Chapitre 10

Loi de gravitation universelle et mouvement orbital

Objectif particulier 3.3

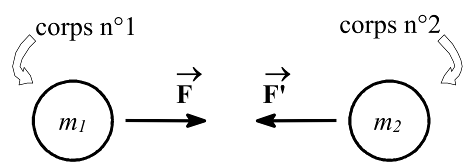
Connaître la loi de gravitation universelle de Newton et les lois de Kepler, puis les employer pour décrire le mouvement des planètes.

Gravitation universelle

La loi de la gravitation universelle de Newton est à la base de la théorie expliquant une grande variété de phénomène allant du mouvement des planètes à la chute des corps en passant par le flux et le reflux des marées. Elle permet d'exprimer la force gravitationnelle agissant entre les corps.

La force gravitationnelle entre deux corps est

$$F = \frac{G\, m_1 m_2}{r^2}$$



Note: $\vec{F} = \vec{F}'$

où	F	est la force gravitationnelle exercée sur les corps en newtons,
	G	est la constante de gravitation ($6{,}672 \cdot 10^{-11}$ N·m^2/kg^2),
	m_1, m_2	sont les masses des corps n^{o}1 et n^{o}2 en kilogrammes
et	r	est la distance (de centre à centre) en mètres.

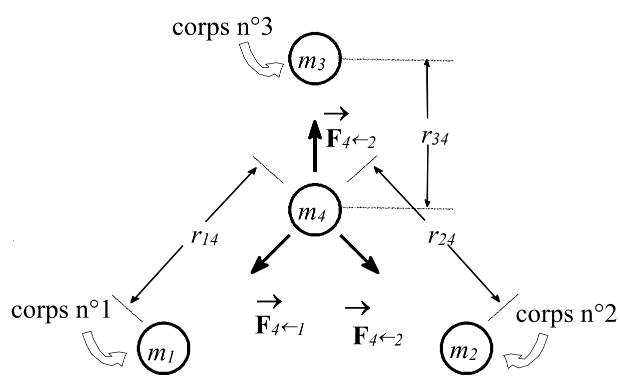
Note : La force gravitationnelle est une force d'attraction entre les corps. Le 1er corps attire le 2^e corps. Le 2^e corps attire le 1er corps.

S'il y a plus de deux corps, il faut considérer la présence de plus d'une force d'attraction exercée sur les corps. Chaque corps subit une force d'attraction qui est la résultante des forces gravitationnelles exercées par les corps voisins.

Pour un corps entouré de trois voisins, on a

$$\vec{F}_4 = \vec{F}_{4\leftarrow 1} + \vec{F}_{4\leftarrow 2} + \vec{F}_{4\leftarrow 3}$$

où	$\vec{F}_4$	est la force résultante exercée sur le corps n°4 en newtons,
et	$\vec{F}_{4\leftarrow 1}$, $\vec{F}_{4\leftarrow 2}$, $\vec{F}_{4\leftarrow 3}$	sont les forces d'attraction exercée par les corps n°1, n°2 et n°3 sur le corps n°4 en newtons.



Note : La force $\vec{F}$ résultante est obtenue par la somme vectorielle des forces $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ en présence.

Dans le cas précédent, les forces entre les corps voisins se calculent avec

$$\begin{cases} F_{4\leftarrow 1} = \dfrac{G\ m_1\ m_4}{r_{14}^2} \\ F_{4\leftarrow 2} = \dfrac{G\ m_2\ m_4}{r_{24}^2} \\ F_{4\leftarrow 3} = \dfrac{G\ m_3\ m_4}{r_{34}^2} \end{cases}$$

où $\vec{\mathbf{F}}_{4\leftarrow 1}$, $\vec{\mathbf{F}}_{4\leftarrow 2}$, $\vec{\mathbf{F}}_{4\leftarrow 3}$ sont les forces d'attraction exercée par les corps n°1, n°2 et n°3 en newtons,

G est la constante de gravitation ($6{,}672\cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$),

m_1, m_2, m_3 sont les masses des corps n°1, n°2 et n°3 au voisinage en kilogrammes,

r_{14}, r_{24}, r_{34} sont les distances (de centre à centre) entre les corps n°1, n°2 et n°3 et le corps n°4 en mètres

et m_4 est la masse du corps n°4 en kilogrammes.

Note : La force exercée sur le corps n°4 est la force résultante produite par l'attraction des corps voisins.

Si on veut considérer les forces gravitationnelles agissant entre chaque corps d'un système de particules, il convient d'employer une notation permettant d'identifier chaque force. La notation devra indiquer quel corps exerce une force sur un autre corps.

Pour deux corps, cette notation donne

$$\vec{\mathbf{F}}_{2\leftarrow 1} = -\vec{\mathbf{F}}_{1\leftarrow 2}$$

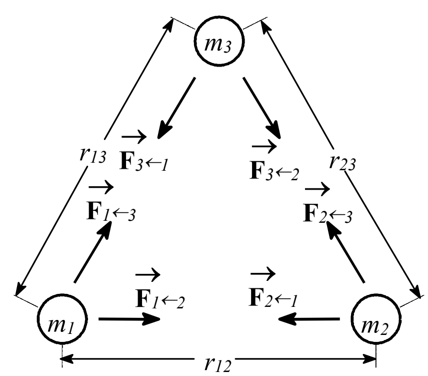
où $\vec{\mathbf{F}}_{2\leftarrow 1}$ est la force exercée par le corps n°1 sur le corps n°2 en newtons

et $\vec{\mathbf{F}}_{1\leftarrow 2}$ est la force exercée par le corps n°2 sur le corps n°1 en newtons.

Note: D'après la 3e loi de Newton (celle de l'action et de la réaction), la force exercée par le corps n°1 sur le corps n°2 est égale et opposée la force exercée par le corps n°2 sur le corps n°1.

Pour trois corps, on a

$$\begin{cases} F_{1\leftarrow 2} = F_{2\leftarrow 1} = \dfrac{G\, m_1\, m_2}{r_{12}^2} \\ F_{2\leftarrow 3} = F_{3\leftarrow 2} = \dfrac{G\, m_2\, m_3}{r_{23}^2} \\ F_{1\leftarrow 3} = F_{3\leftarrow 1} = \dfrac{G\, m_1\, m_3}{r_{13}^2} \end{cases}$$

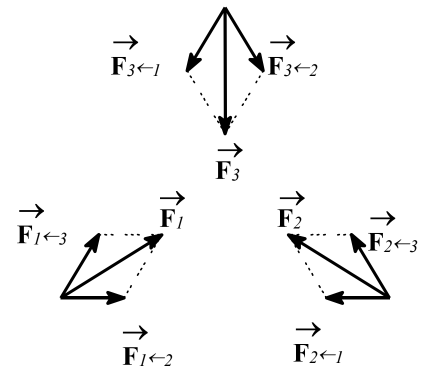


où $\vec{\mathbf{F}}_{1\leftarrow 2}, \vec{\mathbf{F}}_{2\leftarrow 1}$ sont les forces exercées entre les corps n°1 et n°2 en newtons,

$\vec{\mathbf{F}}_{2\leftarrow 3}, \vec{\mathbf{F}}_{3\leftarrow 2}$	sont les forces exercées entre les corps n°2 et n°3 en newtons,
$\vec{\mathbf{F}}_{1\leftarrow 3}, \vec{\mathbf{F}}_{3\leftarrow 1}$	sont les forces exercées entre les corps n°1 et n°3 en newtons,
G	est la constante de gravitation (G =6,672·10^{-11} N·m^2/kg^2),
m_1, m_2, m_3	sont les masses des corps n°1, n°2 et n°3 au voisinage en kilogrammes
et r_{12}, r_{23}, r_{13}	sont les distances des corps voisins en mètres.

Dans le cas précédent, les forces résultantes exercées sur les corps n°1, n°2 et n°3 se calculent avec

$$\begin{cases} \vec{F}_1 = \vec{F}_{1\leftarrow 2} + \vec{F}_{1\leftarrow 3} \\ \vec{F}_2 = \vec{F}_{2\leftarrow 1} + \vec{F}_{2\leftarrow 3} \\ \vec{F}_3 = \vec{F}_{3\leftarrow 1} + \vec{F}_{3\leftarrow 2} \end{cases}$$



où $\vec{\mathbf{F}}_1, \vec{\mathbf{F}}_2, \vec{\mathbf{F}}_3$	sont les forces gravitationnelles résultantes sur les corps n° 1, n°2 et n°3 en newtons,
$\vec{\mathbf{F}}_{1\leftarrow 2}, \vec{\mathbf{F}}_{2\leftarrow 1}$	sont les forces exercées entre les corps n°1 et n°2 en newtons,
$\vec{\mathbf{F}}_{2\leftarrow 3}, \vec{\mathbf{F}}_{3\leftarrow 2}$	sont les forces exercées entre les corps n°2 et n°3 en newtons
et $\vec{\mathbf{F}}_{1\leftarrow 3}, \vec{\mathbf{F}}_{3\leftarrow 1}$	sont les forces exercées entre les corps n°1 et n°3 en newtons.

Note : La force résultante exercée sur un corps est la somme vectorielle des forces en présence exercées sur ce corps.

1. Un corps de 8 kg est à 12 m d'un corps de 10 kg situé du coté gauche et à 15 m d'un corps de 5 kg situé du côté droit.

a) Quelles sont la grandeur et l'orientation de la force gravitationnelle exercée sur le corps de 8 kg ?

b) Quelles sont la grandeur et l'orientation de la force gravitationnelle exercée sur le corps de 10 kg ?

c) Quelles sont la grandeur et l'orientation la force gravitationnelle exercée sur le corps de 5 kg ?

2. Trois corps de 12 kg sont situés aux coins d'un carré de 10 m. Un 4^e corps de 10 kg est situé dans le 4^e coin.

a) Quelle est la grandeur de la force gravitationnelle exercée sur le corps de 10 kg ?

b) Quelle est l'orientation de la force gravitationnelle exercée sur le corps de 10 kg ?

Champ gravitationnel

La force gravitationnelle près de la surface de la Terre est le poids. Le poids aux chapitres précédents était calculé à l'aide de l'accélération de gravité. À l'aide de la loi de gravitation universelle de Newton et le poids, on a

$$\frac{G\,m_T\,m}{R_T^2} = m\,g \quad \Rightarrow \quad g = \frac{G\,m_T}{R_T^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{(\,6{,}37 \cdot 10^{6}\,)^2} = 9{,}8\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$$

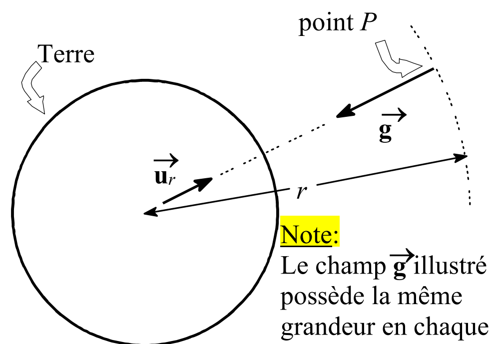
où G est la constante de gravitation (G =6,672·10^{-11} N·m^2/kg^2),
m_T est la masse de la Terre (m_T =5,98·10^{24} kg),
m est la masse du corps en kilogrammes,
R_T est le rayon de la Terre (R_T =6,37·10^6 m)
et g est le champ gravitationnel (g =9,8 m/s^2 près de la surface de la Terre).

Le champ gravitationnel est également l'accélération d'un corps en chute libre. Près de la surface de la Terre, l'accélération d'un corps en chute libre est de 9,806 65 m/s^2 en moyenne. En pratique, le champ gravitationnel varie d'un point à l'autre au voisinage de la Terre.

Note: La direction du champ gravitationnel près de la surface de la Terre sert à définir rigoureusement la verticale du lieu.

Le champ gravitationnel représente la grandeur et la direction de l'accélération de gravité dans l'espace autour de la Terre ou ailleurs. Le champ gravitationnel autour de la Terre se calcule avec

$$\vec{\mathbf{g}} = -\frac{G\ m_T}{r^2}\,\vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}}$$



où $\vec{\mathbf{g}}$ est le vecteur champ gravitationnel au point *P* en newtons par mètre,
G est la constante de gravitation (G =6,672·10^{-11} N·m^2/kg^2),
m_T est la masse de la Terre (m_T =5,98·10^{24} kg),
r est la distance entre le point *P* et le centre de la Terre en mètres
et $\vec{\mathbf{u}}$ est le vecteur unitaire en direction du point *P*.

Note: Le champ gravitationnel est dirigé en sens contraire du vecteur unitaire, d'où la présence du signe négatif dans l'équation.

3. Le Soleil possède une masse de 1,99·10^{30} kg, la Terre possède une masse de 5,98·10^{24} kg et la Lune possède une masse de 7,36·10^{22} kg. L'orbite de la Terre autour du Soleil possède un rayon moyen de 1,496·10^{11} m et l'orbite de la Lune autour de la Terre possède un rayon moyen de 3,84·10^8 m.

a) Quelle est la grandeur du champ gravitationnel moyen du Soleil le long de l'orbite de la Terre ?

b) Quelle est la grandeur du champ gravitationnel moyen de la Lune le long de l'orbite de la Terre ?

4. Un fusée Apollo fait un voyage de la Terre à la Lune. La Lune se trouve à $3{,}84{\cdot}10^{8}$ m de la Terre. La Terre possède une masse de $5{,}98{\cdot}10^{24}$ kg et la Lune possède une masse de $7{,}36{\cdot}10^{22}$ kg.

a) Quel est la grandeur du champ gravitationnel de la Terre lorsque la fusée se trouve à mi-chemin entre la Terre et la Lune ?

b) Quel est la grandeur du champ gravitationnel de la Lune lorsque la fusée se trouve à mi-chemin entre la Terre et la Lune ?

c) Quel est le champ gravitationnel net lorsque la fusée se trouve à mi-chemin entre la Terre et la Lune ?

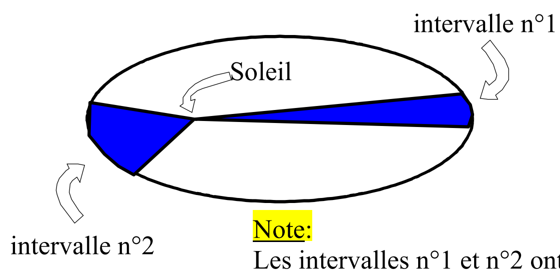
d) À quelle distance du centre de la Terre le champ gravitationnel net est-il nul ?

Lois de Kepler

Les observations astronomiques effectuées sur le mouvement des planètes par Tycho Brahé ont permis à Johannes Kepler de formuler trois lois appelées lois de Kepler.

La 1re loi de Kepler affirme que les planètes possèdent des orbites elliptiques où le Soleil se trouve à l'un des foyers.

La 2e loi de Kepler affirme que la droite joignant une planète au Soleil balaye des aires égales en des temps égaux.



Note:
Les intervalles n°1 et n°2 ont des durées égales.

La 3e loi de Kepler affirme que le carré de la période de révolution d'une planète autour du Soleil est proportionnel au cube du rayon moyen de son orbite.

Note : Le rayon moyen d'une orbite elliptique est égal au demi-grand axe de l'ellipse.

Mathématiquement, la 3e loi de Kepler s'écrit sous la forme

$$T^2 = \kappa_S\, a^3$$

où T est la période en secondes,
κ_S est une constante de proportionnalité pour le Soleil en secondes carrées par mètre cube
et a est le demi-grand axe en mètres.

Note : La constante κ_S est la même pour toutes les planètes en orbite autour du Soleil. Une autre constante κ_T existe pour les satellites en orbite autour de la Terre (incluant la Lune).

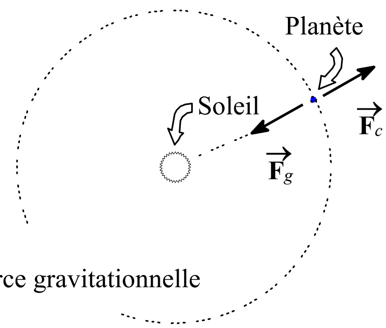
La constante κ_S est déterminée par l'équilibre de la force gravitationnelle et de la force centripète exercées sur la planète; soit

$$\frac{G\, m_S\, m_P}{a^2} = \frac{m_P\, v_P^2}{a} \quad \Rightarrow \quad v_P = \sqrt{\frac{G\, m_S}{a}}$$

$$v_P = \frac{2\,\pi\, a}{T} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{G\, m_S}{a} = \dfrac{4\,\pi^2\, a^2}{T^2} \\ T^2 = \left(\dfrac{4\,\pi^2}{G\, m_S}\right) a^3 \end{cases}$$

$$T^2 = \kappa_S\, a^3 \quad \Rightarrow \quad \kappa_S = \frac{4\,\pi^2}{G\, m_S}$$

Note:
On suppose une orbite circulaire.



Note:

$\mathbf{F}_g$: force gravitationnelle

$\mathbf{F}_c$: force centrifuge

où κ_S est une constante de proportionnalité pour le Soleil en secondes carrées par mètre cube,
G est la constante de gravitation (G =6,672·10^{-11} N·m^2/kg^2)
et m_S est la masse du Soleil (m_S =1,99·10^{30} kg).

5. Le Soleil possède une masse de 1,99·10^{30} kg et la Terre possède une masse de 5,98·10^{24} kg. L'orbite de la Terre autour du Soleil possède un rayon moyen de 1,496·10^{11} m et l'orbite de la Lune autour de la Terre possède un rayon moyen de 3,84·10^{8} m.

a) Quelle est la constante κ_S pour le Soleil ?

b) Quelle est la période de révolution de la Terre ?

c) Quelle est la constante κ_T pour la Terre ?

d) Quelle est la période de révolution de la Lune ?

Moment cinétique

Une planète en rotation autour du Soleil possède un moment cinétique donné par

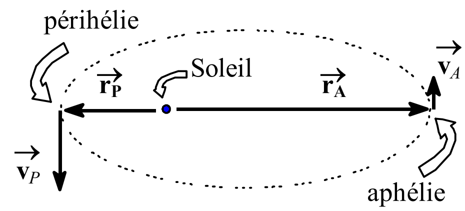
$$\vec{\mathbf{L}} = m\left(\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right)$$

où $\vec{\mathbf{L}}$ est le vecteur moment cinétique en kilogrammes mètres carrés par seconde,
m est la masse du corps en kilogrammes,
$\vec{\mathbf{r}}$ est le vecteur position par rapport au Soleil en mètres
et $\vec{\mathbf{v}}$ est la vitesse orbitale en mètres par seconde.

Note : On a négligé la contribution au moment cinétique due à la rotation de la planète sur elle-même.

Le moment cinétique étant l'analogue de la quantité de mouvement, en l'absence de moment de force extérieur, le moment cinétique se conserve. Le principe de conservation du moment cinétique impose une condition au mouvement des planètes qui permet de déduire la 2^{e} loi de Kepler.

La conservation du moment cinétique appliquée à deux points appelés périhélie et aphélie donne la relation

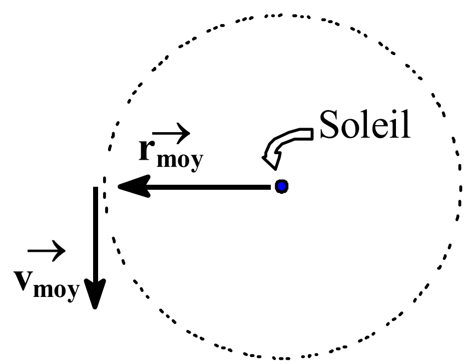


$$r_P v_P = r_A v_A$$

où r_P est la distance par rapport au Soleil au périhélie en mètres,
v_P est la vitesse orbitale au périhélie en mètres par seconde,
r_A est la distance par rapport au Soleil au aphélie en mètres
et v_A est la vitesse orbitale au aphélie en mètres par seconde.

Note: Le périhélie est le point de l'orbite le plus rapproché du Soleil. L'aphélie est le point de l'orbite le plus éloigné du Soleil. L'angle entre $\vec{\mathbf{r}}$ et $\vec{\mathbf{v}}$ au périhélie et à l'aphélie est de 90°; donc, à ces points, $L = m\,v\,r\,\sin\theta = m\,v\,r\,\sin 90° = m\,v\,r$, ce qui entraîne que $r_P v_P = r_A v_A$ selon le principe de conservation du moment cinétique.

Pour $\theta = 90°$, le moment cinétique pour une trajectoire elliptique est le même que celui d'une trajectoire circulaire dont le rayon est la moyenne des distances au périhélie et à l'aphélie avec une vitesse (constante) donnée par la moyenne des vitesses au périhélie et à l'aphélie. Ainsi, on a



$$r_P v_P = r_A v_A = r_{moy} v_{moy}$$

où r_P est la distance par rapport au Soleil au périhélie en mètres,
v_P est la vitesse orbitale au périhélie en mètres par seconde,
r_A est la distance par rapport au Soleil au aphélie en mètres,
v_A est la vitesse orbitale au aphélie en mètres par seconde,
r_{moy} est la distance moyenne par rapport au Soleil sur l'orbite elliptique en mètres
et v_{moy} est la vitesse moyenne sur l'orbite elliptique en mètres par seconde.

6. La Terre possède une masse de 5,98·10^{24} kg. Sa distance au périhélie est de 1,471·10^{11} m et sa distance à l'aphélie est de 1,521·10^{11} m. La vitesse orbitale moyenne est de 2,977·10^{4} m/s.

a) Quel est le moment cinétique orbital de la Terre ?

b) Quelle est la vitesse orbitale de la Terre au périhélie ?

c) Quelle est la vitesse orbitale de la Terre à l'aphélie ?

Conservation de l'énergie

La conservation de l'énergie appliquée à deux points appelés périhélie et aphélie donne la relation

$$\begin{cases} \dfrac{G\, m_S\, m_P}{r_P} - \dfrac{G\, m_S\, m_P}{r_A} = \dfrac{1}{2} m_P\, v_P^2 - \dfrac{1}{2} m_P\, v_A^2 \\ 2\, G\, m_S \left(\dfrac{1}{r_P} - \dfrac{1}{r_A} \right) = v_P^2 - v_A^2 \end{cases}$$

où G est la constante de gravitation (G =6,672·10^{-11} N·m^2/kg^2)
m_S est la masse du Soleil (m_S =1,99·10^{30} kg).
m_P est la masse de la planète en kilogrammes,
r_P est la distance par rapport au Soleil au périhélie en mètres,
r_A est la distance par rapport au Soleil au aphélie en mètres,
v_P est la vitesse orbitale au périhélie en mètres par seconde
et v_A est la vitesse orbitale au aphélie en mètres par seconde.

Note : Cette relation est valide pour tous les points sur l'orbite.

7. **Le Soleil possède une masse de 1,99·10^{30} kg. La vitesse orbitale de la Terre est de 2,977·10^4 m/s lorsqu'elle se trouve à une distance de 1,496·10^{11} m par rapport au Soleil.**

a) Quelle est la vitesse orbitale de la Terre lorsqu'elle se trouve à une distance de 1,480·10^{11} m du Soleil ?

b) Quelle est la vitesse orbitale de la Terre lorsqu'elle se trouve à une distance de 1,490·10^{11} m du Soleil ?

c) Quelle est la vitesse orbitale de la Terre lorsqu'elle se trouve à une distance de 1,500·10^{11} m du Soleil ?

d) Quelle est la vitesse orbitale de la Terre lorsqu'elle se trouve à une distance de 1,510·10^{11} m du Soleil ?

Vitesses au périhélie et à l'aphélie

Les principes de la conservation du moment cinétique et de l'énergie donnent deux relations permettant de trouver les vitesses orbitales au périhélie et à l'aphélie; soit

$$\begin{cases} r_P\, v_P = r_A\, v_A \\ 2\, G\, m_S \left(\dfrac{1}{r_P} - \dfrac{1}{r_A} \right) = v_P^2 - v_A^2 \\ a = \dfrac{r_P + r_A}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_A^2 = \dfrac{G\, m_S}{a} \dfrac{r_P}{r_A} \\ v_P^2 = \dfrac{G\, m_S}{a} \dfrac{r_A}{r_P} \end{cases}$$

où r_P est la distance par rapport au Soleil au périhélie en mètres,
v_P est la vitesse orbitale au périhélie en mètres par seconde,
r_A est la distance par rapport au Soleil au aphélie en mètres,
v_A est la vitesse orbitale au aphélie en mètres par seconde,
G est la constante de gravitation (G =6,672·10^{-11} N·m^2/kg^2),
m_S est la masse du Soleil (m_S =1,99·10^{30} kg)
et a est le demi-grand axe en mètres.

Note: Le demi-grand axe de l'orbite d'une planète donne la même chose que la distance moyenne par rapport au Soleil sur l'orbite elliptique en mètres.

8. La masse de la Terre est de 5,98·10^{24} kg. La distance de la Lune par rapport au centre de la Terre est de 3,56·10^8 m au périgée et de 4,07·10^8 m à l'apogée.

Note: Le périgée et l'apogée pour les satellites en orbite autour de la Terre sont les analogues du périhélie et de l'aphélie pour les planètes en orbite autour du Soleil.

a) Quel est le demi-grand axe de l'orbite elliptique de la Lune ?

b) Quelle est la vitesse orbitale de la Lune au périgée ?

c) Quelle est la vitesse orbitale de la Lune à l'apogée ?

Solutions

1. a) 2,52·10^{-11} N vers la gauche b) 4,16·10^{-11} N vers la droite
   c) 1,64·10^{-11} N vers la gauche
2. a) 15,325·10^{-11} b) vers le centre
3. a) 0,005 90 N/kg b) 0,000 033 3 N/kg
4. a) 0,010 823 N/kg b) 0,000 133 N/kg c) 0,010 690 N/kg
   d) 3,456·10^8 m de la Terre
5. a) 2,973 4·10^{-19} s^2/m^3 b) 3,167 8·10^7 s c) 9.894 70·10^{-14} s^2/m^3
   d)2,367 00·10^6 s
6. a) 2,663·10^{40} kg·m^2/s b) 3,028·10^4 m/s c) 2,928·10^4 m/s
7. a) 3,009·10^4 m/s b) 2,989·10^4 m/s c) 2,969·10^4 m/s d) 2,949·10^4 m/s
8. a) 3,815·10^8 m b) 1,093 5·10^3 m/s c) 0,956 44·10^3 m/s