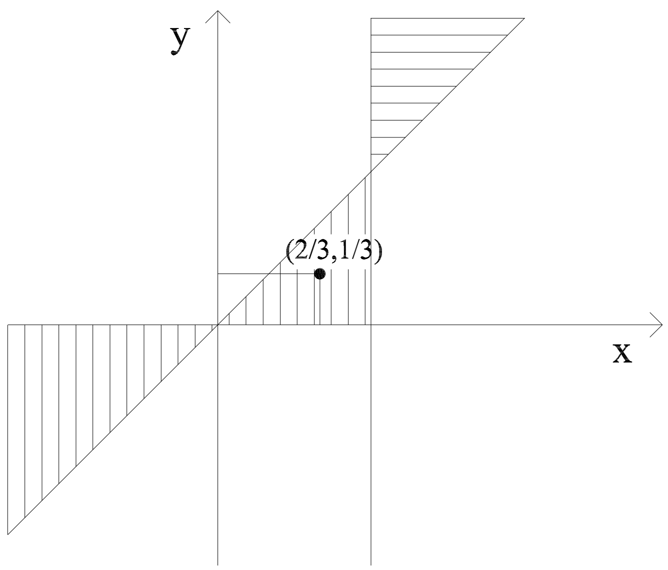
ΛΥΣΕΙΣ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ 1Η
ΑΝΑΛΥΣΗ 2004-05

(Ισοσταθμικές - Όρια - Συνέχεια)

1. α) Είναι $f_1(x,y) = c \Rightarrow |x| + |y| = 1 - c,\ c \leq 1$. Άρα οι ισοστθμικές καμπύλες είναι τετράγωνα με διαγώνιες στους άξονες.
β) Είναι $f_2(x,y) = c_1 \Rightarrow \ln(x^2+y) = c_1 \Rightarrow x^2 + y = e^{c_1} \equiv c,\ c > 0 \Rightarrow y - c = x^2$, που είναι παραβολές.

2. α) Είναι $f_1(x,y,z) = c \Rightarrow x^2 + y^2 = 2cz,\ c \in \mathbb{R}$, που είναι παραβολοειδή εκ περιστροφής.
β) Είναι $f_2(x,y,z) = c_1 \Rightarrow 2^{x-3y+2z} = c_1 > 0 \Rightarrow x - 3y + 2z = \frac{\ln c_1}{\ln 2} \equiv c,\ c \in \mathbb{R}$, που είναι επίπεδα.



Σχήμα 1: Ασκηση 3

3. Έχουμε

$$f(x,y) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{i)} & x,y \in (-\infty, 0] & \kappa' & y \geq x & \text{ή} \\ \text{ii)} & x,y \in [0,1] & \kappa' & y \leq x & \text{ή} \\ \text{iii)} & x,y \geq 1 & \kappa' & y \geq x \end{cases}$$

και $y(x-1)(y-x) = c \overset{x\neq 1}{\Rightarrow} y^2 - xy - \frac{c}{x-1} = 0 \Rightarrow$

$$y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 + \frac{4c}{x-1}}}{2} = g(x,c) \overset{c=1/27}{\Rightarrow} y = \frac{x \pm \sqrt{\frac{27x^2(x-1)+4}{27(x-1)}}}{2} = \frac{x \pm \sqrt{\varphi(x)}}{2},\ \text{όπου}$$

$$\varphi(x) = \frac{27x^2(x-1)+4}{27(x-1)} = \frac{27(x+\frac{1}{3})(x-\frac{2}{3})^2}{27(x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{3} \text{ ή } x > 1 \text{ ή } x = \frac{2}{3}.$$

Άρα όταν $-\frac{1}{3} < x < 1$ τότε $x = \frac{2}{3}$, οπότε $y = \frac{1}{3}$ και στην λωρίδα L ανήκει μόνο το μεμονωμένο σημείο $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

4. Για την f_1**:** $f_1(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = 0 \to 0$, $f_1(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{n}{5} \to +\infty$. Άρα το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y)$ δεν υπάρχει.

Για την f_2**:** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} [y\, e^x] = 0 \cdot 1 = 0$, αφού $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$ και $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^x = 1$.

Για την f_3**:** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_3(x,y) = 1$, αφού $\cos(x^2+y^2) < f_3(x,y) < 1$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2+y^2 < \pi/2$ και $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \cos(x^2+y^2) = 1$.

Για την $\mathbf{f_4}$**:** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \mathbf{f_4}(x,y) = (1,0)$, αφού $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(1+x^2)\sin y}{y} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2) \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin y}{y} = 1 \cdot 1 = 1$ και από

$$\frac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{(|x|+|y|)^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{(|x|+|y|)}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}} \sqrt{2}(|x|+|y|) \leq 2(|x|+|y|),$$

(αφού $|x|+|y| \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}$), θεωρώντας την νόρμα $\| \ \|_2$, για κάθε $\varepsilon > 0$ παίρνοντας $\delta = \varepsilon/2$ έχουμε:$\forall\ (x,y) :\ |x|+|y| < \delta = \varepsilon/2 \Rightarrow |\frac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2+y^2}}| \leq 2(|x|+|y|) < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Επομένως $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

Για την $\mathbf{f_5}$**:** Είναι $|f_5(x,y)| = |\frac{1}{2}xy\frac{2xy}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}|x|\,|y|\frac{2|x|\,|y|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}|x|\,|y|$, οπότε $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_5(x,y) = 0 = f(0,0)$.

Για την $\mathbf{f_6}$**:** Είναι $f_6(1/n, 1/n) = 0 \to 0$, $f_6(2/n, 1/n) = \frac{15}{17} \to \frac{15}{17}$. Άρα το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_6(x,y)$ δεν υπάρχει.

5. Από την προηγούμενη άσκηση και τον ορισμό της συνέχειας προκύπτει ότι η f_5 είναι συνεχής, ενώ η f_6 δεν είναι.

6. Για την $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ έχουμε: $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = 0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right] = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$, οπότε $\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right] = 0$, δηλαδή τα επάλληλα όρια είναι ίσα. Όμως το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει (θεωρείστε τις ακολουθίες $(x_n, y_n) = (1/n, 1/n)$ και $(x_n, y_n) = (2/n, 1/n)$).

Για την $f(x,y) = y + x\sin\frac{1}{y}$: Έχουμε $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) \nexists$, οπότε δεν υπάρχει και το επάλληλο όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right]$. Όμως $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = y$, οπότε $\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right] = 0$, δηλαδή το άλλο επάλληλο όριο υπάρχει. Επιπλέον $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$ και $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\sin\frac{1}{y} = 0$(μηδενική επί φραγμένη), οπότε $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (y + x\sin\frac{1}{y}) = 0$. (ή διαφορετικά $|f(x,y)| \leq |x|+|y| \to 0$). Συνέπεια: Για την ύπαρξη του ορίου $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, δεν είναι απαραίτητη η ύπαρξη των επάλληλων ορίων.