Tensores y Geometría Diferencial

Oscar Castillo-Felisola

December 4, 2004

Contents

Abstract

En este reporte se espera dar una pequeña introducción al álgebra tensorial como parte inicial de un curso de geometría diferencial.

1 Variedades

Una variedad n-dimensional, M, es un espacio topológico[1] que localmente es homeomórfico a $\mathbb{R}^n$, pero no necesariamente globalmente.

[1] Un espacio topológico es un conjunto de puntos, X, junto con una topología, $\mathscr{J}$, y se denota $(X, \mathscr{J})$. Una topología es la colección de subconjuntos abiertos,$\{X_\alpha\}$, definidos en X, y satisfacen (i) $X, \emptyset \in \mathscr{J}$, (ii) $\cup_\alpha X_\alpha \in \mathscr{J}$ y (iii) $\cap_\alpha X_\alpha \in \mathscr{J}$.

Si cubrimos la variedad con un atlas[2] $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, en la intersección de dos cartas debe exitir una función de transición que lleva un punto en la primera carta a un punto en la segunda. Si estas funciones son C^k, se dice que la variedad es k-diferenciable. Si las funciones son C^∞, se dice que la variedad es "suave".

2 Vectores

En este momento se generalizará el concepto de vector, no ya como un segmento de recta orientado, sino como un objeto geométrico con ciertas propiedaddes de transformación.

Sea M una variedad diferenciable, $m \in M$ un punto sobre la variedad, t un parámetro en el intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$ y $f : t \to M$ una aplicación tal que $f(0) = m$. Definimos la velocidad de la curva en m como

$$v = \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0}. \tag{1}$$

Esta velocidad es un vector tangente a la curva f en el punto m. El conjunto de todos los vectores tangentes sobre un punto m de la variedad, forman un espacio vectorial que denotaremos T_mM que es el espacio tangente a la variedad M en el punto m. Obviamente, el espacio tangente es un espacio Euclídeo y es n-dimensional. Se puede definir un grupo de transformaciones de coordenadas que mantinen invariante el módulo del vector, este grupo es (en principio) el grupo de rotaciones en n dimensiones[3]. Así pues, es posible definir un vector haciendo uso de sus propiedades de transformación bajo la acción de este grupo. Es de esperar que estas transformaciones cambien los vectores bases a una combinación (lineal o no) de los vectores bases anteriores, es decir,

$$\vec{e}_{i'} = \Lambda_{i'}{}^{j}\vec{e}_j, \tag{2}$$

donde se ha utilizado la convención de suma de Einstein e $i, j = 1...n$. Se usa adicionalmente el hecho de que el índice abajo denota componentes covariantes del vector e índice arriba denota las componentes del vector[4]. La matriz de tranformación $\Lambda_{i'}{}^{j}$ viene dada por

$$\Lambda_{i'}{}^{j} = \frac{\partial X^j}{\partial X^{i'}}.$$

Si se desea que $\vec{V} = V^i\vec{e}_i = V^{i'}\vec{e}_{i'}$, se sigue que

$$V^{i'} = \Lambda^{i'}{}_{j}V^j, \tag{3}$$

[2] Un conjunto de cartas coordenadas (U_α, ϕ_α) donde $U_\alpha \subset M$ y $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$, tal que $\cup_\alpha U_\alpha = M$.

[3] Este grupo de transformaciones es un gruo matricial. Si en espacio es real de n dimensiones, este grupo es el grupo de matrices ortogonales $n \times n$ de determinante 1, que se denota $SO(n, \mathbb{R})$

[4] También conocidas como componentes contravariantes

con

$$\Lambda^{i'}{}_j = \frac{\partial X^{i'}}{\partial X^j}.$$

3 1-formas

En la sección anterior se ha definido un vector como un objeto geométrico que vive en el espacio tangente a un punto de la variedad M. Las componentes de estos vectores tranforman de manera contravariante. De igual manera es posible definir unos "vectores" cuyas componentes transformen covariantemente.

Este nuevo conjunto de vectores están definidos en un espacio vectorial, T_m^*M, llamado espacio cotangente a M en el punto m, y un elemento de éste aplica a un elemento del anterior grupo de vectores sobre números. La aplicación mensionada es lineal, por lo que elementos de T_m^*M son llamados funcionales lineales de vectores. También son conocidos como 1-formas.

Las uno formas serán denotadas como $\widetilde{B} = B_i \widetilde{w}^i$, donde

$$\vec{B}_{i'} = \Lambda_{i'}{}^j \vec{B}_j \tag{4}$$

y

$$\widetilde{w}^{i'} = \Lambda^{i'}{}_j \widetilde{w}^j. \tag{5}$$

4 Tensores

Una vez que se han definido los vectores como objetos con una propiedad de transformación bajo el grupo de invariancia del espacio tangente T_mM, pueden ser definidos objetos más generales definiendo sus propiedaddes de transformación.

Considerese un objeto construido como un par de vectores independientes, pero como un objeto único, denotado por $V \otimes W$ y la operación $\otimes$ se conoce como el producto tensorial. Es claro que este nuevo objeto geométrico tiene n^2 componentes, digamos V^iW^j, y transforma de manera que

$$(V \otimes W)^{i'j'} = \Lambda^{i'}{}_m \Lambda^{j'}{}_n (V \otimes W)^{mn}. \tag{6}$$

La ley de transformación definida arriba será tomada como una definición de tensores.

En general se puede realizar un producto tensorial de p vectores y q 1-formas, y el resultado de tal producto será llamado un tensor de rango $p+q$. Su ley de transformación será por tanto

$$T^{i_1 \ldots i_p}{}_{j_1 \ldots j_q} = \Lambda^{i_1}{}_{m_1} \ldots \Lambda^{i_p}{}_{m_p} j \Lambda_{j_1}{}^{n_1} \ldots \Lambda^{j_q}{}_{n_q} T^{m_1 \ldots m_p}{}_{n_1 \ldots n_q}, \tag{7}$$

donde i, j son coordenadas en la nueva base y m, n son coordenadas en la vieja base.

Es un hecho que dado un conjunto de vectores y/o formas se pueden construir tensores, pero no todo tensor puede ser escrito como un producto tensorial de vectores, por esto no escribimos la ecuación (7) como un producto tensorial de objetos de menor rango.

De la discusión en la sección anterior, se hace evidente que como T debe actuar sobre p 1-formas y q vectores para obtener un número (escalar), un tensor no es más que un funcional lineal actuando sobre vectores y/o 1-formas.

Notas

- Es importante notar que no todo objeto geométrico con indices es un tensor, ya que se ha restringido el concepto de tensor a un objeto geométrico que transforma como en (7).
- Un vector es un tensor de rango $1 + 0$.
- Una 1-forma es un tensor de rango $0 + 1$.
- Similarmente, un escalar es un tensor de rango $0 + 0$.
- Los tensores forman un álgebra, es decir, se pueden definir tres operaciones, a saber, $+$, $\otimes$ y multiplicación por escalares, que satisfacen una serie de propiedades que no serán expuestas en este reporte.
- El álgebra tensorial $T(M)$ se dice es un álgebra $\mathbb{Z}$-graduada en el sentido de que puede asignar una característica entera a cada tensor, esta característica no es otra que el rango.
- No todo tensor de rango $0+q$ es una q-forma, estos objetos existen y son de gran importancia para el cálculo sobre variedades debido a sus propiedades de transformación, de ser necesario estos objetos serán definidos en alguna sección subsiguiente.

4.1 ¿Por qué Tensores?

Una razón de peso para el estudio de tensores es que **existen**. Lo único que quizás nunca los han nombrado como tales. Ejemplos comunes pueden ser encontrados, pero en dichos casos básicos no son tratados como se les debe, entre ellos el tensor de inercia.

No es casualidad que un sistema de partículas (rígido o no) reaccione de manera distinta si se aplican torques en torno a diferentes ejes de rotacion, esto se explica si consideramos la inercia no ya como un escalar sino como un tensor de rango 0+2.

Si se recuerda, la conocida resistencia de un cuerpo también depende de la geometría del cuerpo, esto es porque, al igual que la inercia, esta característica del cuerpo no es un escalar como se ha hecho creer en los cursos básicos de la licenciatura, pero un tensor.

El concepto de tensor en física fué introducido definitivamente por Minkowski en la primera década del siglo pasado, cuando logró escribir las ecuaciones de la relatividad especial de Einstein de manera tensorial asumiendo que el espaciotiempo no era otra cosa que un espacio pseudo-Riemanniano 4-dimensional[5]. Unos años mas tarde, el mismo Einstein da a conocer la teoría general de la relatividad[6] que está basada en la comprención de estos objetos geomt́ricos como "mediadores" de la interacción gravitacional.

4.2 Y más allá...

Fué dicho que no todo aquello que posee índices es un tensor, ¿Qué hacer con ellos?

Un caso importante es el de la derivada parcial, a continuación se denotará $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, que actuando en escalares transforma como un tensor de rango $0+1$, pero actuando sobre tensores de rango mayor a 0 no conserva esta fantástica propiedad. Sería de utilidad el definir una derivación que aplique tensores de rango $p+q$ a tensores de rango $p+(q+1)$, ya que toda derivación de tensor sería immediatamente un tensor. Esta nueva derivación se llama *derivada covariante* porque transforma como un tensor covariante de rango $0+1$, y se denota ∇.

La parte que se le agrega a la derivada parcial para convertirla en una derivada covariante es conocida como conección[7]. Si el total de las conecciones son nulas, se dice que el espacio es plano, y coincide con el conocido espacio Euclídeo.

4.3 Métrica

En cierto tipo de variedades, es posible definir distancias. La distancia es una forma cuadrática que aplica un par de vectores a escalares, esto se entiende como

$$g(\vec{A}, \vec{B}) = g_{ab} A^a B^b, \tag{8}$$

que adicionalmente puede ser identificado con el producto escalar de vectores. De (8), se sigue que g provee un morfismo entre el espacio vectorial directo, $T_m M$, y el espacio vectorial dual, $T_m^* M$, por lo que se identifica

$$A_b = g_{ab} A^a.$$

De ahora en adelante, la contracción entre vector y 1-forma será entendida como un producto escalar de vetores provisto por la métrica que se haya definido

[5] Minkowski asumió que el tiempo era una coordenada mas del espacio, pero con una característica que lo diferencia de las otras.

[6] Que es la teoría de gravitación más exitosa con la que contamos hasta el momento.

[7] En el caso de relatividad general las conecciones vienen dadas por los simbolos de Christoffel, y por ciertas restricciones de la teoría estas conecciones se pueden expresar en términos de un tensor de rango $0+2$ conocido como métrica.

sobre la variedad M. Es importante resaltar que se pueden definir una gran cantidad de diferentes métricas sobre la misma variedad, pero ellas poseen grupos de isometrías[8] diferentes.

De la ecuación (8) es evidente que

$$g_{ab} = g(\vec{e}_a, \vec{e}_b) = \langle e_a | e_b \rangle \,, \tag{9}$$

debido a la propiedad de linealidad de los tensores.

Un caso importante de conección a considerar es aquella conección definida sobre espacios métricos que satisface

$$\nabla g = 0. \tag{10}$$

Este caso particular de conección es conosida como conección de Levi-Civita, y las variedades en las que se puede definir esta conección se conocen como variedades de Riemann-Cartan. Si adicionalmente se exige que las conecciones sean simétricas, es posible encontrar una expresión para las conecciones en términos del tensor métrico, tal como se realiza en relatividad general. Las variedades con estas propiedades se llaman variedades Riemannianas.

5 Formas Diferenciales

Sea $T(M)$ el álgebra tensorial definida sobre una variedad M, considerese el subconjunto, $\Lambda(M) \subset T(M)$, donde viven los tensores totalmente antisimétricos. Los elementos que pertenesen a este subconjunto son conocidos como *formas*. Definase una aplicación, η, tal que $\eta(\omega) = k$ si $\omega \in \Lambda^k(M)$, esta es conocida como el grado de la forma. Toda forma de grado k es llamada k-forma.

Es posible definir un álgebra entre formas, pero es evidente que el producto tensorial de formas no es general una forma. Se debe entonces definir un nuevo producto que actue sobre formas diferrenciales, este producto es llamado producto cuña, $\wedge : \Lambda^p(M) \times \Lambda^q(M) \to \Lambda^{p+q}(M)$, y posee la propiedad de ser conmutativo en el sentido que

$$\omega \wedge \theta = (-1)^{\eta(\omega)\eta(\theta)} \theta \wedge \omega. \tag{11}$$

Formalmente se dice que forman un álgebra Z_2-graduada, en el sentido que el grado de las formas pueden conmutar o anticonmutar. A diferencia del álgebra tensorial, esta álgebra es de dimensión finita, y la dimensión es 2^n donde $n = dim(M)$[9].

Si en una variedad M se escoge una base coordenada, $\{x^i\}$, una base para el espacio cotangente viene dada por $\{dx^i\}$. Haciendo uso de la base escogida,

[8] El grupo de isometrías es el grupo H tal que $g = hgh^{-1} \;\; \forall\, h \in H$.

[9] Fácilmente se puede mostrar esto, ya que es la suma de los coeficientes de una serie polinómica binomial.

se expresa una k-forma como

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \tag{12}$$

donde $\omega_{i_1 \dots i_k}$ son las componentes de la forma en cierta base coordenada.

5.1 Utilidad de las Formas Diferenciales

Hasta el momento no parece existir ninguna ventaja en el uso de las formas diferenciales en comparación con los tensores. Ésta aparece cuando se quiere definir cálculo diferencial e integral con estos objetos geométricos.

Increiblemente las formas diferenciales son objetos geométricos con los que se puede hacer cálculo independiente de la elección de un sistema de coordenadas particular, esto porque su construcción antisimétrica hace que se cancelen las contribuciones debidas a la escogencia de coordenadas, así pués, las formas diferenciales permiten definir cálculo sobre variedades.

A continuación de definirán un conjunto de propiedades útiles para el cálculo con formas diferenciales.

5.2 Derivada Exterior

Por supuesto, se quiere definir una operación de derivación[10] que preserve la estructura antisimétrica de las formas, esta se denota con $\mathbf{d}$ y es tal que $\mathbf{d} : \Lambda^k(M) \rightarrow \Lambda^{k+1}(M)$,

$$\mathbf{d}(\omega \wedge \theta) = \mathbf{d}\omega \wedge \theta + (-1)^{\eta(\omega)} \omega \wedge \mathbf{d}\theta. \tag{13}$$

La derivada exterior puede ser expresada en una base coordenada como

$$\mathbf{d} = \frac{\partial}{\partial x^i} dx^i, \tag{14}$$

y actua sobre formas como un producto cuña.

Una propiedad importante de la derivada exterior es que es nilpotente, i.e. $\mathbf{d}^2 = 0$.

5.3 Producto Interior

Sea ω una k-forma y X un vector. Defínase la operación producto interno, $\imath_X : \Lambda^k(M) \rightarrow \Lambda^{k-1}(M)$, como

$$\imath_X \omega = \omega(X) \in \Lambda^{k-1}(M). \tag{15}$$

Nóetese que si $\omega \in \Lambda^1(M)$, $\imath_X \omega \in \Lambda^0(M)$ es identificado con el producto interno de X y ω.

El producto interior es, también, nilpotente, i.e., $\imath_x^2 = 0$.

[10] Que no necesariamente satisface la regla de Leibniz, sino una generalización.

5.4 Derivada de Lie

La derivada de Lie es una derivación de gran importancia en el estudio de las simetrías de una variedad. Ésta satisface la regla de derivación de Leibniz, se denota $\pounds_X$ ya que se realiza a lo largo de un vector X. La derivada de Lie es tal que $\pounds_X : \Lambda^k(M) \to \Lambda^k(M)$ está definida por

$$\pounds_X \omega = \{\mathbf{d}, \imath_X\}\omega = \mathbf{d}\imath_X \omega + \imath_X \mathbf{d}\omega. \tag{16}$$

5.5 Coderivada Exterior

Sean $\omega, \theta \in \Lambda^k(M)$ dos k-formas, el producto interno de estas formas sobre M lo definiremos como

$$\langle \omega | \theta \rangle = \int_M \omega \wedge {}^*\theta, \tag{17}$$

donde ${}^* : \Lambda^k(M) \to \Lambda^{n-k}(M)$ es conocido como el operador de dualidad de Hodge, que se define sobre una base coordenada como

$${}^*\omega_{i_{k+1}\dots i_n} = \varepsilon_{i_1\dots i_n}\omega^{i_1\dots i_k}, \tag{18}$$

donde se han subido los índices de ω con el inverso del tensor métrico, y ε es la densidad tensorial de Levi-Civita.

Ahora bien, sean ω y θ una k- y $k-1$- formas respectivamente. Por tanto podemos calcular el producto interno $\langle \omega | \mathbf{d}\theta \rangle$. Defínace el operador dual a $\mathbf{d}$ como aquel tal que

$$\langle \omega | \mathbf{d}\theta \rangle = \left\langle \mathbf{d}^\dagger \omega | \theta \right\rangle. \tag{19}$$

Este nuevo operador es conocido como el operador codiferencial exterior, y actúa de manera que $\mathbf{d}^\dagger : \Lambda^k(M) \to \Lambda^{k-1}(M)$ y adicionalmente es nilpotente, i.e., ${\mathbf{d}^\dagger}^2 = 0$.

5.6 Laplaciano

Para concluir el tema, se introducirá uno de los operadores diferenciales más importantes, el Laplaciano. Se denota como $\triangle$, viene definido por

$$\triangle \omega = \{\mathbf{d}, \mathbf{d}^\dagger\}\omega, \tag{20}$$

y por contrucción, $\triangle : \Lambda^k(M) \to \Lambda^k(M)$.

Agradecimientos

Se agradece a las instituciones Parque Tecnológico de Mérida, CeCalcULA y al Centro de Estudiantes de la Facultad de Ciencias por su apoyo para con este proyecto, tanto moral como material. Además se agradece a los estudiantes tanto de Física como de Matemáticas por el acogimiento e interés en el proyecto.