Chapitre 1

Les vecteurs

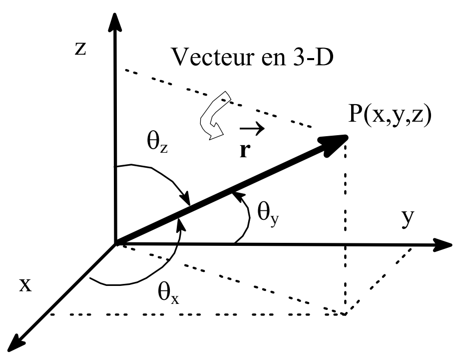
Objectif particulier 1.1

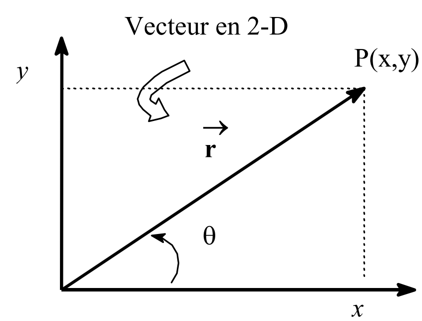
Effectuer des additions, soustractions, produits scalaires et produits vectoriels de vecteurs en trois dimensions.

Composantes vectorielles

Les vecteurs se représentent graphiquement par des flèches dont la longueur est appelée le module du vecteur. Le module du vecteur peut représenter une grandeur physique comme le déplacement ou la vitesse. L'orientation du vecteur représente alors l'orientation dans laquelle est mesurée le déplacement où la vitesse.

Le vecteur qui donne la position d'un point s'appelle vecteur position. Une position P peut être repérée à l'aide de ses coordonnées (x, y, z). Les vecteurs positions illustrés ci-dessous sont symbolisés par $\vec{\mathbf{r}}$.





Le module du vecteur $\vec{\mathbf{r}}$ est la distance qui sépare le point P de l'origine. Le module est symbolisé par r et il se calcule (en 3-D) à l'aide des coordonnées grâce au théorème de Pythagore.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Pour un point P dans un espace à deux dimensions (en 2-D), les coordonnées polaires se calculent avec

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \theta = \arctan \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}$$

Et inversement, les coordonnées rectangulaires (en 2-D) sont obtenues avec

$$x = r \cos \theta \quad \text{et} \quad \mathrm{y} = \mathrm{r} \sin \theta$$

On peut exprimer un vecteur position avec x et y ou avec r et θ. Dans le premier cas, x et y sont les composantes rectangulaires du vecteur position. Puis, r et θ sont les composantes polaires du vecteur position. De même, pour un vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ quelconque, les composantes polaires et rectangulaires se transforment avec

$$\left.\begin{array}{l} A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \\ \\ \theta_A = \arctan \dfrac{A_y}{A_x} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A_x = A \cos \theta_A \\ \\ A_y = A \sin \theta_A \end{array}\right.$$

1. Transformez les composantes rectangulaires en composantes polaires pour les vecteurs suivants:

a) A_x=15 et A_y=20 possède un module A= _______________
et une orientation θ_A= _______________.

b) B_x=30 et B_y=0 possède un module B= _______________
et une orientation θ_B= _______________.

c) C_x=-12 et C_y=12 possède un module C= _______________
et une orientation θ_C= _______________.

d) D_x=-100 et D_y=-100 possède un module D= _______________
et une orientation θ_D= _______________.

e) E_x=8 et E_y=-4 possède un module E= _______________
et une orientation θ_E= _______________.

2. Transformez les composantes polaires en composantes rectangulaires pour les vecteurs suivants:

a) A=45 et θ_A=30° possède une composante A_x= _______________
et une composante A_y= _______________.

b) B=18 et θ_B=90° possède une composante B_x= _______________
et une composante B_y= _______________.

c) C=24 et θ_C=120° possède une composante C_x= _______________
et une composante C_y= _______________.

d) D=56 et θ_D=270° possède une composante D_x= _______________
et une composante D_y= _______________.

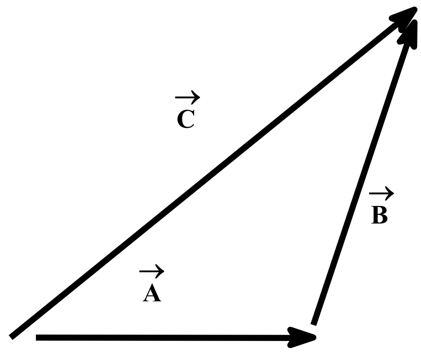
e) E=49 et θ_E=-30° possède une composante E_x= _______________
et une composante E_y= _______________.

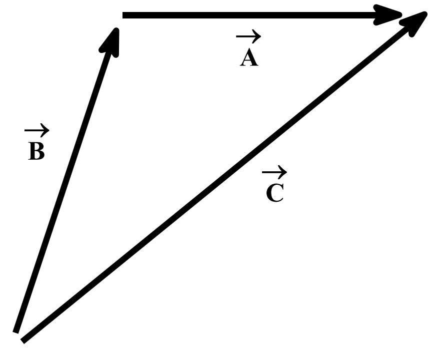
Addition et soustraction vectorielle

Voyons ci-dessous la représentation graphique de l'addition et de la soustraction vectorielle. Les équations vectorielles suivantes sont équivalentes:

$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} \quad \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{C}} - \vec{\mathbf{A}} \quad \vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{C}} - \vec{\mathbf{B}}$$
$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \quad \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{C}} \quad \vec{\mathbf{A}} = -\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}$$

Voyez les figures correspondantes suivantes :





Graphiquement, le vecteur $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ est obtenu en plaçant les vecteurs $\vec{\mathbf{A}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ à la queue leu leu; alors le vecteur $\vec{\mathbf{C}}$ part de l'origine du vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ et se termine à l'extrémité du vecteur $\vec{\mathbf{B}}$.

Le vecteur $\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{C}} - \vec{\mathbf{A}}$ est obtenu en plaçant les vecteurs $\vec{\mathbf{C}}$ et $-\vec{\mathbf{A}}$ à la queue leu leu. Le vecteur $-\vec{\mathbf{A}}$ est un vecteur opposé du vecteur $\vec{\mathbf{A}}$. Soustraire un vecteur est donc comme additionner un vecteur opposé.

Avis: Lorsque vous employez la méthode graphique, vous dessinez vos vecteurs à échelle. Si vous devez mesurer un angle, employez un rapporteur d'angles.

3. Soit **A_x=2 et A_y=4,** **B_x=4 et B_y=0,** **C_x=2 et C_y=-4**
D_x=8 et D_y=0, **E_x=6 et E_y=4,** **F_x=6 et F_y=-4**

Montrez graphiquement, sur le papier millimétré, que

a) $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{E}}$
b) $\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{D}}$
c) $\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{F}}$
d) $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{D}}$
e) $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{D}}$

Il est commode d'employer les vecteurs unitaires $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$ et $\vec{\mathbf{k}}$ pour indiquer respectivement l'orientation de l'axe des x, des y et des z. Les vecteurs unitaires ont un module valant un. Ils sont employés pour exprimer analytiquement un vecteur à l'aide de ses composantes rectangulaires.

Ainsi pour un vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ quelconque, on a

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x \, \vec{\mathbf{i}} + A_y \, \vec{\mathbf{j}} + A_z \, \vec{\mathbf{k}}$$

Les méthodes analytiques sont plus précises que les méthodes graphiques. La première méthode analytique est celle des composantes algébriques. Pour cette méthode, il faut exprimer tous les vecteurs analytiquement avec leurs composantes algébriques. Puis, on les additionne ou les soustrait selon le cas.

Pour l'addition vectorielle $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$, on a

$$\left.\begin{aligned} \vec{\mathbf{C}} &= \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} \\ &= (A_x\,\vec{\mathbf{i}} + A_y\,\vec{\mathbf{j}} + A_z\,\vec{\mathbf{k}}) + (B_x\,\vec{\mathbf{i}} + B_y\,\vec{\mathbf{j}} + B_z\,\vec{\mathbf{k}}) \\ &= (A_x + B_x)\vec{\mathbf{i}} + (A_y + B_y)\vec{\mathbf{j}} + (A_z + B_z)\vec{\mathbf{k}} \\ &= C_x\,\vec{i} + C_y\,\vec{j} + C_z\,\vec{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} C_x &= A_x + B_x \\ C_y &= A_y + B_y \\ C_z &= A_z + B_z \end{aligned}\right.$$

Pour la soustraction vectorielle $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$, on a

$$\left.\begin{aligned} \vec{\mathbf{C}} &= \vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}} \\ &= (A_x\,\vec{\mathbf{i}} + A_y\,\vec{\mathbf{j}} + A_z\,\vec{\mathbf{k}}) - (B_x\,\vec{\mathbf{i}} + B_y\,\vec{\mathbf{j}} + B_z\,\vec{\mathbf{k}}) \\ &= (A_x - B_x)\vec{\mathbf{i}} + (A_y - B_y)\vec{\mathbf{j}} + (A_z - B_z)\vec{\mathbf{k}} \\ &= C_x\,\vec{\mathbf{i}} + C_y\,\vec{\mathbf{j}} + C_z\,\vec{\mathbf{k}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} C_x &= A_x - B_x \\ C_y &= A_y - B_y \\ C_z &= A_z - B_z \end{aligned}\right.$$

4. Soit **A_x=2 et A_y=4, B_x=4 et B_y=0, C_x=2 et C_y=-4**
D_x=8 et D_y=0, E_x=6 et E_y=4, F_x=6 et F_y=-4

Calculez, à l'aide de la méthode des composantes algébriques, le résultats des équations vectorielles suivantes:

a) $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{E}}$
b) $\vec{\mathbf{D}} - \vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{E}}$
c) $\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{F}}$
d) $\vec{\mathbf{D}} - \vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{F}}$
e) $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{D}}$

Une alternative à la méthode des composantes algébriques s'appelle la méthode trigonométrique et elle s'inspire de la loi des sinus et de la loi des cosinus. Pour cette méthode, nous avons besoin des composantes polaires des vecteurs, c'est-à-dire du module et de l'orientation de chaque vecteur.
La loi des sinus donne

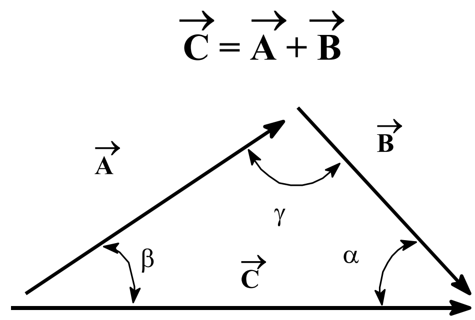
$$\frac{A}{\sin\ \alpha} = \frac{B}{\sin\ \beta} = \frac{C}{\sin\ \gamma}$$

Puis, la loi des cosinus donne

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2\,B\,C\,\cos\ \alpha$$

$$B^2 = A^2 + C^2 - 2\,A\,C\,\cos\ \beta$$

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2\,A\,B\,\cos\ \gamma$$

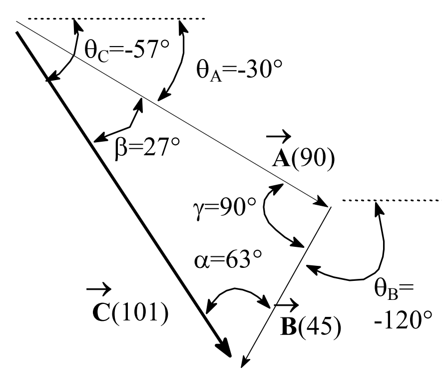


Exemple: Soit A = 90 et θ_A = -30°, B = 45 et θ_B = -120° ($\Rightarrow \gamma$ = 90° selon la figure ci-dessus); alors, on a

$$\left.\begin{aligned} C^2 &= A^2 + B^2 - 2\,A\,B\cos\gamma \\ &= 90^2 + 45^2 - 2\cdot 45\cdot 90\cdot\cos 90° \\ &= 10\,125 \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ C = \sqrt{10\,125} = 101$$

$$\frac{A}{\sin\alpha} = \frac{B}{\sin\beta} = \frac{C}{\sin\gamma} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \alpha &= \arcsin\left[\sin\gamma\left(\frac{A}{C}\right)\right] \\ &= \arcsin\left[\sin 90°\left(\frac{90}{101}\right)\right] \\ &= 63° \\ \beta &= \arcsin\left[\sin\gamma\left(\frac{B}{C}\right)\right] \\ &= \arcsin\left[\sin 90°\left(\frac{45}{101}\right)\right] \\ &= 27° \end{aligned}\right.$$

On voit sur la figure que
$\gamma = |\theta_B - \theta_A| = |(-120°)-(-30°)| = 90°$
et que
$\theta_C = \theta_A - \beta = -30° - 27° = -57°$



5. Soit A=5 et θ_A=90°, B=35 et θ_B=30°, C=9 et θ_C=-30°,

$D=12$ et $\theta_D=300°$, $E=16$ et $\theta_E=150°$, $F=60$ et $\theta_F=-150°$.

Employez la méthode trigonométrique pour effectuer les sommes vectorielles suivantes :

a) $\vec{\mathbf{A}}+\vec{\mathbf{B}}$
b) $\vec{\mathbf{B}}+\vec{\mathbf{C}}$
c) $\vec{\mathbf{C}}+\vec{\mathbf{D}}$
d) $\vec{\mathbf{D}}+\vec{\mathbf{E}}$
e) $\vec{\mathbf{E}}+\vec{\mathbf{F}}$

Produits de vecteurs

Il existe deux formes de produit pour les vecteurs. Il y a le produit scalaire qui donnent un scalaire comme résultat et il y a le produit vectoriel qui donne un vecteur comme résultat. Pour le produit scalaire, on a

$$\vec{\mathbf{A}}\bullet\vec{\mathbf{B}}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

En prenant un vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ parallèle à l'axe Ox et un vecteur $\vec{\mathbf{B}}$ dans le plan Oxy qui fait une angle θ avec l'axe Ox, on trouve une relation qui emploie les composantes polaires. Celle-ci est

$$\begin{cases} A_x=A & A_y=0 & A_z=0 \\ B_x=B\cos\theta & B_y=B\sin\theta & B_z=0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow\ \vec{\mathbf{A}}\bullet\vec{\mathbf{B}}=A_xB_x+0+0=AB\cos\theta$$

À l'aide du produit scalaire, la norme de $\vec{\mathbf{A}}$ peut être représentée par

$$A=\left|\vec{\mathbf{A}}\right|=\sqrt{\vec{\mathbf{A}}\bullet\vec{\mathbf{A}}}=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$$

6. Soit $A_x=2$ et $A_y=4$, $B_x=4$ et $B_y=0$, $C_x=2$ et $C_y=-4$
$D=12$ et $\theta_D=300°$, $E=16$ et $\theta_E=150°$, $F=60$ et $\theta_F=-150°$

Calculez le résultat des produits scalaires suivants:

a) $\vec{\mathbf{A}}\bullet\vec{\mathbf{B}}$
b) $\vec{\mathbf{B}}\bullet\vec{\mathbf{C}}$
c) $\vec{\mathbf{C}}\bullet\vec{\mathbf{D}}$
d) $\vec{\mathbf{D}}\bullet\vec{\mathbf{E}}$
e) $\vec{\mathbf{E}}\bullet\vec{\mathbf{F}}$

Pour le produit vectoriel, on a

$$\vec{\mathbf{C}}=\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}\ \Rightarrow\ \begin{cases} C_x=A_yB_z-A_zB_y \\ C_y=A_zB_x-A_xB_z \\ C_z=A_xB_y-A_yB_x \end{cases}$$

En prenant un vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ parallèle à l'axe Ox et un vecteur $\vec{\mathbf{B}}$ dans le plan Oxy qui fait une angle θ avec l'axe Ox, on trouve une relation qui emploie les composantes polaires. Celle-ci est

$$\begin{cases} A_x = A & A_y = 0 & A_z = 0 \\ B_x = B\cos\theta & B_y = B\sin\theta & B_z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = (0)\vec{\mathbf{i}} + (0)\vec{\mathbf{j}} + \left(A_x B_y - 0\right)\vec{\mathbf{k}} = (AB\sin\theta)\vec{\mathbf{k}}$$

La norme du vecteur $\vec{\mathbf{C}}$ est la surface du parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{\mathbf{A}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$. Le vecteur $\vec{\mathbf{C}}$ possède une orientation parallèle à l'axe Oz.

Le résultat $\vec{\mathbf{C}}$ issu d'un produit vectoriel est toujours perpendiculaire aux vecteurs $\vec{\mathbf{A}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ qui le forme. Dans le cas précédent, les vecteurs $\vec{\mathbf{A}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ étant compris dans le plan Oxy, il est naturel que le vecteur $\vec{\mathbf{C}}$ soit parallèle à l'axe Oz.

Pour connaître le sens (positif ou négatif) de $\vec{\mathbf{C}}$, nous appliquons la **«règle de la main droite»**:

> Le vecteur $\vec{\mathbf{C}}$ issu du produit vectoriel $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ est de même orientation que le pouce de la main droite, lorsque les doigts de cette main tournent du vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ vers le vecteur $\vec{\mathbf{B}}$.

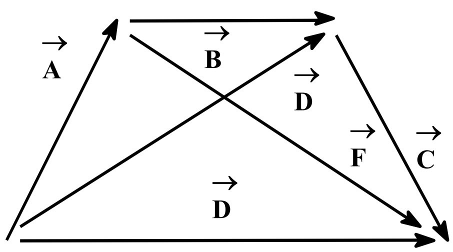
7. Soit **A_x=2 et A_y=4, B_x=4 et B_y=0, C_x=2 et C_y=-4**
D=12 et θ_D=300°, E=16 et θ_E=150°, F=60 et θ_F=-150°

Calculez le résultat des produits vectoriels suivants:

a) $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$
b) $\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{C}}$
c) $\vec{\mathbf{C}} \times \vec{\mathbf{D}}$
d) $\vec{\mathbf{D}} \times \vec{\mathbf{E}}$
e) $\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{F}}$

Solutions

1. a) 25 et 53° b) 30 et 0° c) 17 et 135°
   d) 141 et 225° e) 9 et -27°
2. a) 39 et 23 b) 0 et 18 c) -12 et 21 d) 0 et -56 e) 42 et -25
3.



4. a) $6\vec{i}+4\vec{j}$ b) $6\vec{i}+4\vec{j}$ c) $6\vec{i}-4\vec{j}$ d) $6\vec{i}-4\vec{j}$ e) $8\vec{i}$
5. a) R=38 et θ_R=37° b) R=40 et θ_R=19° c) R=20 et θ_R=-47°
   d) R=8,2 et θ_R=-163° e) R=69 et θ_R=-161°
6. a) 8 b) 8 c) 54 d) -166 e) 480
7. a) $-16\vec{k}$ b) $-16\vec{k}$ c) $3,2\vec{k}$ d) $-96\vec{k}$ e) $831\vec{k}$