de Schwarzschild,

$$\mathcal{L} = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2. \quad (17)$$

Hallando las ecuaciones de movimiento para cada coordenada se tiene que

$$\ddot{t} + \frac{2m}{r(r-2m)} \dot{r}\dot{t} = 0, \quad (18)$$

$$\ddot{\phi} + \frac{2}{r} \dot{r}\dot{\phi} + 2 \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \dot{\theta}\dot{\phi} = 0, \quad (19)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r}\dot{\theta} - \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\phi}^2 = 0, \quad (20)$$

$$\ddot{r} + \frac{m}{r(r-2m)} \dot{r}^2 + \frac{m(r-2m)}{r^3} \dot{t}^2 + (2m-r) \dot{\theta}^2 + (2m-r) \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2 = 0, \quad (21)$$

de lo que inmediatamente se sigue que

$$\Gamma_{rt}^t = \frac{m}{r(r-2m)} \quad \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r} \quad (22)$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^\phi = \tan(\theta) \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r} \quad (23)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin(\theta) \cos(\theta) \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{m}{r(r-2m)} \quad (24)$$

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{m(r-2m)}{r^3} \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = (2m-r) \quad (25)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = (2m-r) \sin^2(\theta). \quad (26)$$

## 4 Reversión (inversión) de series de potencias positivas

Determinar los coeficientes constantes  $a_3$  y  $a_5$  en funciones de  $(a_2, a_4)$  o ambos o uno para que las funciones mutuamente inversas  $u(x)$  y  $x(u)$  logren cumplir:

$$u(x) = x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + \dots \quad (27)$$

$$x(u) = u - a_2 u^2 + a_3 u^3 - a_4 u^4 + a_5 u^5 + a_6 u^6 + \dots \quad (28)$$

## Solución

Sustituyendo (27) en (28 y exigiendo que  $x = x$ , es decir, los coeficientes de potencias superiores de  $x$  son idénticamente cero, obtenemos

$$x = x \quad (29)$$

$$a_2 - a_2 = 0 \quad (30)$$

$$a_3 - a_2^2 = 0 \quad (31)$$

$$a_5 - 2a_2(a_2a_3 + a_4) + 3a_3(a_2^2 + a_3) - 4a_4a_2 + a_5 = 0 \quad (32)$$

$$\vdots \quad (33)$$

de lo que

$$a_3 = a_2^2 \quad \text{and} \quad a_5 = 3a_2a_4 - 2a_2^4. \quad (34)$$

## 5 Fracciones continuadas

Suponer tres constantes positivas distintas:  $a > b > c > 0$ . Una fracción continuada

$$x = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \dots}}}}}}}}. \quad (35)$$

Determinar y resolver la ecuación cuadrática determinando  $x$  en función de  $(a, b, c)$ .

Indicar cual raíz es la correcta y explicar claramente el por qué la otra raíz tiene que ser descartada. Expresar la raíz correcta en su expresión mínima mas simple.

## Solución

Escriba la ecuación (35) como

$$\frac{1}{x - a} = b + \frac{1}{c + \frac{1}{x}}, \quad (36)$$

operando algebraicamente se obtiene la ecuación cuadrática,

$$(bc + 1)x^2 - (abc + a - b + c)x - (ab + 1) = 0. \quad (37)$$

Puesto que el discriminante,  $R$  satisface

$$R = (abc + a - b + c)^2 + 4(ab + 1)(bc + 1) > (abc + a - b + c)^2, \quad (38)$$

entonces,

$$x = \frac{(abc + a - b + c) + \sqrt{R}}{2(bc + 1)}, \quad (39)$$

es el único resultado correcto porque si se toma el signo negativo,  $x$  es negativo por (38) y  $x$  no puede ser negativo debido a que es una fracción continuada de números positivos sin ningún signo negativo en la fracción.