Chapitre 9

Rotation d'un corps rigide autour d'un axe fixe

Objectif particulier 3.2

Employer les notions de moment de force, moment cinétique et moment d'inertie pour décrire le mouvement d'un corps rigide en rotation autour d'un axe fixe soumis à une ou plusieurs forces.

Vecteur moment de force

Le moment de force est ce qu'il faut appliquer à un corps pour le mettre en rotation. La définition vectorielle du moment de force est

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$$

où	$\vec{\boldsymbol{\tau}}$	est le vecteur moment de force en newtons-mètres,
	$\vec{\mathbf{r}}$	est le vecteur position (où est appliquée la force $\vec{\mathbf{F}}$) en mètres
et	$\vec{\mathbf{F}}$	est le vecteur force en newtons.

Note : Le vecteur position $\vec{\mathbf{r}}$ dépend toujours du choix de la position de l'origine.

Dans les applications courantes, tous les moments de force sont parallèles. Lors de l'addition de moments de force, il faudra cependant tenir compte de la convention de signe: un moment de force sera positif s'il tend à faire tourner le corps dans le sens anti-horaire (sens trigonométrique). Le moment de force algébrique est alors

$$\tau = \pm r F \sin\theta$$

où	τ	est le moment de force algébrique en newtons-mètres,
	r	est la position (où est appliquée la force $\vec{\mathbf{F}}$) en mètres,
	F	est la force en newtons
et	θ	est l'angle entre $\vec{\mathbf{r}}$ et $\vec{\mathbf{F}}$.

On définit communément le bras de levier par

$$d = r \sin\theta$$

où	d	est le bras de levier en mètres,
	r	est la position (où est appliquée la force $\vec{\mathbf{F}}$) en mètres
et	θ	est l'angle entre $\vec{\mathbf{r}}$ et $\vec{\mathbf{F}}$.

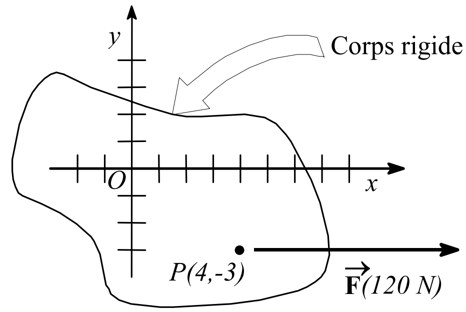
Ainsi, le moment de force peut se calculer par

$$\tau = \pm d\, F$$

où	τ	est le moment de force algébrique en newtons-mètres,
	d	est le bras de levier en mètres

et F est la force en newtons.

1. Une force horizontale de 120 N est appliquée à un point P situé à 5 m de l'origine et à 36,9° en-dessous de l'horizontale.



Avis : Utilisez le point d'origine indiqué sur la figure pour répondre aux questions suivantes.

a) Quelle est la longueur du bras de levier au point *P* ?

b) Quelle est la grandeur du moment de force ?

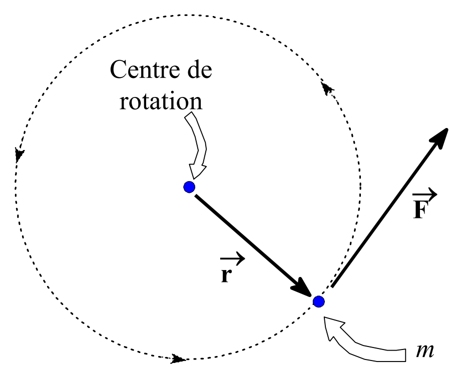
Moment d'inertie

Un moment de force exercé sur un corps est la cause d'une accélération angulaire. La relation de cause à effet pour une rotation autour d'un axe fixe est

$$\tau = I\,\alpha$$

où τ est le moment de force algébrique en newtons-mètres,
I est le moment d'inertie en kilogrammes mètres carrés
et α est l'accélération angulaire en radians par seconde carrée.

Pour une masse ponctuelle tournant positivement autour d'un point fixe et subissant une force perpendiculaire au rayon (θ =90°), on a



$$\begin{cases} F = m\,a \\ a = R\,\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tau = R\,F = R\,(\,m\,a) \\ = m\,R\,(\,R\,\alpha\,) = (\,m\,R^2\,)\,\alpha \\ = I\,\alpha \end{cases}$$

où F est la force en newtons,
m est la masse en kilogrammes,
a est l’accélération en mètres par seconde carré,
R est le rayon de la trajectoire circulaire en mètres,
α est l'accélération angulaire en radians par seconde carrée,
τ est le moment de force algébrique en newtons-mètres
et I est le moment d'inertie d'une masse ponctuelle en kilogrammes mètres carrés.

Si plusieurs masses ponctuelles sont mises en rotation par un moment de force, le moment d'inertie est

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots + m_i r_i^2 + \ldots + m_N r_N^2 = \sum m_i r_i^2$$

où I est le moment d'inertie d'une masse ponctuelle en kilogrammes mètres carrés,
m_1, m_2, m_3 sont les masses des particules n°1, n°2 et n°3 en kilogrammes,
m_i est la masse de la i^e particule en kilogrammes,
m_N est la masse de la N^e particule en kilogrammes,
r_1, r_2, r_3 sont les positions des particules n°1, n°2 et n°3 par rapport à l'axe de rotation en mètres,
r_i est la position de la i^e particule par rapport à l'axe de rotation en mètres
et r_N est la position de la N^e particule par rapport à l'axe de rotation en mètres.

Note : Si un corps est composé de plusieurs parties, le moment d'inertie total est la somme des moments d'inertie.

Pour des corps de forme simple, les moments d'inertie sont trouvés par calcul intégral. Les résultats du calcul intégral se trouvent dans le tableau en annexe.

2. Une corde est enroulée autour d'un cylindre plein. Une tension de 20 N dans la corde fait tourner le cylindre. Le cylindre possède une masse de 2 kg et un rayon de 10 cm.

a) Quel est le bras de levier qui permet à la force de faire tourner le cylindre ?

b) Quel est le moment de force exercé sur le cylindre ?

c) Quel est le moment d'inertie du cylindre ?

d) Quelle est l'accélération angulaire du cylindre ?

3. Deux roues pleines sont reliées par un essieu cylindrique. La masse des roues est de 18 kg et leur rayon est de 60 cm. L'essieu possède une masse de 6 kg et un rayon de 10 cm.

a) Quel est le moment d'inertie d'une roue ?

b) Quel est le moment d'inertie de l'essieu ?

c) Quel est le moment d'inertie des roues et de l'essieu ?

d) Quel est le moment de force nécessaire pour que les roues et l'essieu tournent avec une accélération angulaire de 2 rad/s^2 ?

4. Une échelle de 5 m de longueur est placée debout, puis on la laisse tomber. La masse de l'échelle est de 9 kg.

Note : Le poids de l'échelle est appliqué au centre de gravité et il exerce un moment de force faisant tourner l'échelle. L'axe de rotation est à l'extrémité de l'échelle en contact avec le sol.

a) Quel est le moment d'inertie de l'échelle par rapport à un axe de rotation passant perpendiculairement par son extrémité ?

Note : On considère l'échelle comme une tige mince.

b) Quel est le bras de levier qui permet au poids de faire tourner l'échelle lorsqu'elle est à 30° de la verticale ?

c) Quel est le moment de force exercé sur l'échelle lorsqu'elle est à 30° de la verticale ?

d) Quelle est l'accélération angulaire de l'échelle lorsqu'elle est à 30° de la verticale ?

Théorème des axes parallèles

Les moments d'inertie fournis en annexe sont valides pour les axes de rotation indiqués sur les figures géométriques. Pour la tige mince, on remarque que le moment d'inertie augmente lorsque l'axe de rotation s'éloigne du centre de masse du corps.

Le moment d'inertie pour un axe parallèle à celui passant par le centre de masse est

$$I = I_{CM} + m\,h^2$$

où I est le moment d'inertie en kilogrammes mètres carrés,
I_{CM} est le moment d'inertie par rapport à un axe passant par le centre de masse en kilogrammes mètres carrés,
m est la masse en kilogrammes
et h est la distance entre les axes parallèles en mètres.

Par exemple, pour le moment d'inertie d'une tige mince tournant autour d'un axe perpendiculaire situé à une extrémité, on a

$$\left\{\begin{aligned} I_{CM} &= \frac{1}{12} m\,L^2 \\ h &= \frac{L}{2} \end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} I_{tige} &= I_{CM} + m\,h^2 = \frac{1}{12} m\,L^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) m\,L^2 = \frac{1}{3} m\,L^2 \end{aligned}\right.$$

où I_{CM} est le moment d'inertie par rapport à un axe passant par le centre de masse en kilogrammes mètres carrés,
m est la masse en kilogrammes,
L est la longueur de la tige mince en mètres,
h est la distance entre les axes parallèles en mètres
et I_{tige} est le moment d'inertie de la tige mince par rapport à un axe perpendiculaire passant par son extrémité en kilogrammes mètres carrés.

Note : Les moments d'inertie du tableau en annexe sont donnés pour des axes passant par le centre sauf pour l'une des tiges.

Généralement, plus la répartition de la masse est éloignée de l'axe de rotation, plus le moment d'inertie est grand. Dans le cas de la tige mince, le moment d'inertie augmente lorsqu'il s'éloigne du centre de la tige.

5. Soit une plaque carrée de 3 kg et dont les côtés sont d'une longueur de 15 cm.

a) Quel est le moment d'inertie de la plaque pour un axe de rotation perpendiculaire à la plaque et passant par le centre de masse ?

b) Quel est le moment d'inertie de la plaque pour un axe de rotation perpendiculaire à la plaque et passant par le centre de l'un des côtés de la plaque ?

c) Quel est le moment d'inertie de la plaque pour un axe de rotation perpendiculaire à la plaque et passant par l'un des coins de la plaque ?

d) Quel est le moment d'inertie de la plaque pour un axe de rotation perpendiculaire à la plaque et situé à 20 cm du centre de masse de la plaque ?

6. Un haltère est constitué de deux sphères pleines de 20 kg et d'une tige mince de 5 kg. Le rayon des sphères est de 16 cm. La longueur de la tige est de 0,8 m.

Avis : Ne pas considérer les sphères comme des masses ponctuelles.

a) Quel est le moment d'inertie d'une sphère pour un axe passant par son centre ?

b) Quel est le moment d'inertie d'une sphère par rapport à un axe passant perpendiculairement au centre de la tige ?

c) Quel est le moment d'inertie de la tige pour un axe passant perpendiculairement par son centre ?

d) Quel est le moment d'inertie de l'haltère par rapport à un axe passant perpendiculairement au centre de la tige ?

7. Un pendule est fait d'une tige mince verticale de 100 g avec un disque de 500 g fixé au bas de la tige. La tige possède une longueur de 10 cm et le disque possède un rayon de 6 cm.

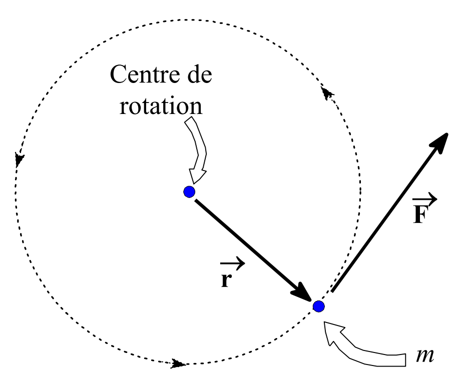
Note : Le pendule oscille à partir d'un axe perpendiculaire à la tige et passant par l'extrémité du haut du pendule.

a) Quel est le moment d'inertie de la tige mince par rapport à l'axe de rotation du pendule ?

b) Quel est le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe de rotation du pendule ?

c) Quel est le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe de rotation déjà mentionné ?

Énergie et puissance



Le travail effectué sur une masse ponctuelle tournant autour d'un point fixe est

$$W = F\Delta s$$

où W est le travail en joules,
F est la force en newtons

et Δs est le déplacement en mètres.

Pour un mouvement circulaire, le déplacement est

$$\Delta s = R\,\Delta\theta$$

où Δs est le déplacement en mètres,
$\Delta\theta$ est l'angle de rotation en radians
et R est le rayon de la trajectoire circulaire en mètres.

Ainsi, lors d'une rotation, le travail devient

$$W = F\,\Delta s = F\left(R\,\Delta\theta\right) = \left(R\,F\right)\Delta\theta = \tau\,\Delta\theta$$

où W est le travail en joules,
F est la force en newtons,
Δs est le déplacement en mètres,
R est le rayon de la trajectoire circulaire en mètres,
$\Delta\theta$ est l'angle de rotation en radians
et τ est le moment de force en newtons-mètres.

Ce résultat est valide pour tous les corps tournant autour d'un axe fixe lorsque la force est constante. Dans ce cas, le travail effectué lors d'une rotation est le produit du moment de force par l'angle de rotation.

On remarque que le moment de force est l'analogue de la force et que l'angle de rotation est l'analogue du déplacement. Il en va de même pour le moment d'inertie qui est l'analogue de la masse.

L'énergie cinétique, par analogie, est

$$K = \frac{1}{2}\,I\,\omega^2$$

où K est l'énergie cinétique en joules,
I est le moment d'inertie en kilogrammes mètres carrés
et ω est la vitesse angulaire en radians par seconde.

La conservation de l'énergie s'applique aussi à la rotation.

Finalement, la puissance est

$$\mathcal{P} = \tau\,\omega$$

où $\mathcal{P}$ est la puissance en watts,
τ est le moment de force en newtons-mètres
et ω est la vitesse angulaire en radians par seconde.

Cette relation est valide seulement si le moment de force est constant.

Note : La puissance est constante si le moment de force et la vitesse angulaire sont constants.

8. Un ventilateur tourne à une vitesse angulaire (constante) de 8,75 rad/s. Le moment d'inertie du ventilateur est de 0,7 kg·m^2. La puissance du ventilateur est de 22 W.

a) Quel est le moment de force exercé sur le ventilateur ?

b) Quelle est l'énergie cinétique du ventilateur ?

c) Quel est le travail effectué lors d'un tour complet (2π rad) du ventilateur ?

d) Quelle serait l'accélération angulaire du ventilateur s'il n'y avait pas le frottement de l'air ?

9. Un tourne-disque passe de 0 à 33$^1/_3$ rpm (3,49 rad/s) en 1 s. Le plateau du tourne-disque possède un moment d'inertie de 0,05 kg·m^2.

a) Quelle est l'accélération angulaire du tourne-disque ?

b) Quel est le moment de force exercé sur le plateau lorsqu'il tourne à 33$^1/_3$ rpm ?

c) Quelle est l'énergie cinétique du plateau du tourne-disque lorsqu'il tourne à 33$^1/_3$ rpm ?

d) Quel est le travail effectué sur le plateau pour lui donner une vitesse de 33$^1/_3$ rpm ?

10. Un moteur de 746 W tourne à la vitesse de 1800 rpm (188,5 rad/s). Le moment d'inertie du rotor et de l'arbre de transmission est de 0,1 kg·m^2. On néglige les pertes possibles.

a) Quel est le moment de force fourni par le moteur ?

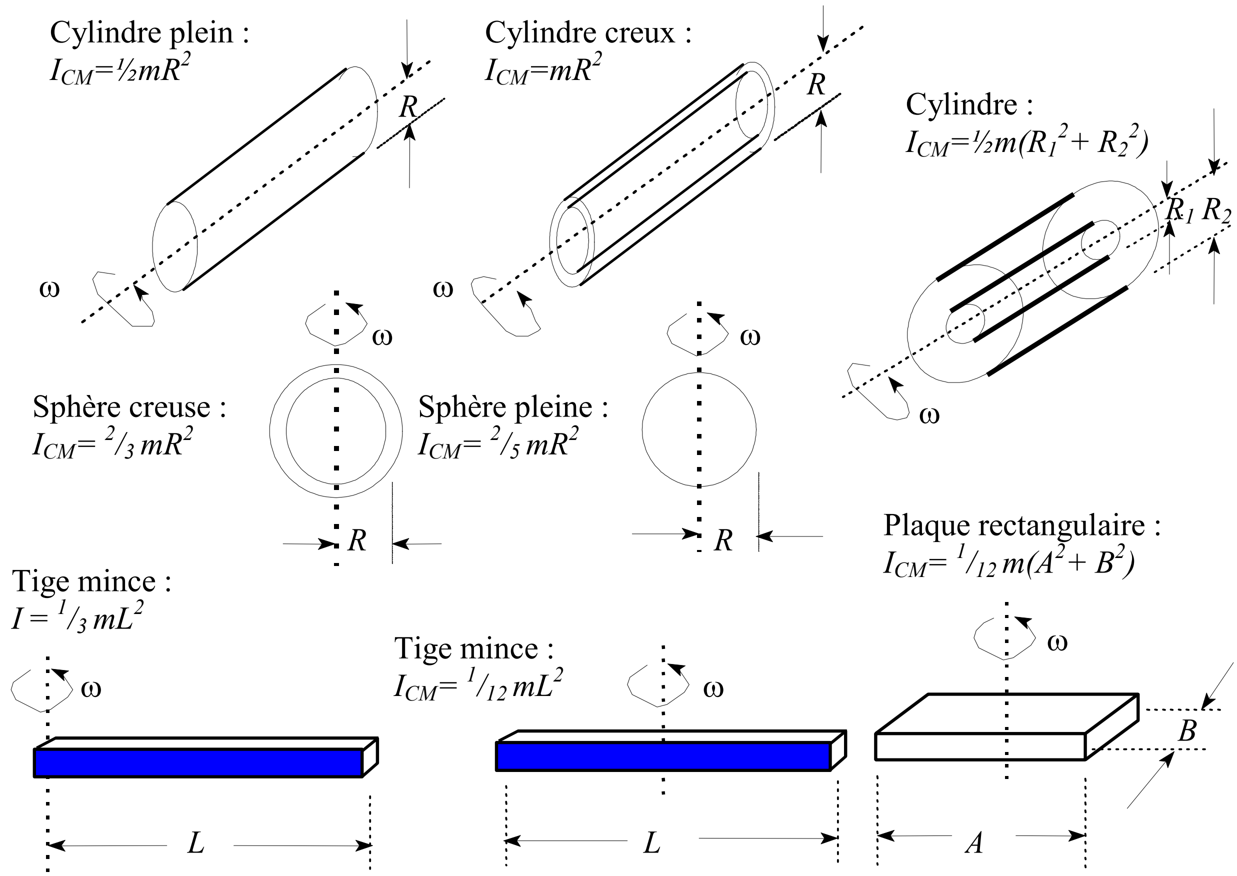
b) Quel est le travail effectué par le moteur à chaque tour ?

c) Quelle est l'énergie cinétique du moteur ?

Solutions

1. a) 3 m b) 360 N·m
2. a) 10 cm b) 2 N·m c) 0,01 kg·m^2 d) 200 rad/s^2
3. a) 3,24 kg·m^2 b) 0,03 kg·m^2 c) 6,51 kg·m^2 d) 13,02 N·m
4. a) 75 kg·m^2 b) 1,25 m c) 110,25 N·m d) 1,47 rad/s^2
5. a) 0,011 250 kg·m^2 b) 0,028 125 kg·m^2 c) 0,044958 kg·m^2 d) 0,131 250 kg·m^2
6. a) 0,204 8 kg·m^2 b) 6,476 8 kg·m^2 c) 0,266 7 kg·m^2 d) 13,220 3 kg·m^2
7. a) 0,000 333 kg·m^2 b) 0,013 7 kg·m^2 c) 0,014 033 kg·m^2
8. a) 2,514 3 N·m b) 26,797 J c) 15,798 J d) 3,592 rad/s^2
9. a) 3,49 rad/s^2 b) 0,174 5 N·m c) 0,304 5 J d) 0,304 5 J
10. a) 3,958 N·m b) 24,87 J c) 1,777 kJ

Annexe: Moments d'inertie pour des formes géométriques simples



Note : Le moment d'inertie d'un disque plein est le même que celui d'un cylindre plein. L'épaisseur n'a pas d'importance. De même, l'épaisseur d'une plaque n'a pas d'importance.