TEMA 2 $\boxed{\text{1º PARCIAL - ANALISIS (28) - 26/05/04}}$ 1/7

1) ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ vale que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5a}{n}\right)^{\frac{a}{\operatorname{sen}(5/n)}} = e^{25}$?

Observamos primero que $1+\frac{5a}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ independientemente del valor de $a \in \mathbb{R}$. ya que $\frac{5a}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

además como $\operatorname{sen}\left(\frac{5}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ sabemos que $\frac{a}{\operatorname{sen}(5/n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

(Esto es claro porque $\operatorname{sen}(x)$ es continua en $x_0=0$

y $\lim_{n\to\infty}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{5}{n}\right)\right) = \operatorname{sen}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}\right) = \operatorname{sen}(0)=0$.)

Luego afirmamos que estamos frente a una indeterminación de la forma "1^∞", que intentaremos salvar mediante llevarlo a la forma de un "límite de e".

(*) Recordemos que si $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$.

tenemos: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5a}{n}\right)^{\frac{a}{\operatorname{sen}(5/n)}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{5a}}\right)^{\frac{a}{\operatorname{sen}(5/n)}} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{5a}}\right)^{\frac{n}{5a}}\right]^{\frac{5a}{n}\cdot\frac{a}{\operatorname{sen}(5/n)}}$$

en (*) $a_n = \frac{n}{5a}$

y claro afirmamos por teorema (*) que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{5a}}\right)^{\frac{n}{5a}} = e.$$

Necesitamos calcular:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5a}{n}\cdot\frac{a}{\operatorname{sen}(5/n)} = ?$$

pues como $\frac{5a}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ y

$\frac{a}{\operatorname{sen}(5/n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

(notar que si $a = 0$, entonces $a_n = (1+0)^0 = 1 \neq e^{25}$ entonces $a \neq 0$)

tenemos una indeterminación del tipo "$0 . \infty$".

Sabemos que $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x}$

Entonces en el límite anterior tomando $x = \frac{5}{n}$

observamos que:

$$\lim_{n \to \infty} a^2 \cdot \frac{5}{n} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}(\frac{5}{n})} = \lim_{x \to 0} a^2 \cdot x \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} = a^2$$

(álgebra de límites a^2 sale del límite)

luego aplicando álgebra de límites tenemos que

$$\lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{5a}}\right)^{\frac{n}{5a}}\right]^{\frac{5a^2}{n \cdot \operatorname{sen}(5/n)}} = \left[\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{5a}}\right)^{\frac{n}{5a}}\right]^{\lim_{n \to \infty} \frac{5a^2}{n \cdot \operatorname{sen}(5/n)}} = e^{a^2}$$

pero queremos que $e^{a^2} = e^{25}$ luego tomando logaritmos a ambos lados obtenemos que $a^2 = 25 \Rightarrow |a| = 5$

luego $\boxed{a = 5}$ ó $\boxed{a = -5}$

---

2) Sea $f(t) = t + e^{-5t}$. Encontrar la ec. de la rta tg al gráf de f que pasa por el origen de coordenadas $(0,0)$.

Recordemos que la ecuac. de la rta tg al gráf de f en x_0 tiene la siguiente forma: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Claramente esto está bien definido en todo $\mathbb{R}$ ya que $f(t)$ es cont y derivable en todo su Dominio ($= \mathbb{R}$)

Tenemos que $y = \underbrace{f'(x_0)}_{m} x + \underbrace{f(x_0) - f'(x_0) . x_0}_{b}$

Como y pasa por $(0,0)$ entonces en la fórmula anterior se tiene $b = 0$, i.e: $f(x_0) - f'(x_0) . x_0 = 0$

tenemos que $f(x_0) = f'(x_0).x_0$

Si calculamos $f'(x_0)$ (derivando f por regla de la cadena)

$f'(t) = 1 + e^{-5t}.(-5) \Rightarrow f'(x_0) = 1 - 5e^{-5x_0}$. Igualando tenemos:

$f(x_0) = f'(x_0).x_0 \iff x_0 + e^{-5x_0} = x_0 - 5x_0 e^{-5x_0} \iff$

$\iff e^{-5x_0} = -5x_0 e^{-5x_0} \iff (1+5x_0)e^{-5x_0} = 0$

como $e^{-5x_0} \neq 0 \ \forall x_0 \in \mathbb{R}$ (más aún $e^{-5x_0} > 0 \ \forall x$)

afirmamos que $(1+5x_0) = 0$ luego $x_0 = -\frac{1}{5}$

tenemos en resumen que $y = f'(-1/5)(x + 1/5) + f(-1/5)$

$f'(-1/5) = 1 + e^{-5.(-1/5)}.(-5) = 1 - 5e$

$f(-1/5) = -1/5 + e^{-5(-1/5)} = -\frac{1}{5} + e$

se verifica que $y = (1-5e)(x + 1/5) - \frac{1}{5} + e = (1-5e)x$

(pasa por el origen)

---

3) Determinar la cantidad de soluciones de la ecuación:

$$\frac{6 + 6\ln(x) - 5x}{x} + 2 = 0$$

La pregunta se traduce a estudiar cuántos ceros (o raíces) tiene la función $f(x) = \dfrac{6 + 6\ln(x) - 5x}{x} + 2$ en su dominio.

$Dom(f) = \mathbb{R}_{>0}$ (está determinado por $\ln(x)$.).

$f(x) = \dfrac{6(1 + \ln(x))}{x} - 3$ si sacamos 6 factor común y separamos la fracción en dos sumandos.

Calculemos primero qué pasa cerca del cero.

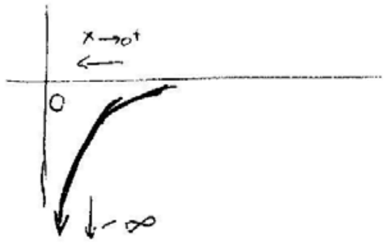
$\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

por derecha ya que por izq. no se puede porque f no está definida

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{6(1+\ln(x))}{x} - 3 \underset{\text{alg. de límite}}{=} 6\left(\lim_{x\to\infty} \frac{1+\overbrace{\ln(x)}^{-\infty}}{\underbrace{x}_{0^+}}\right) - 3 =$$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ es de la forma "$\frac{-\infty}{0^+}$"

tenemos que f tiene una asíntota en $x = 0$



Calculemos $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{6(1+\ln(x))}{x} - 3 \underset{\text{alg de límite}}{=}$

$= 6\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}\right) - 3 \underset{(**)}{=} 6.0 - 3$

(**) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x} \underset{\text{alg de límite}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0+0=0$

ambos fueron hechos en clase.

tenemos que f tiene AHD en $y = -3$

ver que para valores grandes f es decreciente.

Calculemos los puntos críticos (P.C) de f.

$$f'(x) = 6\cdot\left(\frac{\frac{1}{x}\cdot x-(1+\ln x)\cdot 1}{x^2}\right)-0 = 6\cdot\frac{1-1-\ln(x)}{x^2} = \frac{-6\ln x}{x^2}$$

claramente $\mathrm{Dom}\, f' = \mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}_{>0}$

luego $P.C = \{f'(x)=0\}$ ya que son todos interiores.

$$f'(x)=0 \iff \frac{-6\ln(x)}{x^2}=0 \iff \ln(x)=0 \iff x=e^0=1$$

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
f'	$+$ ⇓	0	$-$ ⇓
f	↗	máx	↘

tomo $x_1 = e^{-1} = \frac{1}{e} \in (0,1)$

$$f'(e^{-1}) = \frac{-6\ln(e^{-1})}{(e^{-1})^2} = \frac{6}{e^{-2}} > 0$$

tomo $x_2 = e \in (1,+\infty)$

$$f'(e) = \frac{-6\ln(e)}{e^2} = \frac{-6}{e^2} < 0$$

(uso contrarrecíproco de Bolzano)

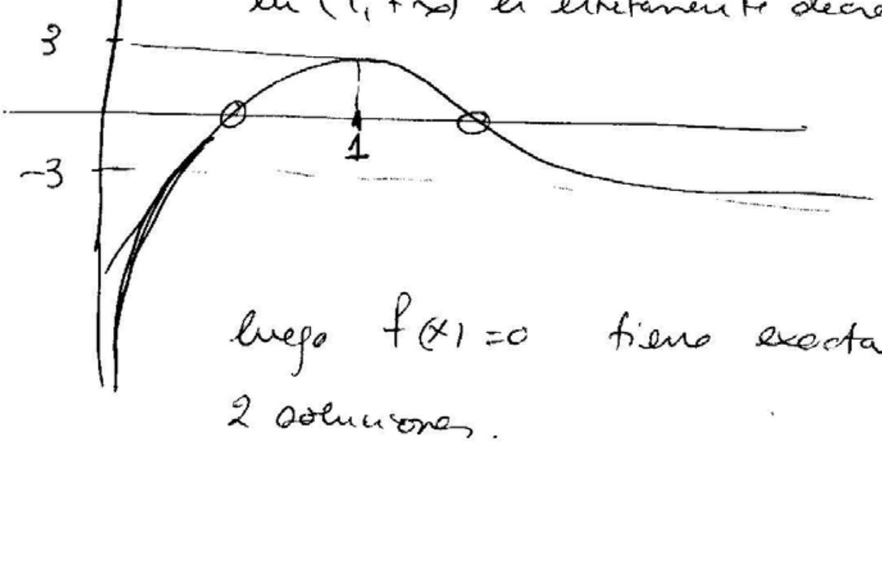
⇒ Hay un ~~localizan~~ único máximo en $x=1$

$f(1) = \underline{6+6\cdot 0-5}+2 = 3$

y el gráfico de f es aproximadamente de la siguiente manera

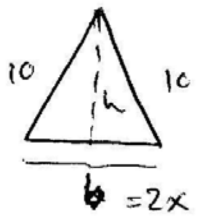
en $(0,1)$ es estrictamente creciente $\left(f'(x)>0 \ \forall x\in(0,1)\right)$

en $(1,+\infty)$ es estrictamente decreciente $\left(f'(x)<0 \ \forall x\in(1,+\infty)\right)$



luego $f(x)=0$ tiene exactamente 2 soluciones.

4) Los lados de un triángulo isósceles miden 10 cm c/u. Hallar la long. del tercer lado q' determina el triángulo de área máxima



como el triángulo es simétrico respecto de la línea punteada (basta con mirar el dibujo)

b lo tomo como $2x$

$$\text{Área}(x) = \frac{b.h}{2} = \frac{2x.h}{2} = x.h$$

falta calcular h. Pero como  es recto sabemos

(por pitágoras) que $h^2 + x^2 = 10^2$ luego $h = \sqrt{100 - x^2}$

Entonces $\text{Área}(x) = x.\sqrt{100 - x^2}$

y como $\sqrt{x}$ es una función creciente podemos calcular los máximos de $(\text{Área}(x))^2$ y esto no alterará el resultado (coincidirá con los máximos de Área(x)).

busquemos los máximos de $(\text{Área}(x))^2 = x^2.(100 - x^2)$.

como $\text{Dom}\,(\text{Área}(x))^2 = \mathbb{R}_{\geq 0}$ ya que no tiene sentido pensar $x \leq 0$

$$((\text{Área}(x))^2)' = 2x(100 - x^2) + x^2.(-2x) = 0$$

$$= 200x - 2x^3 + -2x^3 = 0$$

$$= 2x(100 - 2x^2) = 0 \iff x = 0$$

$$\iff x = \sqrt{50}$$

$$x = -\sqrt{50}$$

como $x = -\sqrt{50} \notin$ Dom Área(x) $\Rightarrow$ sólo tomo $x > 0$
$x = \sqrt{50}$

	0	$(0, \sqrt{50})$	$\sqrt{50}$	$(\sqrt{50}, +\infty)$
f'	0	$+$	0	$-$
f	0	$\nearrow$	máx	$\searrow$

tomo $x = 5 \in (0, \sqrt{50})$
$f'(5) > 0$
tomo $x = 10 \in (\sqrt{50}, +\infty)$
$f'(x) < 0$

luego $\sqrt{50}$ es un máx de $(\text{Área}(x))^2 \Rightarrow$ es máx de la función Área(x)

$\Rightarrow b = 2x = 2\sqrt{50}$.