Chapitre 5

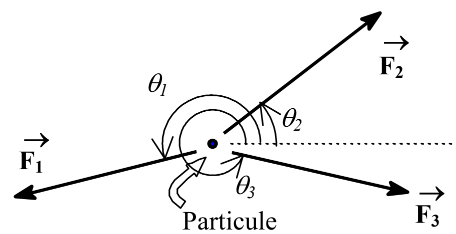
Équilibre statique

Objectif particulier 2.2

Employer les notions de moment de force et de centre de masse dans les équations d'équilibre statique d'un corps rigide soumis à plusieurs forces.

Équilibre de translation

Lorsque la somme vectorielle des forces (force résultante) est nulle, le corps ne possède pas d'accélération. Le mouvement est alors uniforme (à vitesse constante).



Le cas particulier où la force résultante est nulle est celui de l'équilibre de translation. Dans ce cas, si la vitesse est nulle et puisqu'il n'y a pas d'accélération, un corps au repos demeure au repos.

Dans le cas où plusieurs forces sont exercées sur le corps, la condition pour avoir l'équilibre de translation est

$$0 = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{1}} + \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{2}} + \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{3}} + \ldots + \vec{\mathbf{F}}_{i} + \ldots + \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{N}}$$

où $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{i}}$ est le i^e vecteur force en newtons,

$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{1}}, \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{2}}, \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{3}}$ sont les vecteurs forces n°1, n°2 et n°3 en newtons

et $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{N}}$ est le N^e vecteur force en newtons.

Cette condition d'équilibre des forces se transforme en trois conditions d'équilibre (en 3-D) pour les composantes des forces, soit

$$\begin{cases} 0 = \sum_{i=1}^{N} F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \ldots + F_{ix} + \ldots + F_{Nx} \\ 0 = \sum_{i=1}^{N} F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \ldots + F_{iy} + \ldots + F_{Ny} \\ 0 = \sum_{i=1}^{N} F_{iz} = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + \ldots + F_{iz} + \ldots + F_{Nz} \end{cases}$$

où F_{ix} est la composante *x* du i^e vecteur force en newtons,

F_{iy} est la composante *y* du i^e vecteur force en newtons,

F_{iz} est la composante *z* du i^e vecteur force en newtons,

F_{1x}, F_{2x}, F_{3x} sont les composantes *x* des vecteurs forces n°1, n°2 et n°3 en newtons,

F_{1y}, F_{2y}, F_{3y} sont les composantes *y* des vecteurs forces n°1, n°2 et n°3 en newtons,

	F_{1z}, F_{2z}, F_{3z}	sont les composantes *z* des vecteurs forces n°1, n°2 et n°3 en newtons,
	F_{Nx}	est la composante *x* du *N*e vecteur force en newtons,
	F_{Ny}	est la composante *y* du *N*e vecteur force en newtons
et	F_{Nz}	est la composante *z* du *N*e vecteur force en newtons.

1. Un corps est en équilibre de translation. Une force dirigée vers la droite possédant une grandeur de 33 N est exercée sur le corps. Une *2*e force dirigée vers la gauche possédant une grandeur de 100 N est aussi exercée sur le corps.

a) Quelle est la direction d'une *3*e force exercée sur le corps qui permet de maintenir le corps au repos ?

b) Quelle est la grandeur d'une *3*e force exercée sur le corps qui permet de maintenir le corps au repos ?

2. Trois forces sont exercées sur un corps en équilibre de translation. La *1*re force possède une grandeur de 12 N et une direction à 120°. La *2*e force possède une grandeur de 15 N et une direction à 225°.

a) Quelle est la composante x de la *3*e force ?

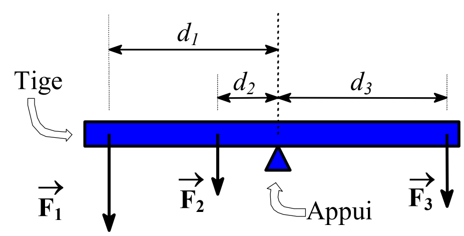
b) Quelle est la composante y de la *3*e force ?

c) Quelle est la grandeur de la *3*e force ?

d) Quelle est la direction de la *3*e force ?

Équilibre de rotation pour les forces parallèles

Pour qu'une tige horizontale subissant des forces verticales vers le bas soit en équilibre, il faut satisfaire la condition d'équilibre de rotation. Si la tige est retenue par un appui au centre de masse, le poids de la tige n'intervient pas dans l'équilibre de rotation.



Dans le cas d'une tige, la condition d'équilibre de rotation est

$$0 = \sum_{i=1}^{N} \left(\pm\, d_i F_i\right) = \pm\, d_1 F_1 \pm d_2 F_2 \pm d_3 F_3 \pm \ldots \pm d_i F_i \pm \ldots \pm d_N F_N$$

ù	d_i	est le *i*e bras de levier en mètres,
	F_i	est la *i*e force en newtons,
	d_1, d_2, d_3	sont les bras de levier n°1, n°2 et n°3 en mètres,
	F_1, F_2, F_3	sont les forces n°1, n°2 et n°3 en newtons,
	d_N	est le *N*e bras de levier en mètres
et	F_N	est la *N*e force en newtons.

Le bras de levier est la distance entre la point où est exercé la force et le point d'appui. Le signe dans l'équation dépend de quel côté de l'appui se trouve le point où est exercé la force.

Note : Le produit de la force par le bras de levier, en incluant le signe ±, est appelé moment de force algébrique.

S'il y a qu'une force exercée vers le bas de chaque côté sur une tige horizontale, l'équation d'équilibre de rotation devient

$$d_1 \; F_1 \; = \; d_2 \; F_2$$

ù d_1, d_2 sont les bras de levier n°1et n°2 en mètres,
et F_1, F_2 sont les forces n°1 et n°2 en newtons.

Note : Ceci est la loi du bras de levier.

3. Une force verticale de 40 N est exercée vers le bas sur une tige horizontale à une distance de 20 cm à la gauche du point d'appui. Une *2^e^* force est exercée vers le bas sur la tige à une distance de 30 cm du point d'appui.

a) De quelle côté est placée la *2^e^* force afin de maintenir la tige en équilibre horizontal ?

b) Quelle est la grandeur de la *2^e^* force afin de maintenir la tige en équilibre horizontal ?

4. Une force verticale de 60 N est exercée vers le bas sur une tige horizontale à une distance de 40 cm à la gauche du point d'appui. Une *2^e^* force de 30 N est exercée vers le bas sur la tige à une distance de 50 cm du point d'appui à la droite du point d'appui. Une *3^e^* force est exercée vers le bas sur la tige à une distance de 20 cm du point d'appui.

a) De quelle côté est placée la *3^e^* force afin de maintenir la tige en équilibre horizontal ?

b) Quelle est la grandeur de la *3^e^* force afin de maintenir la tige en équilibre horizontal ?

Équilibre de rotation pour des forces quelconques

L'équation d'équilibre de rotation est

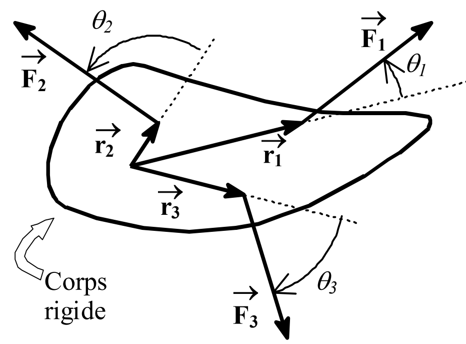
$$0 = \sum_{i=1}^{N} \left(r_i \, F_i \sin \theta_i \right) = r_1 \, F_1 \sin \theta_1 + r_2 \, F_2 \sin \theta_2 + r_3 \, F_3 \sin \theta_3 + \ldots$$
$$+ \, r_i \, F_i \sin \theta_i + \ldots + r_N \; F_N \sin \theta_N$$

où r_i est la i^e position (du i^e vecteur force) en mètres,
F_i est la i^e force en newtons,
θ_i est l'angle de $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{i}}$ par rapport à $\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{i}}$ en degrés,
r_1, r_2, r_3 sont les positions n°1, n°2 et n°3 en mètres,
F_1, F_2, F_3 sont les forces n°1, n°2 et n°3 en newtons,

	θ_1	est l'angle de $\vec{\mathbf{F}}_1$ par rapport à $\vec{\mathbf{r}}_1$ en degrés,
	θ_2	est l'angle de $\vec{\mathbf{F}}_2$ par rapport à $\vec{\mathbf{r}}_2$ en degrés,
	θ_3	est l'angle de $\vec{\mathbf{F}}_3$ par rapport à $\vec{\mathbf{r}}_3$ en degrés,
	r_N	est la *N*^e position (du *N*^e vecteur force) en mètres,
	F_N	est la *N*^e force en newtons,
et	θ_N	est l'angle de $\vec{\mathbf{F}}_\mathbf{N}$ par rapport à $\vec{\mathbf{r}}_\mathbf{N}$ en degrés.

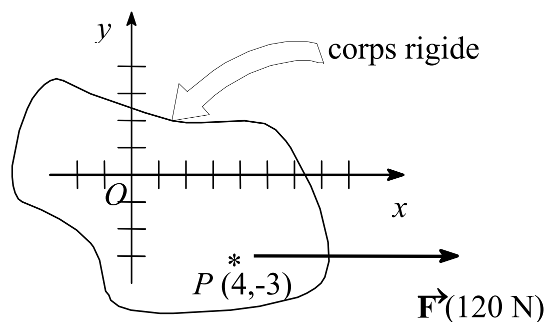
Les signes ± des angles θ_i dépendent du sens dans lequel les forces tendent à faire tourner le corps par rapport à l'origine. Le signe est positif si la rotation est anti-horaire et négatif si la rotation est horaire.

L'alternative, si vous n'utilisez pas les signes ± aux angles θ_i , est de mettre les sinus en valeur absolue et d'inclure les signes ± dans l'équation de moment de force comme cela était fait avec le bras de levier.



5. Une force horizontale de 120 N est appliquée à un point P situé à 5 m de l'origine et à 36,9° en-dessous de l'horizontale.

Utilisez le point d'origine indiqué sur la figure pour répondre aux questions suivantes.



a) Quelle est la longueur du bras de levier au point *P* ?

b) Quelle est la grandeur du moment de force ?

c) Quelle est la direction du moment de force ?

6. Une force de 25 N est exercée sur un corps dans une direction à 90° en un point situé à 4 cm de l'origine dans une direction à 0° par rapport à l'origine. Une *2^e* force est exercée sur le corps dans une direction à 180° en un point situé à 6 cm de l'origine dans une direction à 270° par rapport à l'origine.

a) Dans quel sens la *2^e* force tend à faire tourner le corps afin de le maintenir en équilibre de rotation ?

b) Quelle est la grandeur de la *2^e* force afin de maintenir le corps en équilibre de rotation ?

7. Soit deux forces exercées sur un corps avec les valeurs suivantes:

r_1=3 cm, θ_{r1}=120°,
r_2=5 cm, θ_{r2}=-60°,
F_1=10 N, θ_{F1}= 45°
et F_2=40 N, θ_{F2}=225°.

Une 3^e force est exercée dans une direction à θ_{F3}=180° en un point à r_3=2 cm situé à θ_{r3}=90° de l'origine.

a) Dans quel sens la 3^e force tend à faire tourner le corps afin de le maintenir en équilibre de rotation ?

b) Quelle est la grandeur de la 3^e force afin de maintenir le corps en équilibre de rotation ?

Moment de force

La condition d'équilibre de rotation peut être exprimée vectoriellement avec

$$0 = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{r}}_\mathbf{i} \times \vec{\mathbf{F}}_\mathbf{i} = \vec{\mathbf{r}}_\mathbf{1} \times \vec{\mathbf{F}}_\mathbf{1} + \vec{\mathbf{r}}_\mathbf{2} \times \vec{\mathbf{F}}_\mathbf{2} + \vec{\mathbf{r}}_\mathbf{3} \times \vec{\mathbf{F}}_\mathbf{3} + \ldots + \vec{\mathbf{r}}_\mathbf{i} \times \vec{\mathbf{F}}_\mathbf{i} + \ldots + \vec{\mathbf{r}}_\mathbf{N} \times \vec{\mathbf{F}}_\mathbf{N}$$

où $\vec{\mathbf{r}}_\mathbf{i}$ est le i^e vecteur position en mètres,
$\vec{\mathbf{F}}_\mathbf{i}$ est le i^e vecteur force en newtons,
$\vec{\mathbf{r}}_\mathbf{1}, \vec{\mathbf{r}}_\mathbf{2}, \vec{\mathbf{r}}_\mathbf{3}$ sont les vecteurs positions n°1, n°2 et n°3 en mètres,
$\vec{\mathbf{F}}_\mathbf{1}, \vec{\mathbf{F}}_\mathbf{2}, \vec{\mathbf{F}}_\mathbf{3}$ sont les vecteurs forces n°1, n°2 et n°3 en newtons,
$\vec{\mathbf{r}}_\mathbf{N}$ est le N^e vecteur positions en mètres
et $\vec{\mathbf{F}}_\mathbf{N}$ est le N^e vecteur force en newtons.

Le moment de force est défini comme une grandeur physique qui indique la tendance d'une force à faire tourner un corps rigide autour d'un axe perpendiculaire passant par le point d'origine. Le vecteur moment de force exprime la même chose avec en plus une orientation qui indique le sens dans lequelle la force tend à faire tourner le corps rigide. Le i^e vecteur moment de force se calcule avec

$$\vec{\tau}_\mathbf{i} = \vec{\mathbf{r}}_\mathbf{i} \times \vec{\mathbf{F}}_\mathbf{i}$$

où $\vec{\tau}_\mathbf{i}$ est le i^e vecteur moment de force en newtons mètres,
$\vec{\mathbf{r}}_\mathbf{i}$ est le i^e vecteur position en mètres
et $\vec{\mathbf{F}}_\mathbf{i}$ est le i^e vecteur force en newtons.

Note : L'orientation d'un vecteur moment de force est telle que la force tend à faire tourner le corps rigide dans le sens des doigts de la main droite lorsque le pouce de la main droite pointe comme ce vecteur moment de force.

Avec les vecteurs moments de force, la condition d'équilibre de rotation devient

$$0 = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_\mathbf{i} = \vec{\tau}_\mathbf{1} + \vec{\tau}_\mathbf{2} + \vec{\tau}_\mathbf{3} + \ldots + \vec{\tau}_\mathbf{i} + \ldots + \vec{\tau}_\mathbf{N}$$

où $\vec{\tau}_{\mathbf{i}}$ est le i^e vecteur moment de force en newtons mètres,

$\vec{\tau}_{\mathbf{1}}, \vec{\tau}_{\mathbf{2}}, \vec{\tau}_{\mathbf{3}}$ sont les vecteurs moments de force n°1, n°2 et n°3 en newtons mètres

et $\vec{\tau}_{\mathbf{N}}$ est le N^e vecteur moment de force en newtons mètres.

Conditions d'équilibre statique

Un corps rigide est en équilibre statique si les conditions d'équilibre de translation et les conditions d'équilibre de rotation sont satisfaites. Un corps rigide au repos qui satisfait ces conditions d'équilibre statique pourra demeurer au repos; soit

$$\begin{cases} 0 = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{1}} + \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{2}} + \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{3}} + \ldots + \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{i}} + \ldots + \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{N}} \\ 0 = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_{\mathbf{i}} = \vec{\tau}_{\mathbf{1}} + \vec{\tau}_{\mathbf{2}} + \vec{\tau}_{\mathbf{3}} + \ldots + \vec{\tau}_{\mathbf{i}} + \ldots + \vec{\tau}_{\mathbf{N}} \end{cases}$$

où $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{i}}$ est le i^e vecteur force en newtons,

$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{1}}, \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{2}}, \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{3}}$ sont les vecteurs forces n°1, n°2 et n°3 en newtons,

$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{N}}$ est le N^e vecteur force en newtons,

$\vec{\tau}_{\mathbf{i}}$ est le i^e vecteur moment de force en newtons mètres,

$\vec{\tau}_{\mathbf{1}}, \vec{\tau}_{\mathbf{2}}, \vec{\tau}_{\mathbf{3}}$ sont les vecteurs moments de force n°1, n°2 et n°3 en newtons mètres

et $\vec{\tau}_{\mathbf{N}}$ est le N^e vecteur moment de force en newtons mètres.

Si les vecteurs forces s'exerçant sur le corps rigide sont tous dans le même plan *Oxy*, comme pour les cas habituels d'équilibre statique vus dans ce cours, les moments de force sont tous parallèles à l'*Oz*. Dans ce cas habituel, on a

$$\begin{cases} 0 = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{1}} + \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{2}} + \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{3}} + \ldots + \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{i}} + \ldots + \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{N}} \\ 0 = \sum_{i=1}^{N} \tau_i = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \ldots + \tau_i + \ldots + \tau_N \end{cases}$$

où $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{i}}$ est le i^e vecteur force en newtons,

$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{1}}, \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{2}}, \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{3}}$ sont les vecteurs forces n°1, n°2 et n°3 en newtons,

$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{N}}$ est le N^e vecteur force en newtons,

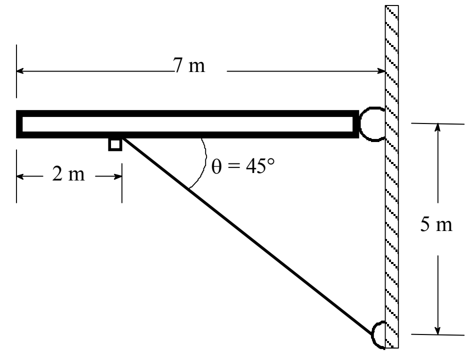
τ_i est le i^e moment de force algébrique en newtons mètres,

τ_1, τ_2, τ_3 sont les moments de force algébriques n°1, n°2 et n°3 en newtons mètres

et τ_N est le N^e moment de force algébrique en newtons mètres.

Les moments de force algébriques sont positifs ou négatifs selon l'orientation du vecteur moment de force vers les *z* positifs ou vers les *z* négatifs. Le signe est positif si le moment de force algébrique tend à faire tourner le corps rigide dans le sens trigonométrique.

8. Une tablette pliable est supportée par un barreau de masse négligeable à 45°. Le barreau est fixé au mur par une articulation et retient la tablette grâce à un butoir en-dessous de celle-ci. Le poids de la tablette est de 70 N.



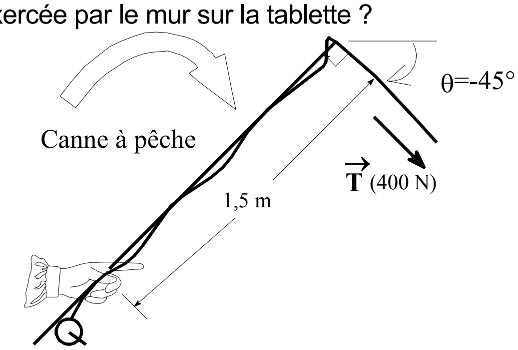
a) Quelle est la grandeur du moment de force exercé par le barreau sur la tablette pliable en prenant l'articulation de la tablette comme origine ?

b) Quelle est la grandeur de la force de compression dans le barreau ?

c) Quelle est la grandeur de la force horizontale de réaction exercée par le mur sur la tablette ?

d) Quelle est la grandeur de la force verticale de réaction exercée par le mur sur la tablette ?

9. Un pêcheur tient un gros poisson au bout de sa ligne. La tension dans le fil est de 400 N. La canne à pêche est à +45° et le fil sortant de la canne est à -45°. Le poids de la canne à pêche est négligeable.



a) Quelle est la force de réaction (grandeur et direction) exercée par la main du pêcheur sur la canne à pêche ?

b) Quelle est la grandeur du moment de force exercé par la main du pêcheur ?

c) Où la main du pêcheur devrait-elle être située pour réduire le moment de force de la moitié ?

Solutions

1. a) vers la droite b) 67 N
2. a) 16,61 N b) 0,22 N c) 16,61 N d) 0,76°
3. a) à droite b) 26,67 N
4. a) à droite b) 45 N
5. a) 3 m b) 360 N·m c) vers les z positifs (sortant de la feuille)
6. a) sens horaire b) 16,67 N
7. a) sens anti-horaire b) 111,1 N
8. a) 245 N·m b) 69,3 N c) 49 N d) 21 N

Note: La force de réaction horizontale de 7.c) est dirigée vers la droite et la force de réaction verticale de 7.d) est dirigée vers le haut.

9. a) 400 N à 135° b) 600 N·m c) à 75 cm de l'extrémité