

Ecuaciones Polinomiales, Algoritmos y Robótica

Para comenzar vamos a describir qué es lo que entenderemos por un *robot* en el resto de la charla.

Un robot es una sucesión de segmentos conectados en forma de serie, y un elemento terminal denominado *mano* (este puede ser prolongación del segmento anterior o un segmento aparte de longitud cero). Cada una de estas uniones de segmentos serán denominadas *joints* o simplemente *uniones*, y pueden ser de diversos tipos.

- 1) En forma esférica (como el hombro o la muñeca de un ser humano)
- 2) En forma de codo.

Los segmentos pueden ser de dos tipos:

- 1) De longitud fija.
- 2) De longitud variable.

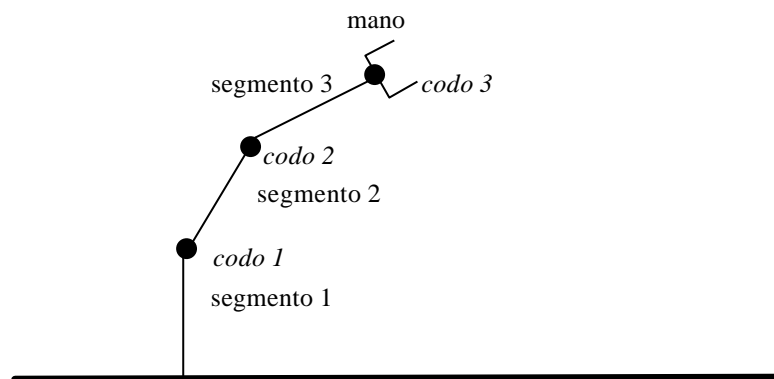


Figura 1

Proposición: Toda unión en forma esférica puede ser reemplazada por uniones en forma de codo.

De aquí en adelante sólo analizaremos uniones del tipo 2).

Nuestro principal interés será:

- 1) Poder determinar la la posición de la mano de un robot en términos de ciertos parámetros. (Forward Kinematic Problem)
- 2) Poder conocer los parámetros que tienen que ser pasados al robot para una posición dada de la mano. (Inverse Kinematic Problem)

Para esto introduciremos J y C dos espacios en los cuales trabajaremos.

$J = S^1 \times \dots \times S^1 \times [\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times [\alpha_n, \beta_n]$ (Joint space) ($S^1 \approx [0, 2\pi]$)
 donde cada S^1 representa el la circunferencia de radio uno, y los segmentos $[\alpha_i, \beta_i]$ representan las posibles longitudes de los brazos prismáticos.

$C = U \times V$ donde: $U \subseteq \mathbb{R}^2$ la posición de la mano y
 $V = S^1$ la orientación de la mano.

Definimos: $f: J \rightarrow C$, una función que a cada configuración j de J le asigna un único valor de C (posición y orientación).

- 1) ¿Hay una descripción de f en función de una configuración j de J ? (FKP)
- 2) Dado un valor c de C ¿se puede obtener $j \in J$ tal que $f(j) = c$? (IKP)

Veremos que existe una forma polinomial para expresar f , sin embargo 2) no es tan fácil de responder, ya que será necesario resolver $f(j) = c$ cuando en general f no resulta lineal.

Se puede observar que por lo general si el robot está formado por más de un segmento puede suceder que exista más de una configuración posible de J para un determinado valor c de C y no debería asombrarnos encontrar para algunas posiciones, infinitas configuraciones distintas que la representen. (Esto muestra que en general f no resulta inyectiva).

Para estos casos sería de interés poder encontrar todas las soluciones ya que a la hora de implementar puede que varias de éstas se vean anuladas por imposibilidad física (por ejemplo si hay obstáculos en el medio donde el robot opera).

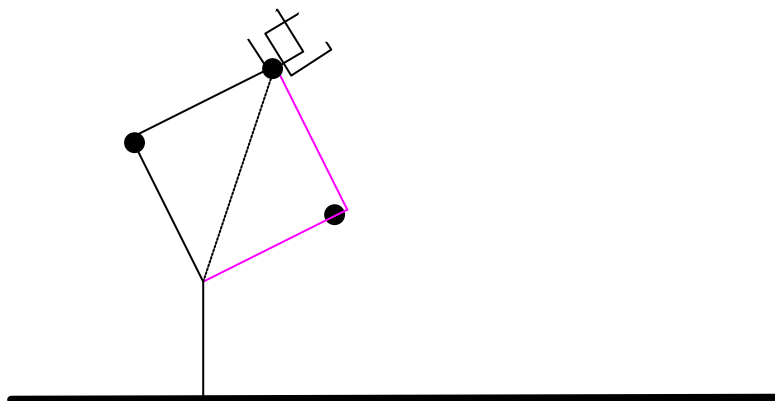


Figura 2

FKP (Forward Kinematic Problem)

Fijaremos un sistema de coordenadas (x_i, y_i) para cada segmento, donde el eje x_i será una extensión de del segmento $i+1$ y definiremos el ángulo θ_i como aquel entre x_i y x_{i+1} en sentido antihorario.

Tomemos ahora un punto p tiene coordenadas (a_{i+1}, b_{i+1}) con respecto a (x_{i+1}, y_{i+1}) , para escribirlo en las coordenadas de (x_i, y_i) deberemos rotar θ_i para alinear x_i y x_{i+1} y además trasladar L_i , donde ésta es la medida del i -ésimo segmento.

Nos queda:

$$\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\mathbf{q}_i) & -\text{sen}(\mathbf{q}_i) \\ \text{sen}(\mathbf{q}_i) & \cos(\mathbf{q}_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

se puede describir como:

$$\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\mathbf{q}_i) & -\text{sen}(\mathbf{q}_i) & L_i \\ \text{sen}(\mathbf{q}_i) & \cos(\mathbf{q}_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A_i} \begin{pmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

A_i

Consideraremos que el segmento correspondiente a la mano tendrá $L_{n+1} = 0$ y $L_1 = 0$ porque los ejes (x_1, y_1) están centrados en el codo 1 igual que (x_2, y_2)

Considerando el caso en que el robot tiene únicamente tres codos y operando:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ 1 \end{pmatrix} = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y operando:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3) & -\text{sen}(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3) & L_3 \cos(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) + L_2 \cos(\mathbf{q}_1) \\ \text{sen}(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3) & \cos(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3) & L_3 \text{sen}(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) + L_2 \text{sen}(\mathbf{q}_1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y como la mano está centrada en el origen $(a_4, b_4) = (0, 0)$, entonces:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_3 \cos(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) + L_2 \cos(\mathbf{q}_1) \\ L_3 \text{sen}(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) + L_2 \text{sen}(\mathbf{q}_1) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Si nos interesara, además de la posición, la orientación de la mano debemos considerar:

$$f(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = \begin{pmatrix} L_3 \cos(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) + L_2 \cos(\mathbf{q}_1) \\ L_3 \text{sen}(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) + L_2 \text{sen}(\mathbf{q}_1) \\ \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 \end{pmatrix}$$

Si hubiéramos considerado $J = S^1 \times S^1 \times S^1 \times [a_1, \beta_1]$, obteníamos:

$$f(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, L_4) = \begin{pmatrix} L_4 \cos(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3) + L_3 \cos(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) + L_2 \cos(\mathbf{q}_1) \\ L_4 \text{sen}(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3) + L_3 \text{sen}(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) + L_2 \text{sen}(\mathbf{q}_1) \\ \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 \end{pmatrix}$$

Generalizando se prueba por inducción en n , que f puede ser escrita como:

$$f(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n-1} L_{i+1} \cos\left(\sum_{j=1}^i \mathbf{q}_j\right) \\ \sum_{i=1}^{n-1} L_{i+1} \text{sen}\left(\sum_{j=1}^i \mathbf{q}_j\right) \\ \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i \end{pmatrix}$$

Procederemos a llevar la expresión (1) a un sistema polinomial tomando $\cos(\mathbf{q}_i) = c_i$ y $\text{sen}(\mathbf{q}_i) = s_i$ (aplicando igualdades trigonométricas), obteniendo:

$$c_i^2 + s_i^2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_3(c_1c_2 - s_1s_2) + L_2c_1 \\ L_3(s_1c_2 - s_2c_1) + L_2s_1 \end{pmatrix}$$

esto cual define una variedad en \mathbb{R}^6 que resulta ser J . Se puede pensar como

$$P: V(x_1^2 + y_1^2 - 1, x_2^2 + y_2^2 - 1, x_3^2 + y_3^2 - 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Observación: La posición de la mano no depende de \mathbf{q}_3 , sólo interviene para definir la orientación:

Observación: Si se quiere parametrizar la orientación de la mano podemos pensar a $f: J \rightarrow U \times V$ como $f: J \rightarrow U \times [-1, 1] \times [-1, 1]$

$$j \rightarrow (a, b, s, c) \quad \text{donde: } \begin{aligned} \cos(\mathbf{q}_3) &= c \\ \text{sen}(\mathbf{q}_3) &= s \end{aligned}$$

y obtenemos:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ c \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_3(c_1c_2 - s_1s_2) + L_2c_1 \\ L_3(s_1c_2 - s_2c_1) + L_2s_1 \\ c_1(c_2c_3 - s_2s_3) - s_1(c_2s_3 + c_3s_2) \\ s_1(s_2s_3 - s_2s_3) + c_1(c_2s_3 + c_3s_2) \end{pmatrix}$$

IKP (Inverse Kinematic Problem)

En esta etapa queremos determinar dado un valor $c \in C$ si se puede obtener $j \in J$ tal que $f(j) = c$, i.e. calcular $f^{-1}(c)$.

Observando el diagrama 2 podemos observar que f puede resultar no inyectiva.

Si estudiamos un caso como el que planteamos antes donde se tiene un codo inmediatamente antes de la mano, la posición de la mano se puede determinar independientemente de los ángulos \mathbf{q}_1 y \mathbf{q}_2 , veamos esto: sea \mathbf{f} el ángulo en el cuál se desea colocar la mano y consideremos \mathbf{q}_1 y \mathbf{q}_2 fijos, tenemos que $\mathbf{f} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3$, entonces $\mathbf{q}_3 = \mathbf{f} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2$.

Olvidemos entonces la orientación de la mano y centrémonos en el problema de la posición.

Sea $(a, b) \in U$ la posición de la mano, entonces resolvamos:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_3(c_1c_2 - s_1s_2) + L_2c_1 \\ L_3(s_1c_2 - s_2c_1) + L_2s_1 \end{pmatrix}, \text{ teniendo en cuenta que } c_i^2 + s_i^2 = 1$$

Consideremos entonces el ideal I donde:

$$I = \langle \underbrace{L_3(s_1c_2 - s_2c_1) + L_2s_1 - a}_{}, \underbrace{L_3(c_1c_2 - s_1s_2) + L_2c_1 - b}_{}, \underbrace{c_1^2 + s_1^2 - 1}_{}, \underbrace{c_2^2 + s_2^2 - 1}_{} \rangle$$

f_1 f_2 f_3 f_4

Calculemos entonces una base de Gröbner reducida para I según el termorder $\text{lex}(c_2, s_2, c_1, s_1)$

Obtenemos

$$GB = \left\{ c_2 - \frac{a^2 + b^2 - L_2^2 - L_3^2}{2L_2L_3}, s_2 + \frac{a^2 + b^2}{aL_3} s_1 - \frac{a^2b + b^3 + b(L_2^2 - L_3^2)}{2aL_2L_3}, \right. \\ c_1 + \frac{b}{a} s_1 - \frac{a^2 + b^2 + L_2^2 - L_3^2}{2aL_2}, s_1^2 + \frac{a^2b + b^3 + b(L_2^2 - L_3^2)}{L_2(a^2 + b^2)} s_1 + \\ \left. + \frac{(a^2 + b^2)^2 + (L_2^2 - L_3^2)^2 - 2a^2(L_2^2 + L_3^2) + 2b^2(L_2^2 - L_3^2)}{4L_2^2(a^2 + b^2)} \right\} \\ = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$$

Observación: cada uno de estos polinomios son elementos del anillo $\mathbb{F}[c_1, c_2, s_1, s_2]$, donde $\mathbb{F} = \mathbb{R}(a, b, L_2, L_3)$, cuerpo de funciones racionales.

Notar que $P=0$ en $\mathbb{F}[c_1, c_2, s_1, s_2] \Rightarrow a=0, b=0, L_2=0, L_3=0$ y además \mathbb{F} no es algebraicamente cerrado.

Si $I = \langle f_1, f_2, f_3, f_4 \rangle$, especializando a, b, L_2, L_3 obtenemos $I^* = \langle f_1^*, f_2^*, f_3^*, f_4^* \rangle$
¿Será cierto que GB^* (la base con los polinomios especializados), seguirá siendo una base de Gröbner de I^* ?

¿Puedo especializar en cualquier valor real?

Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}(t_1, \dots, t_m)$ Se puede ver que si consideramos una variedad $W \subseteq \mathbb{R}^m$ definida como $W = V(d_1, \dots, d_s)$ donde los d_i son los denominadores de $f_j, g_j, p_{jk} / g_j = \sum_{r=1}^n p_{kr} f_r$ y evaluamos en $\mathbb{R}^m - W$ podremos asegurar que GB^* será una base de Gröbner de I^* .

Observemos ahora los LT de la GB computada, podemos concluir:

- 1) resolviendo $f_4 = 0$ se obtiene dos soluciones posibles para s_1 y para cada una de éstas, podemos encontrar de forma única una solución del sistemas
- 2) Eligiendo $a \neq 0, L_2 \neq 0, L_3 \neq 0, a^2 + b^2 \neq 0$, se ve que $\# V(g_1, g_2, g_3, g_4) < \infty$
- 3) Para las soluciones encontradas falta determinar cuáles de ellas corresponden a valores reales.

Observación: Para el caso del robot estudiado se puede ver que W definido como antes está formado únicamente por los valores dónde los denominadores se anulan.

Para poder realizar algunos cálculos, tomemos $L_2 = L_3 = 1$, y queda de ejercicio ver que tanto sustituyendo en GB como recalculando la base de Gröbner y luego especificando, obtenemos el mismo resultado:

$$\begin{aligned}
GB1 &= \left\{ c_2 - \frac{a^2 + b^2 - 2}{2}, s_2 + \frac{a^2 + b^2}{a} s_1 - \frac{a^2 b + b^3}{2a}, \right. \\
&\quad \left. c_1 + \frac{b}{a} s_1 - \frac{a^2 + b^2}{2a}, s_1^2 + \frac{a^2 b + b^3}{a^2 + b^2} s_1 + \right\} \\
&= \{ h_1, h_2, h_3, h_4 \}
\end{aligned}$$

Si consideramos el caso $L_2 \neq L_3$, la situación cambia bastante.

Observación: GB1 es una base de Gröbner $\forall a, b / a \neq 0, a^2 + b^2 \neq 0$.

Observación: Las soluciones para s_1 son reales sii $0 \leq a^2 + b^2 \leq 4$, y para los casos en que $0 < a^2 + b^2 < 4$ hay dos soluciones posibles, para $a^2 + b^2 = 4$ hay una única solución, que corresponde a poner de manera lineada los segmentos 2 y 3.

Observación: Si $a^2 + b^2 = 0$ resulta que $a = b = 0$, si observamos los polinomios h_1, h_2, h_3, h_4 podemos ver que varios de los denominadores se anulan. En este caso basta tomar $q_2 = p$ y podemos ver que el segmento 3 se dobla sobre el segmento 2 posicionando la mano en el $(0, 0)$ sin importar qué valor tome q_1 .

Observación: Si tomamos $a = 0$ y $a^2 + b^2 \neq 0$ resulta que algunos denominadores se anulan. Sin embargo geoméricamente, es un caso que no debería ser estudiado aparte. Para solucionar esto bastaría cambiar los ejes de coordenadas de forma tal que los puntos en cuestión no queden con su primera coordenada nula.

Algebraicamente podemos sustituir $a = 0$ y recomputar $GB = \{ g_1, g_2, g_3, g_4 \}$ esta vez con $L_2 = L_3 = 1$ y $a = 0$, obteniendo;

$$GB10 = \left\{ c_2 - \frac{b^2 - 2}{2}, s_2 - b c_1, c_1^2 + \frac{b^2 - 4}{4}, s_1 - \frac{b}{2} \right\} = \{ g_1, g_2, g_3, g_4 \}$$

En resumen:

- si $0 < a^2 + b^2 < 4$ hay 2 soluciones.
- si $a^2 + b^2 > 4$ no hay soluciones.
- si $a^2 + b^2 = 0$ hay infinitas soluciones.
- si $a^2 + b^2 = 4$ hay una única solución.

Los dos últimos casos corresponden a lo que llamaremos una singularidad (kinematic singularities), y será estudiado más adelante.

Si hubiéramos tomado $L_4 \in [0, 1]$ sin agregar codos, habría posiciones de la mano las cuales pueden ser alcanzadas con cualquier orientación de la mano (basta mirar el caso $L_4 = 0$ dentro de S^2), mientras que hay otras posiciones que sólo se las puede alcanzar con una única orientación de la mano (S^3).

$$\text{Analicemos ahora } GB10 = \left\{ c_2 - \frac{b^2 - 2}{2}, s_2 - b c_1, c_1^2 + \frac{b^2 - 4}{4}, s_1 - \frac{b}{2} \right\}$$

A diferencia de la situación que obteníamos en GB1, se puede ver que el polinomio g_4 involucra solamente a s_1 y además es lineal en esa variable, de lo cual deducimos que podemos despejar obteniendo un único valor para s_1 . Mientras que el polinomio que L_3 es cuadrático e involucra sólo a c_1 con lo cual habrá dos valores posibles para esta variable.

Esto se condice geoméricamente con que el valor del ángulo $\text{sen}(\mathbf{q}_1)$ está determinado de forma única, mientras que para $\text{cos}(\mathbf{q}_1)$ tenemos dos valores posibles.

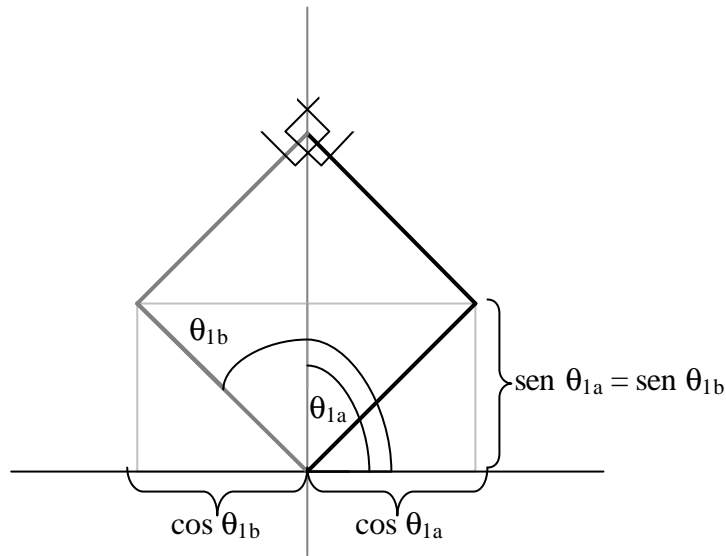


Figura 3

KS(Kinematic Singularities)

Supongamos ahora que tenemos un robot que realiza un trabajo repetitivo (cíclico), puesto en términos más precisos, realiza un movimiento en el espacio de configuración descrito por $c(t)$ con $t \in [a, b]$, de forma tal que $c(a) = c(b)$.

Sabemos que para cada $c \in C \exists j \in J / f(j) = c$. Como hemos visto puede suceder que haya más de un sólo j .

Observación: Es de esperar que si $c(t)$ es cerrado, $j(t)$ sea cerrado, donde $j(t)$ es tal que $f(j(t)) = c(t), \forall t \in [a, b]$.

Observación: Podría suceder que si el recorrido no fuera elegido con cuidado, el robot tuviera que realizar tareas que lo dañen.

Observación: La forma de elegir $j(t)$ no sólo debería tener en cuenta lo anterior, sino que se buscará minimizar el recorrido realizado para mejorar la eficiencia.

Esto motiva el estudio de lo que posteriormente denominaremos singularidades cinéticas.

Observación: $f(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ definida como antes resulta diferenciable.

Calculemos entonces su diferencial:

$$Df(\mathbf{q}_1 \dots \mathbf{q}_n, L_1 \dots L_m) = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{d\mathbf{q}_1} & \dots & \frac{df_1}{dL_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_n}{d\mathbf{q}_1} & \dots & \frac{df_n}{dL_n} \end{pmatrix}$$

Sabemos que $Df(\mathbf{q}_1 \dots \mathbf{q}_n, L_1 \dots L_m)$ es la función que mejor aproxima a $f(\mathbf{q}_1 \dots \mathbf{q}_n, L_1 \dots L_m)$. En el sentido en que:

$$f(\mathbf{q}_1 \dots \mathbf{q}_n, L_1 \dots L_m) \cong f(\mathbf{q}_{1_0} \dots \mathbf{q}_{n_0}, L_{1_0} \dots L_{m_0}) + Df(\mathbf{q}_{1_0} \dots \mathbf{q}_{n_0}, L_{1_0} \dots L_{m_0}) \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_{1_0} \\ \vdots \\ L_m - L_{m_0} \end{pmatrix}$$

Diremos que

$$\underbrace{f(\mathbf{q}_1 \dots \mathbf{q}_n, L_1 \dots L_m) - f(\mathbf{q}_{1_0} \dots \mathbf{q}_{n_0}, L_{1_0} \dots L_{m_0})}_{\Delta C} \cong Df(\mathbf{q}_{1_0} \dots \mathbf{q}_{n_0}, L_{1_0} \dots L_{m_0}) \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_{1_0} \\ \vdots \\ L_m - L_{m_0} \end{pmatrix}}_{\Delta J}$$

Definición: Un singularidad cinética para un robot es un punto $j \in J$ tal que $Df(j)$ no tiene rango máximo.

En nuestro ejemplo resulta que $Df(j) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, entonces podemos decir que $\det(Df(j)) = 0 \quad \forall j \in J$.

Veamos esto:

$$\text{Si } f(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = \begin{pmatrix} L_3 \cos(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) + L_2 \cos(\mathbf{q}_1) \\ L_3 \sin(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) + L_2 \sin(\mathbf{q}_1) \\ \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 \end{pmatrix} \text{ entonces } Df(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) =$$

$$= \begin{pmatrix} (-\sin(\mathbf{q}_1) \cos(\mathbf{q}_2) - \cos(\mathbf{q}_1) \sin(\mathbf{q}_2)) L_3 - \sin(\mathbf{q}_1) L_2 & (-\sin(\mathbf{q}_1) \cos(\mathbf{q}_2) - \cos(\mathbf{q}_1) \sin(\mathbf{q}_2)) L_3 & 0 \\ (\cos(\mathbf{q}_1) \cos(\mathbf{q}_2) - \sin(\mathbf{q}_1) \sin(\mathbf{q}_2)) L_3 + \cos(\mathbf{q}_1) L_2 & (\cos(\mathbf{q}_1) \cos(\mathbf{q}_2) - \sin(\mathbf{q}_1) \sin(\mathbf{q}_2)) L_3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y entonces:

$$\det(Df(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)) = L_3 \sin(\mathbf{q}_1)^2 L_2 \sin(\mathbf{q}_2) + L_3 \cos(\mathbf{q}_1)^2 L_2 \sin(\mathbf{q}_2) = \sin(\mathbf{q}_2)$$

Luego los puntos de singularidades son $\{0, \pi\}$ tal como se esperaba.

Esto se condice geoméricamente con las configuraciones para las cuales hay una única, o infinitas preimágenes.

Proposición: Sea $f: J \rightarrow C$ la función de configuración para un robot planar con más de dos codos. Entonces existen singularidades cinéticas.

Dem. :

Ya vimos antes que f puede ser escrita como

$$f(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n-1} L_{i+1} \cos(\sum_{j=1}^i \mathbf{q}_j) \\ \sum_{i=1}^{n-1} L_{i+1} \text{sen}(\sum_{j=1}^i \mathbf{q}_j) \\ \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i \end{pmatrix}$$

y por lo tanto su diferencial $Df \in \mathbb{R}^{3 \times n}$ resulta:

$$Df(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) = \begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^{n-1} L_{i+1} \text{sen}(\sum_{j=1}^i \mathbf{q}_j) & -\sum_{i=2}^{n-1} L_{i+1} \text{sen}(\sum_{j=1}^i \mathbf{q}_j) & \dots & -L_n \text{sen} \mathbf{q}_{n-1} & 0 \\ \sum_{i=1}^{n-1} L_{i+1} \cos(\sum_{j=1}^i \mathbf{q}_j) & \sum_{i=2}^{n-1} L_{i+1} \cos(\sum_{j=1}^i \mathbf{q}_j) & \dots & L_n \cos \mathbf{q}_{n-1} & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Observemos ahora que si tomo $\mathbf{q}_i \in \{0, \mathbf{p}\} \quad \forall 1 \leq i \leq n$, toda la primera fila se anula, y por consiguiente $\text{rg}(Df(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n)) \leq 2$ ■

Veamos cuán importantes son las singularidades cinéticas a la hora de decidir una parametrización $j(t)$ apropiada.

Sea $j(t)$ una parametrización que pasa por una singularidad, es decir $\text{rg}(Df(j(t))) \leq 2$ para algún t .

Sabemos que $f(j(t)) = c(t)$ para todo t .

Derivando obtenemos que $\underbrace{Df(j(t))}_{\text{rg} \leq 2} \cdot j'(t) = c'(t)$, con lo cuál puede suceder que

no exista una solución para este sistema, lo cual nos indicaría que no hay un camino suave $j(t)$ en esa dirección.

Si consideramos un robot con tres codos y dos segmentos, donde $\mathbf{q}_1 = 0$, $\mathbf{q}_2 = \mathbf{p}$, $\mathbf{q}_3 = a$, lo que corresponde a que el robot tenga un codo en el punto $(1,0)$, y otro en el $(0,0)$, y se quiera avanzar en la dirección $-\mathbf{e}_1$, si calculamos la matriz diferencial nos queda

$$Df(0, \mathbf{p}, a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -L_3 + L_2 & -L_3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ esto nos permite ver que el sistema:}$$

$$c'(t_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -L_3 + L_2 & -L_3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} j'(t_0) \text{ no tiene solución, ya que } c'(t_0) \cdot \mathbf{e}_1 \neq 0 \text{ ya que}$$

avanzo en esa dirección. Con lo cuál no hay un camino suave desde esa posición en esa sentido hasta el punto $(b,0)$.

Bibliografía

1) Ideals, Varieties and Algorithms - Cox, Little, O'Shea – Springer 1996

2) Introduction to Robotics - John Hollerbach-

<http://www.cs.utah.edu/classes/cs5310/>

Los apuntes (texto en *pdf*, los archivos de *Maple*) pueden ser descargados de mi sitio web: www.algoritmos.itgo.com o contactándome por mail: nbotbol@dc.uba.ar