ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

(ΑΠΟ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ: "ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ" Κ. ΚΥΡΙΑΚΗ, Γ. ΔΑΣΙΟΣ)

σελ. 97/3.1

α) $2u_{x_1x_1} + 4u_{x_1x_2} + 3u_{x_2x_2} - u = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow |A - \lambda I| = (2-\lambda)(3-\lambda) - 4 = 0 \longleftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 - 4 = 0 \longleftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$$

$\Delta = 25 - 8 = 17 > 0. \rightarrow \lambda_1, \lambda_2 = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$ ομόσημες και άνισες

$\rightarrow$ ελλειπτικού τύπου στο $\mathbb{R}^2$

β) $u_{x_1x_1} + 2x_1 u_{x_1x_2} + u_{x_2x_2} + \sin(x_1 x_2)u = 5$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ x_1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A - \lambda I| = (1-\lambda)^2 - x_1^2 = 0 \rightarrow$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + (1 - x_1^2) = 0$$

$\Delta = 4 - 4(1 - x_1^2) = 4x_1^2 > 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 2x_1}{2} = 1 \pm x_1$ $\qquad \lambda_1 = 1 + x_1$, $\lambda_2 = 1 - x_1$

- $|x_1| < 1 \rightarrow$ ελλειπτικού τύπου
- $|x_1| > 1 \rightarrow$ υπερβολικού τύπου
- $|x_1| = 1 \rightarrow$ παραβολικού τύπου

γ) $x_2 u_{x_1x_1} - 2u_{x_1x_2} + e^{x_1} u_{x_2x_2} + x_1^2 u_{x_1} - u = 0$

$$A = \begin{pmatrix} x_2 & -1 \\ -1 & e^{x_1} \end{pmatrix} \rightarrow |A - \lambda I| = (x_2 - \lambda)(e^{x_1} - \lambda) - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - (x_2 + e^{x_1})\lambda - (1 - x_2 e^{x_1}) = 0$$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \gamma/\alpha = -1 + x_2 e^{x_1}$

$\rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0 \longleftrightarrow x_2 \cdot e^{x_1} = 1$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0 \longleftrightarrow x_2 e^{x_1} > 1$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \longleftrightarrow x_2 \cdot e^{x_1} < 1.$

$A_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 e^{x_1} > 1\} \rightarrow$ ελλειπτικού τύπου

$A_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 e^{x_1} < 1\} \rightarrow$ υπερβολικού τύπου

$A_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 e^{x_1} = 1\} \rightarrow$ παραβολικού τύπου

σελ. 217 / 5.3

$\Delta u(x_1, x_2, x_3) = 0$ $\quad \vec{x} \in (0,a)\times(0,b)\times(0,c)$

$u(0, x_2, x_3) = \sin\left(\frac{\pi}{b}x_2\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{c}x_3\right)$ $\quad (x_2, x_3) \in [0,b]\times[0,c]$

$u(a, x_2, x_3) = 0$ $\quad$ >>

$u(x_1, 0, x_3) = u(x_1, b, x_3) = 0$ $\quad (x_1, x_3) \in [0,a]\times[0,c]$

$u(x_1, x_2, 0) = u(x_1, x_2, c) = 0$ $\quad (x_1, x_2) \in [0,a]\times[0,b]$

αναζητώ μη τετριμμένες λύσεις της μορφής:

$$u(x_1, x_2, x_3) = X_1(x_1)\cdot X_2(x_2)\cdot X_3(x_3) \xrightarrow{\Delta u = 0}$$

$$\frac{X_1''}{X_1} + \frac{X_2''}{X_2} + \frac{X_3''}{X_3} = 0 \quad \text{και θέτω} \quad \frac{X_1''}{X_1} = k,\ \frac{X_2''}{X_2} = \lambda,\ \frac{X_3''}{X_3} = \mu$$

$$(\rightarrow k + \lambda + \mu = 0 \qquad (*))$$

- $\frac{X_2''}{X_2} = \lambda \longrightarrow X_2'' - \lambda X_2 = 0$
  - $\xrightarrow{\lambda = -n^2} X_2 = A\cos(nx_2) + B\sin(nx_2)$
  - $\xrightarrow{\lambda = 0} X_2 = Ax_2 + B$
  - $\xrightarrow{\lambda = n^2} X_2 = A\cosh(nx_2) + B\sinh(nx_2)$

απο εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών δεχόμαστε ως μη τετριμμένη τη $\lambda < 0 \longrightarrow \lambda := -\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$ $\quad n = 1, 2, \ldots \in \mathbb{N}$, $\quad A = 0$

$\longrightarrow X_2 = \sin\left(\frac{n\pi}{b}x_2\right) \quad n \in \mathbb{N}$

- $\frac{X_3''}{X_3} = \mu \longrightarrow$ ... ακολουθώντας ίδια διαδικασία ... $\longrightarrow$

  $\longrightarrow X_3 = \sin\left(\frac{m\pi}{c}x_3\right) \quad m = 1, 2, \ldots \in \mathbb{N}$

$$\xrightarrow[\lambda = -\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2,\ \mu = -\left(\frac{m\pi}{c}\right)^2]{(*)} k := k_{n,m}^2 = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{c}\right)^2$$

απο όπου προκύπτουν με ανάλογη διαδικασία ~~και~~ οι ιδιοσυναρτήσεις

$X_1 = A\cosh(k_{nm}x_1) + B\sinh(k_{nm}x_1)$

$X_1(a) = A\cosh(k_{nm}a) + B\sinh(k_{nm}a) = 0 \longrightarrow A = -B\tanh(k_{nm}a)$

$\longrightarrow X_1 = B\left[\sinh(k_{nm}x_1) - \tanh(k_{nm}a)\cdot\cosh(k_{nm}x_1)\right]$

η λυση είναι της μορφής:

$$u(x_1,x_2,x_3)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}C_{nm}\left[\sinh(k_{nm}x_1)-\tanh(k_{nm}a)\cosh(k_{nm}x_1)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{b}x_2\right)\sin\left(\frac{m\pi}{c}x_3\right)$$

$$u(0,x_2,x_3)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}-C_{nm}(\tanh(k_{nm}a))\sin\left(\frac{n\pi}{b}x_2\right)\sin\left(\frac{m\pi}{c}x_2\right)=\sin\left(\frac{\pi}{b}x_2\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{c}x_3\right)$$

$$\longrightarrow \quad C_{nm}=0 \quad \forall\,(n,m)\neq(1,1)$$

$$\longrightarrow \quad C_{1,1}=-\frac{1}{\tanh(k_{11}a)}$$

$$u(x_1,x_2,x_3)=-\frac{1}{\tanh(k_{11}a)}\cdot\left(\sinh(k_{11}x_1)-\tanh(k_{11}a)\cosh(k_{11}x_1)\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}x_2\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{c}x_3\right)$$

σελ. 218/5.4

$\Delta u(r,\varphi)=0$ $\quad 1\le r\le 2 \quad \varphi\in[0,\pi]$

οριακές συνθήκες: $u(1,\varphi)=\sin\varphi$, $u(r,0)=0$
$u(2,\varphi)=0$, $u(r,\pi)=0$

$\Delta u(r,\varphi)=0 \longrightarrow u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}=0$

Αναζητώ λύσεις της μορφής $u(r,\varphi)=P(r)\cdot\Phi(\varphi)$

$\longrightarrow P''(r)\cdot\Phi(\varphi)+\frac{1}{r}P'(r)\Phi(\varphi)+\frac{1}{r^2}P(r)\cdot\Phi''(\varphi)=0$

$$\frac{r^2P''(r)+rP'(r)}{r}=-\frac{\Phi''}{\Phi}=k$$

$\Phi''(\varphi)+k\Phi(\varphi)=0 \Longrightarrow$
$\xrightarrow{k=\lambda^2} \cos\lambda\varphi,\ \sin\lambda\varphi$
$\xrightarrow{k=0} 1,\ \varphi$
$\xrightarrow{k=-\lambda^2} \cosh\lambda\varphi,\ \sinh\lambda\varphi.$

Από τις οριακές συνθήκες επιλέγω τις λύσεις για $k=\lambda^2$

$\Phi(\varphi)=(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)$

$\frac{r^2\cdot P''(r)+rP'(r)}{r}=k \xrightarrow{k=n^2} r^2P''(r)+rP'(r)-n^2P(r)=0$

$P(r)=\begin{cases} r^n \\ r^{-n}\end{cases} \quad n>0 \qquad P(r)=\begin{cases}\ln r \\ 1\end{cases} \quad n=0$

Η γενική μορφή της λύσης είναι:

$$u(r,\varphi)=a_0+b_0\ln r+\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cdot r^n+D_n r^{-n})(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)$$

+οριακές συνθήκες $u(r,0)=0 \longrightarrow a_0=b_0=A_n=0$
$u(r,\pi)=0$ (ικανοποιείται)
$u(1,\varphi)=\sin\varphi \quad C_1+D_1=1,\ B_1=1,\ B_n=0 \ \forall n\neq 1$

$u(2,\varphi)=0 \Rightarrow 2\cdot C_1+\frac{1}{2}D_1=0$

$\longrightarrow C_1=-\frac{1}{3},\ D_1=\frac{4}{3} \longrightarrow u(r,\varphi)=(-\frac{1}{3}r+\frac{4}{3}r)\cdot\sin\varphi$ ∎

σελ. 218/5.5

$$\Delta u(\rho,\varphi)=0 \qquad 1<\rho<2 \;,\quad \varphi\in[0,2\pi)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=1}=\sin\varphi \qquad \varphi\in[0,2\pi)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=2}=0 \qquad \varphi\in[0,2\pi)$$

Η λύση έχει τη μορφή:

$$u(\rho,\varphi)=a_0+b_0\ln\rho+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\rho^n+b_n\rho^{-n})\cos n\varphi+(c_n\rho^n+d_n\rho^{-n})\sin n\varphi$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=a_0+b_0\frac{1}{\rho}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n n\rho^{n-1}+(-n)b_n\rho^{-(n+1)}\right)\cos n\varphi+\left(c_n n\rho^{n-1}+(-n)d_n\rho^{-(n+1)}\right)\sin n\varphi$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=1}=a_0+b_0+\sum_{n=1}^{\infty}(na_n-nb_n)\cos n\varphi+(nc_n-nd_n)\sin n\varphi=\sin\varphi$$

$$a_0+b_0=0$$
$$a_n=b_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$$
$$c_n=d_n \quad \forall n\in\mathbb{N}-\{1\} \qquad c_1-d_1=1.$$

$$0=\left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=2}=a_0+\frac{b_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n n2^{n-1}-nb_n2^{-(n+1)})\cos n\varphi+(c_n n2^{n-1}-nd_n2^{-(n+1)})\sin n\varphi$$

$$a_0+\frac{b_0}{2}=0$$
$$2^{n-1}a_n=b_n2^{-(n+1)}$$
$$c_n2^{n-1}=d_n2^{-(n+1)}$$

$$\longrightarrow \quad c_1=-1/3 \;,\quad d_1=-4/3 \qquad a_0=b_0=0,\quad c_n=d_n=a_n=b_n=0.$$

$$u(\rho,\varphi)=\left(-\frac{1}{3}\rho-\frac{4}{3}\rho^{-1}\right)\sin\varphi+c\;,\quad c\in\mathbb{R}\;\blacksquare$$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: CSLAKONAS 03103313

σελ. 218 / 5.7

$$\Delta u(r,\varphi) = -r^2 \sin 2\varphi \qquad a<r<\beta \qquad \varphi \in [0,2\pi)$$

$$u(r,\varphi) := g(r,\varphi) + v(r,\varphi)$$

όπου $g(r,\varphi)$ αρμονική και

$g(a,\varphi) = -v(a,\varphi)$ } συνοριακές
$g(\beta,\varphi) = -v(\beta,\varphi)$ } συνθήκες

Αφού $\Delta g(r,\varphi) = 0$ μπορεί να αποδειχθεί πως: $v(r,\varphi) = -\frac{1}{12} r^4 \sin 2\varphi$

{πράγματι: αφού θεωρήσαμε $u := g + v$ κ g αρμονική: $\Delta u = \Delta g + \Delta v = 0 + \Delta v =$
$= v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi} = -r^2 \sin 2\varphi - \frac{1}{3} r^2 \sin 2\varphi + \frac{1}{3} r^2 \sin 2\varphi = -r^2 \sin 2\varphi$

Η μορφή της g όπως έχει αποδειχθεί ~~και~~ σε προηγούμενη άσκηση είναι:

$$g(r,\varphi) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{-n}) \cos n\varphi + (c_n r^n + d_n r^{-n}) \sin n\varphi$$

και από συνοριακές συνθήκες:

$$g(a,\varphi) = a_0 + b_0 \ln a + \sum_{n=1} (a_n a^n + b_n a^{-n}) \cos n\varphi + (c_n a^n + d_n a^{-n}) \sin n\varphi = +\frac{1}{12} a^4 \sin 2\varphi$$

και έτσι:

$a_0 + b_0 \ln a = 0$

$a_n a^n + b_n a^{-n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$c_n a^n + d_n a^{-n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{2\} \qquad c_2 a^2 + d_2 a^{-2} = +\frac{a^4}{12}$

$$g(\beta,\varphi) = a_0 + b_0 \ln \beta + \sum_{n=1} (a_n a^n + b_n a^{-n}) \cos n\varphi + (c_n \beta^n + d_n \beta^{-n}) \sin n\varphi = \frac{\beta^4}{12} \sin 2\varphi$$

$a_0 + b_0 \ln \beta = 0$

$a_n \beta^n + b_n \beta^{-n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$c_n \beta^n + d_n \beta^{-n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{2\} \qquad c_2 \beta^2 + d_2 \beta^{-2} = \frac{\beta^4}{12}$

από την επίλυση των συστημάτων προκύπτουν τα αποτελέσματα:

$a_0 = b_0 = 0$

$a_n = b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$c_n = d_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{2\}$ και $c_2 = \left(a^2 - \frac{\beta^4 - a^2\beta^2}{\beta^{-2} - \beta^2}\right) / 12$

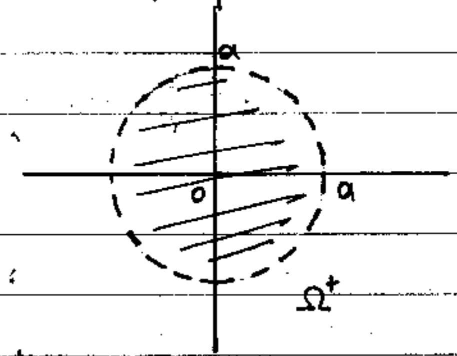
$d_2 = \left(\frac{\beta^4 - a^2\beta^2}{\beta^{-2} - a^{-4}\beta^2}\right) / 12$

$$u(r,\varphi) = (c_2 r^2 + d_2 r^{-2}) \sin 2\varphi - \frac{1}{12} r^4 \sin 2\varphi \ \blacksquare$$

σελ. 219/5.9

$\Delta u(r,\varphi)=0 \qquad 0<r<a \;,\; \varphi\in[0,2\pi)$

$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a}=f(\varphi)$



i) $f(\varphi)=A\cos\varphi+B$

εξίσωση συμβιβαστού για την $f(\varphi)$:

$$\int_\Omega \Delta u\, ds=\int_\Omega \nabla(\nabla u)\,ds=\oint_{\partial\Omega}\nabla u\, d\vec{l}=\oint_{\partial\Omega}\hat{n}\nabla u\, dl =$$

(·) $\hat{n}\equiv\hat{r}$, $dl=r\,d\varphi|_{r=a}$.

$$=\oint_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}dl\overset{(\cdot)}{=}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cdot a\,d\varphi=a\int_0^{2\pi}A\cos\varphi+B\,d\varphi=0$$

$\rightarrow B=0 \rightarrow f(\varphi)=A\cos\varphi$

Η μορφή της λύσης στο Ω^- είναι διαφορετική από τις μέχρι τώρα λύσεις u της Laplace σε πολικές συντεταγμένες. Λόγω ~~κακής~~ συμπεριφοράς στο $r=0$ απορρίπτονται οι όροι: r^{-n}, $\ln r$ και έχουμε:

$$u(r,\varphi)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n r^n\cos n\varphi+c_n r^n\sin n\varphi \,.$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a}=\sum_{n=1}^{\infty}n\alpha_n a^{n-1}\cos n\varphi+n c_n a^{n-1}\sin n\varphi=A\cos\varphi$$

$\rightarrow \quad c_n=0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$\alpha_n=0 \quad \forall n\in\mathbb{N}-\{1\} \rightarrow \alpha_1=A$

$u(r,\varphi)=a_0+Ar\cos\varphi$ {υπό την προϋπόθεση $B=0$ αλλιώς δεν ισχύει η συνθήκη συμβιβαστού και το πρόβλημα σταματά εκεί!!

ii) $f(\varphi)=A\sin\varphi+B\sin3\varphi$

ομοίως πρέπει $\int_0^{2\pi}f(\varphi)\,a\,d\varphi=0$ {που ισχύει $\forall A,B$}

$$u(r,\varphi)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n r^n\cos n\varphi+c_n r^n\sin n\varphi$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a}=\sum_{n=1}^{\infty}n\alpha_n a^{n-1}\cos n\varphi+n c_n a^{n-1}\sin n\varphi=A\sin\varphi+B\sin3\varphi$$

από όπου προκύπτει: $d_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$c_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{1,3\}$ και $c_1 = A$

$c_3 = \frac{B}{a^2 \cdot 3}$

$$u(r,\varphi) = d_0 + Ar\sin\varphi + \frac{B}{3a^2} r^3 \sin 3\varphi + c$$

σελ. 220/5.13

$$\Delta u(r,\varphi) = 0 \qquad 1 < r < 2 \qquad \varphi \in [0,2\pi)$$

$u(1,\varphi) = 0 \qquad \varphi \in [0,2\pi)$

$u(2,\varphi) = 1 \qquad \varphi \in [0,\pi)$

$u(2,\varphi) = -1 \qquad \varphi \in [\pi,2\pi)$

Η λύση στο χωρίο αυτό έχει τη μορφή:

$$u(r,\varphi) = \alpha_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=0} (\alpha_n r^n + b_n r^{-n}) \cos n\varphi + (c_n r^n + d_n r^{-n}) \sin n\varphi$$

$$u(1,\varphi) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + b_n) \cos n\varphi + (c_n + d_n) \sin n\varphi = 0$$

$\longrightarrow \quad \alpha_n + b_n = 0 \qquad \alpha_0 = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

$c_n + d_n = 0$

$$u(2,\varphi) = b_0 \ln 2 + \sum_{n=1} (\alpha_n 2^n + b_n 2^{-n}) \cos n\varphi + (c_n 2^n + d_n 2^{-n}) \sin n\varphi = f(\varphi)$$

$$f(\varphi) = \begin{cases} -1 & -\pi \le \varphi < 0 \\ +1 & 0 \le \varphi < \pi \end{cases} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left(1 - (-1)^n\right) \sin n\varphi \quad \left(\begin{matrix}\text{ημιτονικό} \\ \text{ανάπτυγμα} \\ \text{Fourier}\end{matrix}\right)$$

$\longrightarrow \quad \alpha_n 2^n + b_n 2^{-n} = 0$

$b_0 = 0$

$c_n 2^n + d_n 2^{-n} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(1-(-1)^n)}{n}$

άρα

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n - 2^{-n}} \cdot \frac{2}{\pi} \left(\frac{1-(-1)^n}{n} \right) \cdot r^n + \frac{1}{2^{-n} - 2^n} \frac{2}{\pi} \left(\frac{1-(-1)^n}{n} \right) r^{-n} \right] \sin n\varphi$$

$$u(r,\varphi) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-(-1)^n}{n} \cdot \frac{r^n - r^{-n}}{2^n - 2^{-n}} \right) \sin n\varphi$$

σελ. 220 / 5.15

$$\Delta u(r,\theta,\varphi)=0 \qquad 0\le r<\alpha,\ \theta\in[0,\pi],\ \varphi\in[0,2\pi)$$
$$u(a,\theta,\varphi)=\cos^2\theta \qquad \theta\in[0,\pi],\ \varphi\in[0,2\pi)$$

$$\longrightarrow u_{rr}+\frac{2}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}u_\theta+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi}=0$$

υποθέτω λύση της μορφής: $u(r,\theta,\varphi)=R(r)\cdot\Theta(\theta)\cdot\Phi(\varphi)$

$$\xrightarrow{\Delta u=0} \frac{r^2R''(r)+2rR'(r)}{R(r)}+\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\Theta'(\theta)}{\Theta(\theta)}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=-m^2 \quad \{m=0,1,2,\dots\} \qquad 2\pi\text{-περιοδική} \qquad (2)$$

$$\longrightarrow \Phi(\varphi)=\begin{cases}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{cases}$$

$$\frac{r^2R''(r)+2rR'(r)}{R(r)}=K \ (3) \longrightarrow r^2R''+2rR'-KR=0 \qquad \langle Euler\rangle$$

$$F(r)=r^\lambda[\lambda(\lambda-1)+2\lambda-k]=0 \longleftrightarrow$$
$$\lambda^2+\lambda-k=0$$

αν $\lambda_{1,2}$ ρίζες της εξίσωσης $\longrightarrow \lambda_1\cdot\lambda_2=-k$
$\lambda_1+\lambda_2=-1 \longrightarrow \lambda_2=-(1+\lambda_1)$

$$R(r)=\begin{cases}r^{\lambda_1}\\ r^{-(\lambda_1+1)}\end{cases}$$ (απορρίπτεται: μη φραγμένη καθώς $r\to0$)

τελικά:
$$(1)\xrightarrow[(3)]{(2)} \lambda_1(1+\lambda_1)+\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\Theta'(\theta)}{\Theta(\theta)}+\frac{1}{\sin^2\theta}(-m^2)=0$$

με αντικατάσταση $x=\cos\theta$ η σχέση γίνεται:

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2}-2x\frac{d\Theta}{dx}+\left[\lambda_1(\lambda_1+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta=0 \qquad \text{(συσχετισμένη Legendre)}$$

με λύσεις: $\{\lambda_1=n\}$
$$P_n^m(\cos\theta)=(\sin^2\theta)^{\frac{m}{2}}\cdot\frac{d^m}{dx^m}P_n(\cos\theta) \qquad \left\{P_n(\cos\theta)=\frac{1}{2^n n!}(\cos^2\theta-1)^n\right\}$$

$$Q_n^m(\cos\theta)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_n(y)}{\cos\theta-y}\,dy$$

όπου η συνάρτηση 2ου είδους Q_n^m απορρίπτεται λόγω κακής συμπεριφοράς στο $x=\pm1$. Τέλος λόγω της δεδομένης συνοριακής συνθήκης παρατηρούμε πως το πρόβλημα είναι ανεξάρτητο του αζιμουθίου φ οπότε και $m=0$ και η συσχετισμένη Legendre εκφυλίζεται στην απλή Legendre

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2}-2x\frac{d\Theta}{dx}+n(n+1)\Theta=0$$

με λύση τα πολυώνυμα: $P_n(\cos\theta)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(\cos^2\theta-1)^n$

και η λύση της u έχει τη μορφή:

$$u(r,\varphi,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n r^n P_n(\cos\theta)$$

και η συνθήκη δίνει

$$u(a,\theta)=\cos^2\theta=\sum_{n=0}a_n a^n P_n(\cos\theta)=a_0+a_1\cdot a^1P_1+a_2a^2P_2+\dots$$

$\longrightarrow$

$$a_n=0\quad \forall\, n\in\mathbb{N}-\{0,2\}$$

$$P_2=\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\quad\longrightarrow\quad a_0=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{a^2},\quad a_2=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{a^2}$$

$$u(r,\theta)=\frac{1}{3a^2}+\frac{2}{3a^2}r^2P_2(\cos\theta)$$

σελ. 220/5.17

$$\Delta u(r,\theta,\varphi)=0\qquad r>a,\ \theta\in[0,\pi],\ \varphi\in[0,2\pi)$$

$$\frac{\partial u(a,\theta,\varphi)}{\partial r}=\cos\theta+3\cos^3\theta\qquad \theta\in[0,\pi],\ \varphi\in[0,2\pi).$$

Το πρόβλημα είναι ανεξάρτητο του m και από τον τόπο $\{r>a\}$ αποκλείεται η λύση από την Euler r^n λόγω κακής συμπεριφοράς.

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n r^{-(n+1)}P_n(\cos\theta)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a}=\left.\sum_{n=0}^{\infty}-(n+1)a_n r^{-(n+2)}P_n(\cos\theta)\right|_{r=a}=\sum_{n=0}^{\infty}-(n+1)a_n a^{-(n+2)}P_n(\cos\theta)=\cos\theta+3\cos^3\theta$$

$$\cos\theta+3\cos^3\theta = \frac{8}{5}P_1(\cos\theta) + \frac{2}{5}P_3(\cos\theta)$$

και:

$$a_1 = -\frac{7}{5}\alpha^3 \qquad a_n = 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}-\{1,3\}$$

$$a_3 = -\frac{3}{10}\alpha^5$$

$$u(r,\theta) = -\frac{7}{5}\alpha^3 r^{-2}P_1(\cos\theta) - \frac{3}{10}\alpha^5 r^{-4}P_3(\cos\theta) + C \quad \blacksquare$$

σελ. 221/5.18

$$\Delta u(r,\varphi,\theta) = 0 \qquad r>\alpha,\ \theta\in[0,\pi],\ \varphi\in[0,2\pi)$$

$$\frac{\partial u(\alpha,\theta)}{\partial r} + u(\alpha,\theta) = 3\cos\theta \quad , \quad \theta\in[0,\pi]$$

πρόκειται για εξωτερικό πρόβλημα Robin, ανεξάρτητο από το αζιμούθιο $\{m=0\}$ με τις r^n, θα να αποκλείονται και η λύση να έχει τη μορφή:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)$$

όπου

$$\left.\frac{\partial u(\alpha,\theta)}{\partial r}\right|_{r=\alpha} + u(\alpha,\theta) = 3\cos\theta = 3P_1(\cos\theta) \longrightarrow$$

$$\sum -(n+1)a_n\alpha^{-(n+2)}P_n(\cos\theta) + a_n\alpha^{-(n+1)}P_n(\cos\theta) = 3P_1(\cos\theta) \longrightarrow$$

$$\sum a_n\left[\alpha^{-(n+1)} - (n+1)\alpha^{-(n+2)}\right]P_n(\cos\theta) = 3P_1(\cos\theta) \longrightarrow$$

$$a_n = 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}-\{1\}$$

$$a_1\left[\alpha^{-2} - 2\alpha^{-3}\right] = 3 \longrightarrow a_1 = \frac{3}{\frac{1}{\alpha^2}-\frac{2}{\alpha^3}} = \frac{3\alpha^3}{\alpha-2} \qquad \{\alpha\neq 2\}$$

και $u(r,\theta) = \dfrac{3\alpha}{\alpha-2} r^{-2}P_1(\cos\theta)$ ∎

Επειδή στις 2 τελευταίες ασκήσεις τα χωρία ήταν μη φραγμένα καλό θα ήταν να ελεγχθεί και το κριτήριο στο άπειρο για την εξίσωση Laplace:

$$|u(\vec{x})| \le C\,|\vec{x}|^{2-n}$$

όπου n: αριθμός διαστάσεων, $C\in\mathbb{R}$.

Για $n=3 \rightarrow |u| \le C\frac{1}{r}$ κάτι που προφανώς ισχύει αν παρατηρήσουμε τις λύσεις.

σελ. 221 / 5.19

$$\Delta u(r,\theta,\varphi)=0 \qquad 0\le r<\alpha,\ \theta\in[0,\pi],\ \varphi\in[0,2\pi)$$

$$u(\alpha,\theta,\varphi)=\sin\theta\cos\varphi+\sin^2\theta\sin2\varphi \qquad \theta\in[0,\pi],\ \varphi\in[0,2\pi)$$

Η λύση εξαρτάται και απ' τη γωνία φ όπως αποκλείεται η λύση $r^{-(n+1)}$ καθώς και οι Q_n^m λόγω κακής συμπεριφοράς στο χωρίο που μελετάμε.

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} r^n(a_{nm}\cos m\varphi+b_{nm}\sin m\varphi)P_n^m(\cos\theta)$$

$$u(\alpha,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \alpha^n(a_{nm}\cos m\varphi+b_{nm}\sin m\varphi)\cdot P_n^m(\cos\theta)=\sin\theta\cos\varphi+\sin^2\theta\sin2\varphi$$

$$\rightarrow \alpha^1 a_{11}=1 \rightarrow a_{11}=\alpha^{-1} \qquad a_{nm}=0 \quad \forall (n,m)\neq(1,1)$$

$$\alpha^2 b_{22}=\frac{1}{3} \rightarrow b_{22}=\frac{\alpha^{-2}}{3} \qquad b_{nm}=0 \quad \forall (n,m)\neq(2,2)$$

$$\rightarrow u(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{\alpha}\cdot r\cos\varphi\cdot P_1^1(\cos\theta)+\frac{1}{3\alpha^2}r^2\sin2\varphi P_2^2(\cos\theta) \blacksquare$$

σελ. 337 / 7.7

$$\Delta u(x_1,x_2,x_3,t)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1) \qquad (x_1,x_2,x_3)\in(0,1)\times(0,1)\times(0,1),\ t>0$$

$$u(x_1,x_2,x_3,0)=\sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2)\sin(\pi x_3) \qquad \vec{x}\in[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$$

$$u_t(x_1,x_2,x_3,0)=0 \qquad \text{>>}$$

$$u(0,x_2,x_3,t)=u(1,x_2,x_3,t)=0 \qquad (x_2,x_3)\in[0,1]\times[0,1],\ t\ge0$$

$$u(x_1,0,x_3,t)=u(x_1,1,x_3,t)=0 \qquad (x_1,x_3)\in[0,1]\times[0,1],\ t\ge0$$

$$u(x_1,x_2,0,t)=u(x_1,x_2,1,t)=0 \qquad (x_1,x_2)\in[0,1]\times[0,1],\ t\ge0$$

αναζητώ λύσεις της μορφής:

$$u(x_1,x_2,x_3,t)=X_1(x_1)\cdot X_2(x_2)\cdot X_3(x_3)\cdot T(t) \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{\Delta u=\frac{1}{c^2}u_{tt}} \quad \frac{X_1''}{X_1}+\frac{X_2''}{X_2}+\frac{X_3''}{X_3}=\frac{1}{c^2}\cdot\frac{T''}{T} \qquad (3)$$

απο τις συνοριακές συνθήκες, (2):

$$X_1(0)=X_1(1)=0$$
$$X_2(0)=X_2(1)=0$$
$$X_3(0)=X_3(1)=0$$

και άρα οι ιδιοσυναρτήσεις των επιμέρους χωρικών είναι:

$$X_1(x_1)=\sin(n\pi x_1) \qquad X_2(x_2)=\sin(m\pi x_2) \qquad X_3(x_3)=\sin(\ell\pi x_3)$$

$$n,m,\ell=1,2,\ldots$$

οπότε από την (1), (3) έχουμε:

$$\frac{T''}{T} = -\left[(n\pi)^2 + (m\pi)^2 + (l\pi)^2\right] c^2 = -q^2_{n,m,l}$$

$$\longrightarrow \quad T(t) = \begin{cases} \cos(qt) \\ \sin(qt) \end{cases}$$

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \sum \sin(n\pi x_1)\sin(m\pi x_2)\sin(l\pi x_3)\left(A_q \cos qt + B_q \sin qt\right)$$

$$u(x_1, x_2, x_3, 0) = \sum A_q \sin(n\pi x_1)\sin(m\pi x_2)\sin(l\pi x_3) = \sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2)\sin(\pi x_3)$$

$$\longrightarrow A_{q_{1,1,1}} = 1 \quad , \quad A_q = 0 \quad \forall \; q_{(n,m,l)} \neq q_{(1,1,1)}$$

$$u_t(x_1, x_2, x_3, 0) = 0 \longrightarrow B_q = 0 \quad \forall q$$

$$\rightarrow \left\{ q_{1,1,1} = \sqrt{(\pi^2+\pi^2+\pi^2)} \cdot c = \sqrt{3}\pi c \right\}$$

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \sin(\pi x_1)\cdot\sin(\pi x_2)\cdot\sin(\pi x_3)\cos(\sqrt{3}\pi c t) \;\blacksquare$$

σελ. 338/7.10

$$\Delta u(r,\varphi,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1) \qquad 0 \le r < 1, \; \varphi \in [0, 2\pi), \; t > 0$$

$$u(r,\varphi,0) = J_1(\lambda_{11} r)\cos\varphi \qquad 0 \le r \le 1, \; \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$u_t(r,\varphi,0) = 0 \qquad \text{»}$$

$$u(1,\varphi,t) = 0 \qquad \varphi \in [0,2\pi), \; t \ge 0$$

αναζητώ λύσεις της μορφής:

$$u(r,\varphi,t) = R(r)\cdot\Phi(\varphi)\cdot T(t) \quad (2)$$

$$(1) \xrightarrow{(2)} \frac{T''}{c^2 T} = \frac{R'' + r^{-1}R'}{R} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\Phi''}{\Phi}$$

όπου για την Φ απαιτώ 2π-περιοδικότητα.

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases} \qquad n = 0, 1, \ldots$$

τώρα

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \left(\mu^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)R = 0 \qquad (\mu > 0)$$

λύσεις: συναρτ. Bessel η τάξης, συναρτ. Neumann → απορρίπτεται λόγω κακής συμπεριφοράς στο r=0

$\longrightarrow \quad R(r) = J_n(\mu r) \qquad n = 0,1,2,\ldots$

συνθήκη κανονικοποίησης : $J_n(\mu) = 0 \qquad \{u(1,\varphi,t) = 0\}$.

$\longrightarrow \quad \mu := \mu_{nm}$ οι ρίζες της Bessel $\qquad n = 0,1,2\ldots \quad m = 1,2,\ldots$

τέλος: $T'' + c^2(\mu_{nm})^2 T = 0 \longrightarrow T_{nm} = \begin{cases} \cos(c\mu_{nm}t) \\ \sin(c\mu_{nm}t) \end{cases}$

$$u(r,\varphi,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} J_n(\mu_{nm}r)\{(A_{nm}\cos n\varphi + B_{nm}\sin n\varphi)\cos(c\mu_{nm}t) + (C_{nm}\cos n\varphi + D_{nm}\sin n\varphi)\sin(c\mu_{nm}t)\}$$

όποτε:

$$u(r,\varphi,0) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} J_n(\mu_{nm}r)(A_{nm}\cos n\varphi + B_{nm}\sin n\varphi) = J_1(\mu_{11}r)\cos\varphi$$

$\longrightarrow \quad B_{nm} = 0 \quad \forall n,m \in \mathbb{N}$.

$A_{nm} = 0 \quad \forall (n,m) \neq (1,1) \quad \to A_{11} = 1$

$$u_t(r,\varphi,0) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} J_n(\mu_{nm}r)\cdot c\mu_{nm}(C_{nm}\cos n\varphi + D_{nm}\sin n\varphi) = 0$$

$$C_{nm} = D_{nm} = 0 \quad \forall n,m \in \mathbb{N}.$$

$\longrightarrow$

$$u(r,\varphi,t) = J_1(\mu_{11}r)\cos\varphi\cos(c\mu_{11}t) \blacksquare$$