Chapitre 8

Quantité de mouvement et collisions

Objectif particulier 3.1

Employer la notion de quantité de mouvement pour un système de deux particules libres en collision élastique à une ou deux dimensions et la notion de centre de masse d'un système de particules ou d'un corps rigide pour décrire le mouvement et l'énergie cinétique du système de particules ou du corps rigide.

Conservation de la quantité de mouvement

La quantité de mouvement d'une particule est

$$\vec{\mathbf{p}} = m\,\vec{\mathbf{v}}$$

où	$\vec{\mathbf{p}}$	est la quantité de mouvement en kilogrammes-mètres par seconde,
	m	est la masse en kilogrammes
et	$\vec{\mathbf{v}}$	est la vitesse en mètres par seconde.

La quantité de mouvement est une quantité vectorielle comme la vitesse. En l'absence de force, la 1^{re} loi de Newton prévoit que la vitesse est uniforme. Ainsi, en l'absence de force, la quantité de mouvement se conserve (demeure constante); soit

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{R}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{\mathbf{p}} = 0$$

où	$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{R}}$	est la force résultante en newtons
et	$\Delta\vec{\mathbf{p}}$	est la variation de quantité de mouvement en kilogrammes-mètres par seconde.

Note : Au point de vue de l'inertie, le cas où la force résultante est nulle est équivalent au cas où il y a absence de force.

Pour un système de particules, en l'absence de force externe, la quantité de mouvement totale se conserve. La quantité de mouvement étant une quantité vectorielle, la somme vectorielle des quantités de mouvement de chacune des particules est constante. La quantité de mouvement totale se conserve même lors de collisions. Donc, pour deux particules de masse m_1 et m_2, on a

$$m_1\,\vec{\mathbf{u}}_1 + m_2\,\vec{\mathbf{u}}_2 = m_1\,\vec{\mathbf{v}}_1 + m_2\,\vec{\mathbf{v}}_2$$

où	m_1, m_2	sont les masses des particules n^{o}1 et n^{o}2 en kilogrammes,
	$\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2$	sont les vecteurs vitesses des particules n^{o}1 et n^{o}2 avant la collision en mètres par seconde
et	$\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2$	sont les vecteurs vitesses des particules n^{o}1 et n^{o}2 après la collision en mètres par seconde.

1. **Deux billes de 100 g et de 200 g sur une surface horizontale se déplacent l'une vers l'autre sur une trajectoire de collision. Avant la collision, la bille de 200 g se déplace vers la droite avec**

une vitesse de 50 cm/s. La bille de 100 g se déplace vers la gauche avec une vitesse de 40 cm/s. Après la collision, la bille de 100 g se déplace vers la droite avec une vitesse de 40 cm/s.

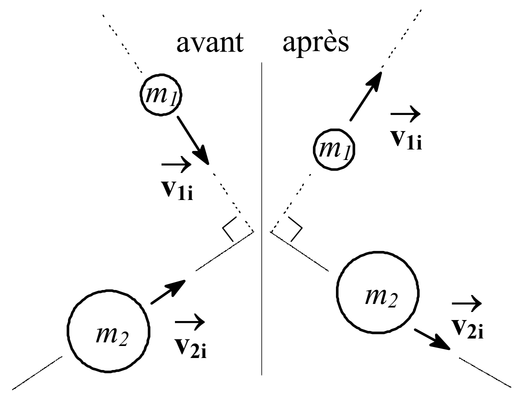
a) Quelle est la quantité de mouvement totale des particules ?

b) Quelle est la vitesse de la particule de 200 g après la collision ?

c) Quelle est l'énergie cinétique totale des particules avant la collision ?

d) Quelle est l'énergie perdue pendant la collision ?

2. Un boulet de 3 kg se déplace à une vitesse de 16,97 m/s dans une direction à -64° et frappe un autre boulet de 6 kg se déplaçant à une vitesse de 0,946 m/s dans une direction à 26°. Après la collision, le boulet de 3 kg se déplace dans une direction à 20° et le boulet de 6 kg se déplace dans une direction à -70°.



a) Quelle est la quantité de mouvement totale des boulets ?

b) Quelle est la vitesse du boulet de 3 kg après la collision ?

c) Quelle est la vitesse du boulet de 6 kg après la collision ?

d) Quelle est l'énergie perdue pendant la collision ?

Collisions parfaitement inélastiques

Lors d'une collision parfaitement inélastique, la vitesse des particules après la collision est la même; les particules restent collées après la collision.

Pour une collision frontale (le long de l'axe des x), la conservation de la quantité de mouvement prend la forme

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = (m_1 + m_2) V$$

où m_1, m_2 sont les masses des particules n°1 et n°2 en kilogrammes,

u_1, u_2 sont les vitesses des particules n°1 et n°2 avant la collision en mètres par seconde

et V est la vitesse des particules n°1 et n°2 après la collision en mètres par seconde.

Note : Si les particules se déplacent en direction opposée, les vitesses u_1 et u_2 sont de signe contraire.

Si $V > 0$, la vitesse des particules après la collision est vers les x positifs.
Si $V < 0$, la vitesse des particules après la collision est vers les x négatifs.

Nous devons exprimer les vitesses sous la forme vectorielle dans la conservation de la quantité de mouvement si les particules avaient des directions différentes avant la collision. Ainsi on a

$$m_1 \vec{\mathbf{u}}_1 + m_2 \vec{\mathbf{u}}_2 = (m_1 + m_2)\, \vec{\mathbf{V}}$$

où m_1, m_2 sont les masses des particules n°1 et n°2 en kilogrammes,

$\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2$ sont les vecteurs vitesses des particules n°1 et n°2 avant la collision en mètres par seconde

et $\vec{\mathbf{V}}$ sont le vecteur vitesse des particules n°1 et n°2 après la collision en mètres par seconde.

3. Deux particules de 5 kg et 6 kg entrent en collision face à face. Avant la collision, la particule de 5 kg possède une vitesse de 20 m/s vers la droite et la particule de 6 kg possède une vitesse de 15 m/s vers la gauche. La collision est parfaitement inélastique.

a) Quelle est la quantité de mouvement totale des particules ?

b) Quelle est la vitesse des particules après la collision ?

4. Deux boulets de 10 kg et 20 kg entrent en collision perpendiculairement. Avant la collision, la vitesse des boulets est de 75 cm/s. La collision est parfaitement inélastique.

a) Quelle est la quantité de mouvement totale des boulets ?

b) Quelle est la vitesse des boulets après la collision ?

Collisions élastiques

Lors d'une collision élastique, l'énergie cinétique est conservée aussi bien que la quantité de mouvement. Si la collision est frontale (le long d'un axe), les deux équations de conservation déterminent la vitesse des particules après la collision.

D'après les équations de conservation, on a

$$\begin{cases} m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \\ \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) u_1 + \left(\frac{2\, m_2}{m_1 + m_2} \right) u_2 \\ v_2 = \left(\frac{2\, m_1}{m_1 + m_2} \right) u_1 + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) u_2 \end{cases}$$

où m_1, m_2 sont les masses des particules n°1 et n°2 en kilogrammes,

u_1, u_2 sont les vitesses des particules n°1 et n°2 avant la collision en mètres par seconde

et v_1, v_2 sont les vitesses des particules n°1 et n°2 après la collision en mètres par seconde.

Les vitesses des particules après la collision sont déterminées par ces équations si la collision est frontale et élastique.

Note : Si les particules se déplacent en direction opposée, les vitesses sont de signe contraire.

Si la collision n'est pas frontale, il faut tenir compte de la direction du déplacement de chaque particule. Dans le cas d'un projectile se déplaçant le long de l'axe des x vers une cible immobile, on a

$$m_1 u_1 = m_1 v_1 \cos\theta_1 + m_2 v_2 \cos\theta_2$$
$$0 = m_1 v_1 \sin\theta_1 + m_2 v_2 \sin\theta_2$$
$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

où m_1, m_2 sont les masses des particules n°1 et n°2 en kilogrammes,
u_1 est la vitesse de la particule n°1 avant la collision en mètres par seconde,
v_1, v_2 sont les vitesses des particules n°1 et n°2 après la collision en mètres par seconde
et θ_1, θ_2 sont les directions des particules n°1 et n°2 après la collision en degrés.

Note : Les angles θ_1 et θ_2 se mesurent positivement dans le sens trigonométrique.

Généralement, les valeurs m_1, m_2 et u_1 sont connues. Avec une valeur supplémentaire, telle que θ_1, les trois équations précédentes permettent de trouver les autres valeurs inconnues v_1, v_2 et θ_2.

5. Deux particules de 2,5 kg et 4,0 kg entrent en collision frontale. Avant la collision, la vitesse de la particule de 2,5 kg est de 4,2 m/s vers la droite et la vitesse de la particule de 4,0 kg est de 1,5 m/s vers la gauche. La collision est élastique.

a) Quelle est la vitesse de la particule de 2,5 kg après la collision ?

b) Quelle est la vitesse de la particule de 4,0 kg après la collision ?

c) Quelle est l'énergie cinétique totale des particules avant la collision ?

d) Quelle est l'énergie cinétique totale des particules après la collision ?

6. Un projectile de 800 g frappe une cible immobile de 800 g. La vitesse du projectile avant la collision est de 1 m/s. La direction de la cible après la collision est de -30°. La collision est élastique.

a) Quelle est la direction du projectile après la collision ?

b) Quelle est la vitesse du projectile après la collision ?

c) Quelle est la vitesse de la cible après la collision ?

d) Quelle est l'énergie cinétique du projectile et de la cible après la collision ?

Centre de masse

Le centre de masse sert à la description du mouvement d'un système de particules ou d'un corps rigide. Le mouvement du centre de masse est déterminé par les mêmes lois que celles décrivant le mouvement d'une particule. Par exemple, le centre de masse d'un corps rigide projeté en l'air décrit une trajectoire parabolique. De plus, le centre de masse d'un projectile suit la même trajectoire même si le projectile explose dans les airs.

La position du centre de masse se calcule avec

$$\begin{cases} x_{CM} = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots} = \dfrac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \\ y_{CM} = \dfrac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots} = \dfrac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \\ z_{CM} = \dfrac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots} = \dfrac{\sum m_i z_i}{\sum m_i} \end{cases}$$

où	$x_{CM} \cdot y_{CM} \cdot z_{CM}$	sont les coordonnées *x,y,z* du centre de masse en mètres,
	m_1, m_2, m_3	sont les masses des particules n°1, n°2 et n°3 en kilogrammes,
	m_i	est la masse de la i^e particule en kilogrammes,
	x_1, x_2, x_3	sont les coordonnées *x* des particules n°1, n°2 et n°3 en mètres,
	x_i	est la coordonnée *x* de la i^e particule en mètres,
	y_1, y_2, y_3	sont les coordonnées *y* des particules n°1, n°2 et n°3 en mètres,
	y_i	est la coordonnée *y* de la i^e particule en mètres,
	z_1, z_2, z_3	sont les coordonnées *z* des particules n°1, n°2 et n°3 en mètres
et	z_i	est la coordonnée *z* de la i^e particule en mètres.

Dans la notation vectorielle, on a

$$\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{CM}} = \frac{m_1\ \vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{1}} + m_2\ \vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{2}} + m_3\ \vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{3}} + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots} = \frac{\sum m_i\ \vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{i}}}{\sum m_i}$$

où	$\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{CM}}$	est le vecteur position du centre de masse en mètres,
	m_1, m_2, m_3	sont les masses des particules n°1, n°2 et n°3 en kilogrammes,
	m_i	est la masse de la i^e particule en kilogrammes,
	$\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{1}}, \vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{2}}, \vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{3}}$	sont les vecteurs positions des particules n°1, n°2 et n°3 en mètres
et	$\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{i}}$	est le vecteur position de la i^e particule en mètres.

7. Un système est composé de particules aux sommets d'une pyramide. Quatre particules à la base ont individuellement une masse de 1,5 kg. La base forme un carré avec des côtés de 10 cm. La pyramide possède une hauteur de 15 cm.

a) Si la particule au sommet a une masse de 2 kg, quelle est la position du centre de masse ?

b) Si la particule au sommet a une masse de 4 kg, quelle est la position du centre de masse ?

Mouvement du centre de masse

La vitesse du centre de masse se calcule avec

$$\begin{cases} (v_{CM})_x = \dfrac{m_1(v_1)_x + m_2(v_2)_x + m_3(v_3)_x + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} = \dfrac{\sum m_i (v_i)_x}{\sum m_i} \\ (v_{CM})_y = \dfrac{m_1(v_1)_y + m_2(v_2)_y + m_3(v_3)_y + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} = \dfrac{\sum m_i (v_i)_y}{\sum m_i} \\ (v_{CM})_z = \dfrac{m_1(v_1)_z + m_2(v_2)_z + m_3(v_3)_z + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} = \dfrac{\sum m_i (v_i)_z}{\sum m_i} \end{cases}$$

où $(v_{CM})_x$ est la coordonnée *x* de la vitesse du centre de masse en mètres par seconde,
$(v_{CM})_y$ est la coordonnée *y* de la vitesse du centre de masse en mètres par seconde,
$(v_{CM})_z$ est la coordonnée *z* de la vitesse du centre de masse en mètres par seconde,
m_1, m_2, m_3 sont les masses des particules n°1, n°2 et n°3 en kilogrammes,
m_i est la masse de la i^e particule en kilogrammes,
$(v_1)_x, (v_2)_x, (v_3)_x$ sont les coordonnées *x* de la vitesse des particules n°1, n°2 et n°3 en mètres par seconde,
$(v_i)_x$ est la coordonnée *x* de la vitesse de la i^e particule en mètres par seconde,
$(v_1)_y, (v_2)_y, (v_3)_y$ sont les coordonnées *y* de la vitesse des particules n°1, n°2 et n°3 en mètres,
$(v_i)_y$ est la coordonnée *y* de la vitesse de la i^e particule en mètres par seconde,
$(v_1)_z, (v_2)_z, (v_3)_z$ sont les coordonnées *z* de la vitesse des particules n°1, n°2 et n°3 en mètres par seconde
et $(v_i)_z$ est la coordonnée *z* de la vitesse de la i^e particule en mètres par seconde.

Dans la notation vectorielle, on a

$$\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{CM}} = \frac{m_1 \, \vec{\mathbf{v}}_\mathbf{1} + m_2 \, \vec{\mathbf{v}}_\mathbf{2} + m_3 \, \vec{\mathbf{v}}_\mathbf{3} + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} = \frac{\sum m_i \, \vec{\mathbf{v}}_\mathbf{i}}{\sum m_i}$$

où $\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{CM}}$ est le vecteur vitesse du centre de masse en mètres par seconde,
m_1, m_2, m_3 sont les masses des particules n°1, n°2 et n°3 en kilogrammes,
m_i est la masse de la i^e particule en kilogrammes,
$\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{1}, \vec{\mathbf{v}}_\mathbf{2}, \vec{\mathbf{v}}_\mathbf{3}$ sont les vecteurs vitesses des particules n°1, n°2 et n°3 en mètres par seconde
et $\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{i}$ est le vecteur vitesse de la i^e particule en mètres par seconde.

L'accélération du centre de masse se calcule avec

$$\begin{cases} (a_{CM})_x = \dfrac{m_1(a_1)_x + m_2(a_2)_x + m_3(a_3)_x + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} = \dfrac{\sum m_i (a_i)_x}{\sum m_i} \\ (a_{CM})_y = \dfrac{m_1(a_1)_y + m_2(a_2)_y + m_3(a_3)_y + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} = \dfrac{\sum m_i (a_i)_y}{\sum m_i} \\ (a_{CM})_z = \dfrac{m_1(a_1)_z + m_2(a_2)_z + m_3(a_3)_z + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} = \dfrac{\sum m_i (a_i)_z}{\sum m_i} \end{cases}$$

où $(a_{CM})_x$ est la coordonnée *x* de l'accélération du centre de masse en mètres par seconde carrée,
$(a_{CM})_y$ est la coordonnée *y* de l'accélération du centre de masse en mètres par seconde carrée,
$(a_{CM})_z$ est la coordonnée *z* de l'accélération du centre de masse en mètres par seconde carrée,
m_1, m_2, m_3 sont les masses des particules n°1, n°2 et n°3 en kilogrammes,
m_i est la masse de la i^e particule en kilogrammes,
$(a_1)_x, (a_2)_x, (a_3)_x$ sont les coordonnées *x* de l'accélération des particules n°1, n°2 et n°3 en mètres par seconde carrée,
$(a_i)_x$ est la coordonnée *x* de l'accélération de la i^e particule en mètres par seconde carrée,
$(a_1)_y, (a_2)_y, (a_3)_y$ sont les coordonnées *y* de l'accélération des particules n°1, n°2 et n°3 en mètres par seconde carrée,
$(a_i)_y$ est la coordonnée *y* de l'accélération de la i^e particule en mètres par seconde carrée,
$(a_1)_z, (a_2)_z, (a_3)_z$ sont les coordonnées *z* de l'accélération des particules n°1, n°2 et n°3 en mètres par seconde carrée
et $(a_i)_z$ est la coordonnée *z* de l'accélération de la i^e particule en mètres par seconde carrée.

Dans la notation vectorielle, on a

$$\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{CM}} = \frac{m_1\ \vec{\mathbf{a}}_\mathbf{1} + m_2\ \vec{\mathbf{a}}_\mathbf{2} + m_3\ \vec{\mathbf{a}}_\mathbf{3} + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} = \frac{\sum m_i\ \vec{\mathbf{a}}_\mathbf{i}}{\sum m_i}$$

où $\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{CM}}$ est le vecteur accélération du centre de masse en mètres par seconde carrée,
m_1, m_2, m_3 sont les masses des particules n°1, n°2 et n°3 en kilogrammes,
m_i est la masse de la i^e particule en kilogrammes,
$\vec{\mathbf{a}}_\mathbf{1}, \vec{\mathbf{a}}_\mathbf{2}, \vec{\mathbf{a}}_\mathbf{3}$ sont les vecteurs accélérations des particules n°1, n°2 et n°3 en mètres par seconde carrée
et $\vec{\mathbf{a}}_\mathbf{i}$ est le vecteur accélération de la i^e particule en mètres par seconde carrée.

Il y a une accélération du centre de masse lorsque qu'une force extérieure est exercée sur le système de particules ou le corps rigide. Les forces internes contribuent à l'accélération de particules, mais pas à l'accélération du système. Ainsi, on a

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{EXT}} = M\,\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{CM}}$$

où $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{EXT}}$ est le vecteur force extérieur total en newtons,
M est la masse totale en kilogrammes
et $\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{CM}}$ est le vecteur accélération du centre de masse en mètres par seconde carrée.

En l'absence de forces extérieures, la vitesse du centre de masse est constante. De plus, si la vitesse du centre de masse est nulle, la position du centre de masse est constante.

L'illustration la plus évidente d'un centre de masse fixe est le cas d'une personne se mettant en marche dans une chaloupe. Si la chaloupe et la personne sont initialement au repos, le centre de masse demeure au repos (en l'absence de moteur, de vent, de courant,...). En considérant la personne et la chaloupe comme un système de deux particules.

Pour le déplacement de la personne et de la chaloupe (par rapport à la berge), on a

$$\begin{cases} (x_1)_f = (x_1)_i + \Delta x_1 \\ (x_2)_f = (x_2)_i + \Delta x_2 \\ \dfrac{m_1 (x_1)_i + m_2 (x_2)_i}{m_1 + m_2} = \dfrac{m_1 (x_1)_f + m_2 (x_2)_f}{m_1 + m_2} \end{cases} \Rightarrow \quad m_1 \Delta x_1 = - m_2 \Delta x_2$$

où $(x_1)_i, (x_1)_f$ sont les positions initiale et finale de la personne en mètre,
$(x_2)_i, (x_2)_f$ sont les positions initiale et finale de la chaloupe en mètres,
$\Delta x_1, \Delta x_2$ sont les déplacements de la personne et de la chaloupe en mètres
et m_1, m_2 sont les masses de la personne et de la chaloupe en kilogrammes.

Pour la vitesse de la personne et de la chaloupe (par rapport à la berge), on a

$$\begin{cases} (v_1)_i = 0 \\ (v_2)_i = 0 \\ \dfrac{m_1 (v_1)_i + m_2 (v_2)_i}{m_1 + m_2} = \dfrac{m_1 (v_1)_f + m_2 (v_2)_f}{m_1 + m_2} \end{cases} \Rightarrow \quad m_1 (v_1)_i = - m_2 (v_2)_f$$

où $(v_1)_i, (v_1)_f$ sont les vitesses initiale et finale de la personne en mètre par seconde,
$(v_2)_i, (v_2)_f$ sont les vitesses initiale et finale de la chaloupe en mètres par seconde
et m_1, m_2 sont les masses de la personne et de la chaloupe en kilogrammes.

8. Une personne de 60 kg se met en marche dans une chaloupe de 40 kg initialement au repos. La personne se déplace de 1,5 m vers l'avant de la chaloupe à une vitesse de 2,25 m/s.

a) Quelle est le déplacement de la chaloupe (par rapport à la berge) ?

b) Quelle est la vitesse de la chaloupe (par rapport à la berge) ?

9. Une personne de 60 kg marchant sur un quai embarque à 2,25 m/s à l'arrière d'une chaloupe de 40 kg initialement immobile. Après avoir embarqué, la personne s'assied à l'avant de la chaloupe.

a) Quelle est la vitesse du centre de masse personne-chaloupe (par rapport à la berge) ?

b) Quelle est la vitesse de la chaloupe pendant que la personne marche à 2,25 m/s vers l'avant de la chaloupe (par rapport à la berge) ?

c) Quelle est la vitesse de la chaloupe après que la personne se soit assise dans la chaloupe (par rapport à la berge) ?

Centre de masse d'un corps rigide

Un corps rigide est considéré comme un nombre infini de particules infinitésimales à l'intérieur d'un certain volume de l'espace à trois dimensions. Le centre de masse d'un corps rigide est donc obtenu par intégration plutôt que par sommation; soit

$$\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{CM}} = \frac{1}{M} \int \vec{\mathbf{r}}\, dm$$

où $\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{CM}}$ est le vecteur position du centre de masse en mètres,
M est la masse totale en kilogrammes,
$\vec{\mathbf{r}}$ est le vecteur position dans le corps en mètres
et dm est un élément de masse infinitésimal en kilogrammes.

En pratique, l'intégration s'effectue en respectant les limites du corps rigide qui occupe un espace à trois dimensions (sphère, cylindre, parallélépipède,...), un espace à deux dimension (disque, plaque rectangulaire,...) ou un espace à une dimension (tige, cerceau,...).

Pour un espace à trois dimensions, le centre de masse est donné par

$$\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{CM}} = \frac{1}{M} \int \vec{\mathbf{r}}\, \rho\, dV$$

où $\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{CM}}$ est le vecteur position du centre de masse en mètres,
M est la masse totale en kilogrammes,
$\vec{\mathbf{r}}$ est le vecteur position dans le corps en mètres,
ρ est la masse volumique en kilogrammes par mètre cube
et dV est un élément de volume infinitésimal en mètres cubes.

Pour corps rigide homogène, la masse volumique est

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{dm}{dV}$$

où	ρ	est la masse volumique en kilogrammes par mètre cube,
	M	est la masse totale en kilogrammes,
	V	est le volume en mètres cubes,
	dm	est un élément de masse infinitésimal en kilogrammes
et	dV	est un élément de volume infinitésimal en mètres cubes.

Pour un espace à deux dimensions, le centre de masse est donné par

$$\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{CM}} = \frac{1}{M} \int \vec{\mathbf{r}}\, \sigma\, dA$$

où	$\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{CM}}$	est le vecteur position du centre de masse en mètres,
	M	est la masse totale en kilogrammes,
	$\vec{\mathbf{r}}$	est le vecteur position dans le corps en mètres,
	σ	est la masse surfacique en kilogrammes par mètre carré
et	dA	est un élément de surface infinitésimal en mètres carrés.

Pour corps rigide homogène, la densité superficielle est

$$\sigma = \frac{M}{A} = \frac{dm}{dA}$$

où	σ	est la masse surfacique en kilogrammes par mètre carré,
	M	est la masse totale en kilogrammes,
	A	est la surface en mètres carrés,
	dm	est un élément de masse infinitésimal en kilogrammes
et	dA	est un élément de surface infinitésimal en mètres carrés.

Pour un espace à une dimension, le centre de masse est donné par

$$\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{CM}} = \frac{1}{M} \int \vec{\mathbf{r}}\, \lambda\, d\ell$$

où	$\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{CM}}$	est le vecteur position du centre de masse en mètres,
	M	est la masse totale en kilogrammes,
	$\vec{\mathbf{r}}$	est le vecteur position dans le corps en mètres,
	λ	est la masse linéique en kilogrammes par mètre
et	$d\ell$	est un élément de longueur infinitésimal en mètres.

Pour un corps rigide homogène, la densité linéaire est

$$\lambda = \frac{M}{L} = \frac{dm}{d\ell}$$

où λ est la masse linéique en kilogrammes par mètre,
M est la masse totale en kilogrammes,
L est la longueur en mètres,
dm est un élément de masse infinitésimal en kilogrammes
et $d\ell$ est un élément de longueur infinitésimal en mètres.

10. Une tige rectiligne de 6 kg possède une longueur de 2 m. La masse de la tige est répartie de façon uniforme.

a) Quelle est la densité linéaire de la tige rectiligne ?

b) Quelle est la position du centre de masse de la tige rectiligne ?

c) Quelle est la position du centre de masse de la tige si elle est pliée en trois parties égales pour former un triangle équilatéral ?

11. Une boîte est faite de cinq panneaux de bois. Chaque côté possède une dimension de $12 \times 16\ cm^2$ et une masse de 600 g. La base a une dimension de $16 \times 16\ cm^2$ et une masse de 800 g. La masse des panneaux est répartie de façon uniforme.

a) Quelle est la position du centre de masse de la boîte sans couvercle ?

b) Quelle est la position du centre de masse de la boîte avec un couvercle identique au panneau formant la base ?

12. Deux tiges minces uniformes identiques sont placées bout à bout. Chaque tige possède une masse de 3 kg et une longueur de 75 cm. La masse des tiges est répartie uniformément.

a) Quelle est la position du centre de masse si l'angle entre les tiges est de $45°$?

b) Quelle est la position du centre de masse si l'angle entre les tiges est de $30°$?

Solutions

1. a) 0,06 kg·m/s, vers la droite b) 10 cm/s, vers la droite c) 33 mJ d) 24 mJ
2. a) 51,24 kg·m/s, dirigée à -57° b) 3,842 m/s c) 8,321 m/s d) 204,8 J
3. a) 10 kg·m/s b) 90,9 cm/s
4. a) 16,77 kg·m/s b) 0,559 m/s
5. a) 2,815 m/s, vers la gauche b) 2,885 m/s vers la droite c) 26,55 J d) 26,55 J
6. a) 60° b) 0,5 m/s c) 0,866 m/s d) 0,4 J

Note: Dans la question n°6a), on a $\theta_1 - \theta_2 = 90°$ lorsque $m_1 = m_2$ et $u_2 = 0$, c'est-à-dire que les particules se déplacent perpendiculairement après la collision. Ce fait est remarquable pour tous les joueurs de billard.

7. a) à 3,75 cm au-dessus du centre de la base b) à 6,00 cm au-dessus du centre de la base
8. a) de 2,25 m vers l'arrière b) de 3,375 vers l'arrière
9. a) à 1,35 m/s vers l'avant b) à 0 m/s c) à 1,35 m/s vers l'avant
10. a) de 3 kg/m b) à 1 m des extrémités, c'est-à-dire au centre de la tige c) à 0,192 m des côtés, c'est-à-dire au centre du triangle
11. a) à 4,5 cm au-dessus du centre de la base b) à 6,0 cm au-dessus du centre de la base
12. a) à 34,65 cm du sommet le long de la médiane b) à 36,22 cm du sommet le long de la médiane