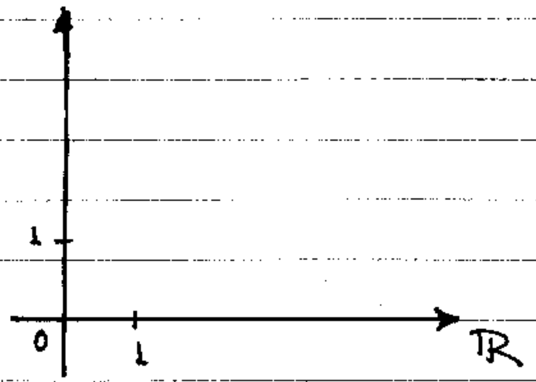
ΘΕΩΡΙΑ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

$\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\} \longrightarrow$ βάση: 1.



$$(a+ib)=(a,b)$$

$$(a+ib)+(c+id)=(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)=(a+c)+i(b+d)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ:

$\mathbb{C}=\{(a,b),\ =,+,-,\times,:,$ μοναδιαίο $(1,0):=1+i0\}$

$\mathbb{C}$ = σώμα

έτσι $\quad \mathbb{R}:=\{(a,b)\in\mathbb{C} : b=0\}$

$a+ib=(a,0)+i(b,0)=a(1,0)+b(0,1) \longrightarrow (1,0)=1$
$(0,1)=i$

• Στο $\mathbb{C}$ ΔΕΝ ορίζεται η διάταξη.

απόδειξη:

Έστω ότι υπάρχει διάταξη $\overset{*}{<}$ στο $\mathbb{C}$. Τότε πρέπει:

$0\overset{*}{<}i$ ή $0\overset{*}{>}i$

α) $0\overset{*}{<}i \xrightarrow{(\times i)} 0=0i\overset{*}{<}i^2=-1 \longrightarrow 0\overset{*}{<}-1$

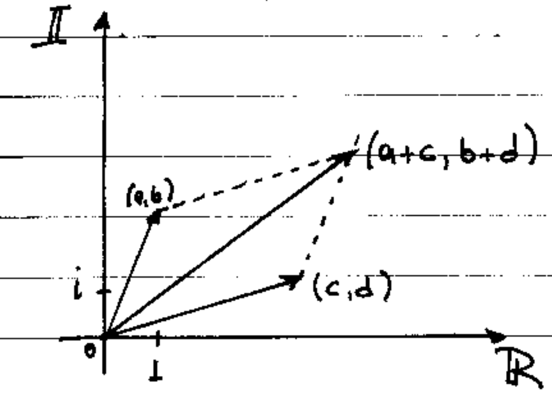
β) $0\overset{*}{>}i \xrightarrow{(+(-i))} 0\overset{*}{<}-i \xrightarrow[\boxed{-i>0}]{(\times i)} 0\overset{*}{<}i^2=-1$

$\longrightarrow 0\overset{*}{>}1$ σε κάθε περίπτωση $\longrightarrow$ ΑΤΟΠΟ.

$\mathbb{C}$: το σώμα των μιγαδικών αριθμών (z,w)

$\mathbb{C}_0:=\{(a,0)\in\mathbb{C}\}$ η εικόνα των πραγματικών αριθμών στο $\mathbb{C}$.

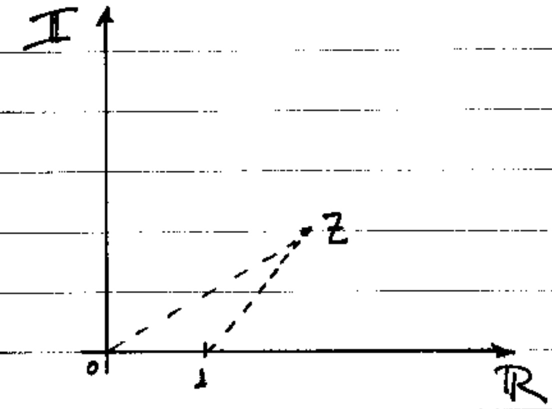
$\mathbb{I}:=\{(0,b)\in\mathbb{C}\}$ το σύνολο των καθαρά φανταστικών αριθμών.

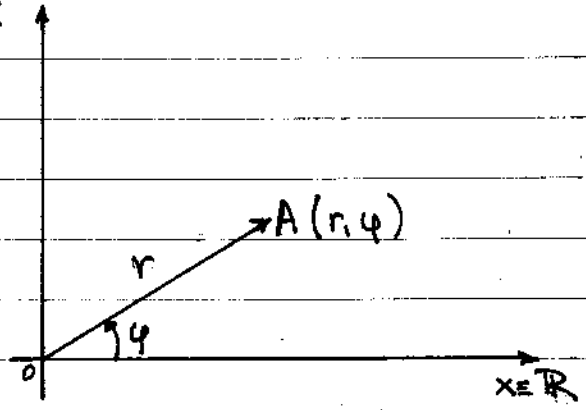


$z := a+ib$ (αλγεβρική μορφή)

$z := (a,b)$ (καρτεσιανή-διανυσματική μορφή)

$z := r\cos\varphi + i r\sin\varphi$ (πολική-τριγωνομετρική μορφή)





$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

$\varphi \in [0,2\pi) \sim (0,2\pi]$

Σε κάθε μιγαδικό αριθμό $z=a+ib$ αντιστοιχεί ακριβώς ένας μιγαδικός αριθμός με αντίθετο φανταστικό μέρισμα.
Ο $\bar{z}=a-ib$ λέγεται συζυγής του z.
Ορίζουμε ακόμη για έναν $z\in\mathbb{C}$: $z=a+ib$ τις έννοιες

$Re(z)=a$ (πραγματικό μέρος του z)

$Im(z)=b$ (φανταστικό μέρος του z)

• ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

1) $Re(z)=\frac{z+\bar{z}}{2}$ $\quad Im(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i}$

2) $|z|^2 = z\cdot\bar{z} = Re^2(z)+Im^2(z)$

3) $|z|\le|w| \longrightarrow |z|^2\le|w|^2$

4) $|z|=|\bar{z}|=|-\bar{z}|=|-z|$

5) $z\in\mathbb{R} \longleftrightarrow z=\bar{z}$, $z\in Im \longleftrightarrow z=-\bar{z}$

• ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

α) $\max(|Re(z)|, |Im(z)|) \le |z| \le |Re(z)| + |Im(z)|$

β) $Re(z_1 \bar{z}_2) \le |z_1 z_2|$

γ) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

δ) $||z_1| - |z_2|| \le |z_1 - z_2|$

ε) $\left|\sum_{k=1}^{\nu} z_k \cdot w_k\right|^2 \le \left(\sum_{k=1}^{\nu} |z_k|^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\nu} |w_k|^2\right)$ (Cauchy-Schwarz)

απόδειξη:

α) $|Re(z)| \le \sqrt{Re(z)^2} \le \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2} = |z|$

ομοίως: $|Im(z)| \le \ldots = |z|$ $\Big\} \longrightarrow$

$\max(Re(z), Im(z)) \le |z| \le |Re(z) + i Im(z)| \le |Re(z)| + |i||Im(z)| =$

$= |Re(z)| + |Im(z)|$

β) $Re(z_1, \bar{z}_2) \le |Re(z_1 \bar{z}_2)| \le |z_1 \bar{z}_2| = |z_1||\bar{z}_2| = |z_1||z_2| = |z_1 z_2|$

γ) $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 =$

$= |z_1|^2 + (z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2}) + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2Re(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2 \le |z_1|^2 + 2|z_1 z_2| + |z_2|^2 =$

$= (|z_1| + |z_2|)^2$

δ) $|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \le |z_1 - z_2| + |z_2| \longleftrightarrow |z_2| - |z_1| \le |z_1 - z_2|$

ε) Θεωρώ τη συνάρτηση $\varphi(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda |z_k| + |w_k|)^2 \ge 0$

$\longrightarrow \lambda^2 \sum_1^n |z_k|^2 + 2\lambda \sum_1^n |w_k z_k| + \sum_1^n |w_k|^2 \ge 0$

και άρα πρέπει: $\Delta = 4\left(\sum_1^n |z_k w_k|\right)^2 - 4\left(\sum_1^n |z_k|^2\right)\left(\sum_1^n |w_k|^2\right) \le 0$

$\longrightarrow \left(\sum_1^n |z_k w_k|\right)^2 \le \left(\sum_1^n |z_k|^2\right)\left(\sum_1^n |w_k|^2\right)$

• ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

$z = x + iy \in \mathbb{C}$

$z = r\cos\varphi + i r \sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\,\mathrm{cis}\,\varphi = re^{i\varphi}$

$\alpha = \mathrm{Arg}\, z \in (-\pi, \pi]$ πρωτεύον ορισμα μοναδικό

$\varphi = \{\alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$z_1+z_2=|z_1|e^{i\varphi_1}+|z_2|e^{i\varphi_2}$

$z_1\cdot z_2=|z_1|\cdot e^{i\varphi_1}\cdot|z_2|e^{i\varphi_2}=|z_1\cdot z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

αν $r:=|z| \longrightarrow z=re^{i\varphi}$

Αν $m\in\mathbb{N}$ $\quad z^m=(re^{i\varphi})^m=r^m e^{im\varphi}$

Αν $m\in\mathbb{Z}_-$ $\quad z^m=(z^{-1})^{-m}=\left[(re^{i\varphi})^{-1}\right]^{-m}=\left[\frac{1}{r}e^{i(-\varphi)}\right]^{-m}=r^m e^{im\varphi}$

άσκηση: Έστω $a\in\mathbb{C}$, $a\neq 0$, $m\in\mathbb{N}$. Να λυθεί η $z^m=a$. (1)

$z=|z|e^{i\varphi}$ $\varphi=\operatorname{Arg}z\in(-\pi,\pi]$ έστω λύση της εξίσωσης και έστω $a=|a|e^{i\vartheta}$ $\vartheta=\operatorname{Arg}a\in(-\pi,\pi]$.

$$z^m=|z|^m e^{im\varphi}=|a|\cdot e^{i\vartheta} \longrightarrow |z|=|a|^{1/m}$$

$$m\varphi=\vartheta+2k\pi \longrightarrow \varphi=\frac{\vartheta}{m}+2\frac{k}{m}\pi \quad k=0,1,\dots(m-1)$$

$\longrightarrow$ m ρίζες της (1).

· ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ

$\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ όπου $z_n\in\mathbb{C}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

όριο ακολουθίας:

Το $a\in\mathbb{C}$ είναι όριο της $\{z_n\}_{n\to\infty}$ $\xleftrightarrow{\text{ΟΡΙΣΜΟΣ}}$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists N=N(\varepsilon)$ $N>0$: $|z_n-a|<\varepsilon$ $\forall n>N$.

$$|z_n-a|=\sqrt{(x_n-a_1)^2+(y_n-a_2)^2}<\varepsilon, \quad \left.\begin{array}{l} z_n=x_n+iy_n \\ a=a_1+ia_2\end{array}\right\} z_n\to a \longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} x_n\to a_1 \\ y_n\to a_2\end{array}\right|_{n\to\infty}$$

ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έστω $w=f(z)\big|_{A\subseteq\mathbb{C}}$ και $z_0\in A'$ (δηλαδή z_0 σημείο συσσώρευσης του A). Τότε $f(z)\to a\in\mathbb{C}$ ή $\lim_{z\to z_0} f(z)=a$ αν $\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, \delta=\delta(z_0,\varepsilon)$ με $\delta>0$: όταν $|z-z_0|<\delta \longrightarrow |f(z)-a|<\varepsilon$

Ισοδύναμα: $z\in D(z_0,\delta) \longrightarrow f(z)\in D(a,\varepsilon)$

παρατήρηση: Αν το όριο υπάρχει τότε αυτό είναι ΜΟΝΑΔΙΚΟ.

ΠΡΟΤΑΣΗ: $\lim_{z\to z_0} f(z)=a \longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(z_n)=a$ όταν $z_n\to z_0$ για $n\to\infty$.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν $z_0=x_0+iy_0$, $a=l+im$ και $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

τότε:

$$\lim f(z)=a \longleftrightarrow \left.\begin{array}{l}\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=l \\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=m\end{array}\right\}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

(α) $\lim_{z\to 1+i} (z^2-5z+10)=(1+i)^2-5(1+i)+10=5-3i$

(β) $\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z}$ $\nexists$

Θεωρούμε την ακολουθία: $z_n=x_n+0i$ με $x_n\to 0$ όταν $n\to\infty$

οπότε $\lim \frac{\bar{z}_n}{z_n}=\frac{x_n}{x_n}=1$

Όμοιως θεωρούμε την ακολουθία $z_n=0+iy_n$ με $y_n\to 0$ όταν $n\to\infty$

οπότε $\lim \frac{\bar{z}_n}{z_n}=\frac{-iy_n}{iy_n}=-1$

οπότε αφού το όριο δεν είναι ανεξάρτητο του δρόμου τότε αυτό δεν υπάρχει.

Έστω $w=f(z)\big|_{A\subseteq\mathbb{C}}$ και $z_0\in A$. Η $f(z)$ είναι συνεχής στο z_0 αν $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta=\delta(\varepsilon,z_0)>0$: όταν $|z-z_0|<\delta \longrightarrow |f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$

Ισοδύναμα: $z\in D(z_0,\delta)\cap A \longrightarrow f(z)\in D(\ \ ,\varepsilon)$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν $z_0\in A\cap A' \longrightarrow f(z)$ συνεχής στο $z_0 \longleftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Η $f(z)\big|_A$ είναι συνεχής σε ~~κάθε~~ μεμονωμένο σημείο του A.

Έστω $W=f(z)\big|_A$. Η $f(z)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο συμπαγές σύνολο A αν $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta:=\delta(\varepsilon)>0$: όταν $|z-z_0|<\delta \longrightarrow |f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ: α) Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής $\longrightarrow f$ είναι συνεχής

β) Έστω $w=f(z)\big|_A$ συνεχής στο συμπαγές A. Τότε η f είναι φραγμένη στο A. Δηλαδή $\exists\ M>0$: $|f(z)|\le M\ \ \forall\ z\in A$.

γ) Η συνέχεια της $w=f(z)$ στο συμπαγές A συνεπάγεται την ύπαρξη $z_1, z_2\in A$ τέτοιων ώστε:

$$|f(z_1)|=\min_{z\in A}|f(z)| \qquad \text{(ελάχιστο)}$$

$$|f(z_2)|=\max_{z\in A}|f(z)| \qquad \text{(μέγιστο)}$$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Εκθετική

$w = e^z \mid z \in \mathbb{C}$

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \xrightarrow[\text{επέκταση}]{\text{τυπική}} e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!}$ όπου $|e^{iy}| \le e^y$

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots\right) =$$

$$= \cos y + i \cdot \sin y$$

$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

$e^{f(z)} := \exp(f(z))$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:
- $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$
- $e^z \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$
- $e^z = e^{z+2k\pi i}$ {Η e^z είναι $2\pi i$-περιοδική}
- $e^z = 1 \longleftrightarrow z = 2\nu\pi i \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$
- Η εξίσωση $e^z = w$ όπου $|w| \neq 0$ έχει λύση της μορφής $z = \ln|w| + i(\operatorname{Arg} w + 2k\pi)$ $k \in \mathbb{Z}$.

απόδειξη: Έστω $z = x + iy \longrightarrow e^{x+iy} = |z| \cdot e^{i \arg z} = |w| \cdot e^{i \arg w}$

$$\left.\begin{array}{l} x = \ln|w| \\ y = \arg w \end{array}\right\} z = \ln|w| + i \arg w$$

Τριγωνομετρικές

$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ $\quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ $\quad \sec z = \frac{1}{\cos z}$

$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ $\quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$ $\quad \csc z = \frac{1}{\sin z}$

Τύπος Euler: $e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad z \in \mathbb{C}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:
- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
- $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 \pm \sin z_2 \cdot \cos z_1$
- $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 \mp \sin z_1 \cdot \sin z_2$

- $\sin 2z = 2\sin z\cos z$
- $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$
- $\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = \cos z$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Οι μιγαδικές συναρτήσεις $\sin z$, $\cos z$ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΦΡΑΓΜΕΝΕΣ.

παράδειγμα: Να λυθεί η εξίσωση $\sin z = i$.

$$\frac{e^{+iz}-e^{-iz}}{2i} = i \xrightarrow{W=e^{iz}} \frac{W-\frac{1}{W}}{2i} = i \longleftrightarrow W^2-1=-2W \longleftrightarrow$$

$$W^2+2W-1=0 \longrightarrow W=-1\pm\sqrt{2}$$

$$e^{iz}=-1\pm\sqrt{2} \xrightarrow{z=x+iy} e^{-y+ix}=-1\pm\sqrt{2} \longleftrightarrow e^{-y}(\cos x+i\sin x)=-1\pm\sqrt{2}$$

$$\longrightarrow e^{-y}\cdot\sin x=0 \qquad x=n\cdot\pi \quad n\in\mathbb{N}.$$

$$e^{-y}\cdot\cos(n\pi)=-1\pm\sqrt{2}$$

αν $n=2k$ $\quad e^{-y}=-1+\sqrt{2} \longrightarrow y=\ln(\sqrt{2}+1)$ και

$$z=2k\pi+i\ln(\sqrt{2}+1)$$

αν $n=2k+1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow z=(2k+1)\pi+i\ln(\sqrt{2}-1)$

Μιγαδικές Υπερβολικές Συναρτήσεις

1) $\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ 3) $\tanh z = \dfrac{\sinh z}{\cosh z}$ 5) $\operatorname{sech} z = \dfrac{1}{\cosh z}$

2) $\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ 4) $\coth z = \dfrac{\cosh z}{\sinh z}$ 6) $\operatorname{csch} z = \dfrac{1}{\sinh z}$

- $\sinh z = -i\sin(iz)$
- $\cosh z = \cos(iz)$

Μιγαδικός Λογάριθμος

Αν $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ τότε η $e^w = z$ έχει λύσεις

$\{w \in \mathbb{C} : e^w = z\} = \{w \in \mathbb{C} : w = \ln|z| + i\arg z\} = \{w \in \mathbb{C} : w = \ln|z| + i\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$\mathbb{C} - \{0\} \ni z \longrightarrow \{\underbrace{w \in \mathbb{C} : e^w = z}_{w = \log z}\}$

Η $\log z$ είναι μια πλειονότιμη συνάρτηση $\operatorname{Log} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$ $\left\{\text{κύριος λογάριθμος του } z\right.$

$y^2 = x \longrightarrow y = \pm\sqrt{x}$

$\log z = \ln|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$

για κάθε k δίνει ένα κλάδο της $\log z$.

ο κλάδος $k=0$ δηλαδή ο $\operatorname{Log} z = \ln z + i\operatorname{Arg} z$ είναι ο κύριος κλάδος.

$k=0 \longrightarrow \operatorname{Log} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$. Δηλαδή αν $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$, $\varphi = \operatorname{Arg} z$

τότε: $\operatorname{Log} z = \ln|z| + i\varphi$

$k=1 \longrightarrow \log z = \ln z + i(\varphi + 2\pi)$

Η γραμμική $z = |z|e^{ia}$ για $a =$ σταθ. είναι μια γραμμή ασυνέχειας για την $\log z$ η οποία λέγεται κλαδική γραμμή της $\log z$

Το κοινό σημείο ασυνέχειας $z=0$ λέγεται κλαδικό σημείο της $\log z$

ιδιότητες:

i) $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2 + 2k\pi i \quad , k\in\mathbb{Z}$

ii) $\log(z_1/z_2) = \log z_1 - \log z_2 + 2k\pi i \quad , k\in\mathbb{Z}$

iii) $\log e^{z} = z + 2k\pi i$

iv) $e^{\log z} = \{z\}$

v) $\log z^n = n\log z$

παράδειγμα:

α) Να υπολογιστούν οι $\mathrm{Log}z$, $\log z$ του $z=\sqrt{3}-i$

β) Να δειχθεί πως $2\mathrm{Log}(-i) = -\pi i$

α) $|z| = \sqrt{3+1} = 2 \quad , \varphi = \mathrm{Arg}z = -\pi/6$

$\{ z = x+iy \quad \mathrm{Arg}z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \}$

$\log z = \ln 2 + i(-\pi/6 + 2k\pi) \xrightarrow{k=0} \log z \equiv \mathrm{Log}z$

β) $|-i| = 1$

$\mathrm{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}$

$\mathrm{Log}(-i) = \ln 1 - i\frac{\pi}{2} \longrightarrow 2\mathrm{Log}(-i) = -i\pi$

Δύναμη Μιγαδικού

$z\in\mathbb{C}-\{0\} \quad a\in\mathbb{C} \longrightarrow z^a = e^{a\log z} = e^{a(\ln|z| + i(\mathrm{Arg}z + 2k\pi))} \quad , k\in\mathbb{Z}$

Η δύναμη είναι μια πλειονότιμη συνάρτηση

Για $k=0$: $z^a = e^{a(\ln|z| + i\mathrm{Arg}z)}$ {πρωτεύουσα ή κύρια τιμή της z^a}

ιδιότητες: {για τις πρωτεύουσες τιμές της δύναμης}

i) $z^a \cdot z^b = z^{a+b}$

ii) $(z_1 z_2)^a \neq z_1^a z_2^a$ (εν γένει)

iii) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^a \neq \frac{z_1^a}{z_2^a}$ (εν γένει)

iv) $\mathrm{Log}z^a \neq a\mathrm{Log}z$ (εν γένει)

v) $\mathrm{Log}z_1 z_2 \neq \mathrm{Log}z_1 + \mathrm{Log}z_2$ (εν γένει)

vi) $(z^a)^b \neq z^{a\cdot b}$ (εν γένει) παράδειγμα:

Να αποδειχθούν οι (ii), (v)

(ii) $z_1 = z_2 = -1 \quad a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

$z_1^a z_2^a = (-1)^a (-1)^a = e^{a \, Log(-1)} \cdot e^{a \, Log(-1)}$

$= e^{a i \pi} \cdot e^{a i \pi} \qquad |-1| = 1$

$= e^{2 a i \pi} \neq 1$ γιατί $Log(1) = \ln|1| + i\pi$ ο $a \notin \mathbb{Z}$

(v) $z_1 = z_2 = -1$

$Log(z_1 z_2) = Log\, 1 = \ln 1 = 0$

$\left.\begin{array}{l} Log\, z_1 = Log(-1) = i\pi \\ Log\, z_2 = Log(-1) = i\pi \end{array}\right\} Log\, z_1 + Log\, z_2 = 2\pi i \neq 0.$

παράδειγμα:

Δίνεται η $w = \exp(e^z)$. Να προσδιοριστούν τα $Re\, w$, $Im\, w$ συναρτήσει των $Re\, z$, $Im\, z$

$z = x + iy \quad , \quad w = u(x,y) + i v(x,y)$

$w = \exp(e^z) = \exp(e^x \cdot e^{iy}) = \exp(e^x(\cos y + i \sin y)) = \exp(e^x \cos y + i e^x \sin y)$

$= e^{e^x \cos y} \cdot e^{i e^x \sin y} = e^{e^x \cos y} (\cos(e^x \sin y) + i \sin(e^x \sin y)) =$

$= \underbrace{e^{e^x \cos y} \cos(e^x \sin y)}_{u(x,y)} + i \underbrace{e^{e^x \cos y} \sin(e^x \sin y)}_{v(x,y)}$

$x = Re\, z$

$y = Im\, z$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

$w=f(z) \mid D \subseteq \mathbb{C}$ D τόπος (ή πεδίο)

και παίρνουμε $z_0 \in D$

Ορίζουμε $K_f(z,z_0)$:

$$K_f(z,z_0) = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$ (πηλίκο διαφορών στο z_0)

$$\longleftrightarrow \quad K_f(h,z_0) = \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \;\Big|\; h \neq 0$$

Ορισμός: Αν υπάρχει το όριο του $K_f(z,z_0)$ καθώς $\underset{z \neq z_0}{z \to z_0}$ (ή ισοδύναμα $\lim_{h \to 0} K_f(h,z_0)$)

τότε το συμβολίζουμε με $f'(z_0)$ και το ονομάζουμε παράγωγο της f στο z_0

Αν υπάρχει η $f'(z)$ $\forall z \in D \longrightarrow$ Η f λέγεται ολόμορφη στο D. ή Αναλυτική στο D.

Αν επιπλέον $D \equiv \mathbb{C} \longrightarrow$ η f είναι **Ακεραία**

Η f είναι αναλυτική σε ένα σημείο $z_0 \in \mathbb{C}$ (1) (στο οποίο ορίζεται) $\overset{ορσ.}{\longleftrightarrow}$ $\exists$ ανοικτός δίσκος με κέντρο z_0 στον οποίο είναι αναλυτική.

Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{(z^3-3z)-(z_0^3-3z_0)}{z-z_0} =$$

$$= \frac{(z^3-z_0^3)-3(z-z_0)}{z-z_0} = z^2+zz_0+z_0^2-3$$

$$\xrightarrow{z \to z_0} 3z_0^2-3$$

<u>παράδειγμα:</u> Η $f(z)=\bar{z}$ δεν είναι αναλυτική σε κανένα σημείο του $\mathbb{C}$

Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$. α) $\exists$ η $f'(z_0)$;

β) $\exists$ η f' σε δίσκο $D(z_0,r)$;

α)
$$K_f(z_0)=\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{\bar{z}-\bar{z}_0}{z-z_0}=\frac{\overline{z-z_0}}{z-z_0}=\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}\xrightarrow{\Delta z\to 0} \text{δεν υπάρχει}$$

$\rightarrow$ δεν ισχύει η πρώτη $\rightarrow$ η $f(z)=\bar{z}$ δεν είναι αναλυτική σε κανένα $z\in\mathbb{C}$.

<u>παράδειγμα:</u> Η $f(z)=|z|$ δεν έχει παράγωγο στο $z=0$

$$K_f(z,0)=\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\frac{|z|}{z}\left[\overset{|z|^2=z\bar{z}}{=}\frac{|z|\cdot\bar{z}}{|z|^2}=\frac{\bar{z}}{|z|}=\frac{\bar{z}}{z}\cdot e^{i(-\varphi)}\rightarrow \nexists\right]$$

$$\hookrightarrow=\frac{|z|}{|z|\cdot e^{i\varphi}}=e^{i(-\varphi)}=\cos\varphi-i\sin\varphi$$

$$\lim_{z\to 0}K_f(z,0)=\lim_{z\to 0}e^{i(-\varphi)}$$ $\rightarrow$ το όριο αυτό δεν υπάρχει (εξαρτάται από το $\arg z$)

<u>πρόταση:</u> Αν η f έχει παράγωγο στο z_0 τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

<u>απόδειξη:</u> Έστω $\varepsilon(z,z_0)=\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f'(z_0)\quad \Big|\, z\neq z_0$

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|=\left|\varepsilon(z,z_0)+f'(z_0)\right| \rightarrow \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}\le|\varepsilon(z,z_0)|+|f'(z_0)|$$

$$\rightarrow |f(z)-f(z_0)|\le\Big(|\varepsilon(z,z_0)|+|f'(z_0)|\Big)|z-z_0|\xrightarrow[z\to z_0]{} 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{z\to z_0} \rightarrow f(z)\rightarrow f(z_0)$$: f συνεχής στο z_0.

ΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ (προηγούμενο παράδειγμα)

Πρόταση: Αν οι f, g είναι αναλυτικές στο ανοικτό $A \subseteq \mathbb{C}$.
(ειδικότερα σε ένα τόπο A), τότε:

(1) Η $k \cdot f + \lambda g$ $\quad k, \lambda \in \mathbb{C}$ είναι αναλυτική στο A και ισχύει:
$$(k f + \lambda \cdot g)' = k f' + \lambda g'$$

(2) Ομοίως η fg κ ισχύει: $(f \cdot g)' = f' g + f g'$

(3) Ομοίως η f/g κ ισχύει: $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2 \qquad \{g \neq 0\}$

(4) $\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cdot z^k\right)' = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \alpha_k z^{k-1}$

(5) Κάθε ρητή συνάρτηση είναι αναλυτική σε όλα τα σημεία εκτός από τις ρίζες του παρονομαστή.

(6) (Κανόνας Αλυσίδας)
Αν $f/A \subseteq \mathbb{C}$, $g/B \subseteq \mathbb{C}$, A, B ανοικτά, f, g αναλυτικές και $f(A) \subseteq B$ τότε η $(g \circ f)(z) = g(f(z)) / A$ είναι αναλυτική και ισχύει
$[(g \circ f)(z)]' = g'(f(z)) \cdot f'(z)$

ΘΕΩΡΗΜΑ: (Αναγκαίες συνθήκες αναλυτικότητας)
Έστω η συνάρτηση $w = f(z) = u(x,y) + i v(x,y) \,/\, A \subseteq \mathbb{C}$, $z = x + iy$ της οποίας υπάρχει η $f'(z_0)$ στο $z_0 = x_0 + i y_0$.
Τότε υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης των $u(x,y)$, $v(x,y)$ και ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες των Cauchy - Riemann

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} = \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)} = -\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}$$

Απόδειξη:
$$K_f(z, z_0) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{(u(x,y) - u(x_0, y_0)) + i(v(x,y) - v(x_0, y_0))}{(x - x_0) + i(y - y_0)} =$$
$$= \frac{u(x,y) - u(x_0,y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)} + i \frac{v(x,y) - v(x_0, y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)}$$

Διαλέγω

α) $(x, y) \to (x_0, y_0)$: $\begin{matrix} x \to x_0 \\ y = y_0 \end{matrix}$

$$K_f(z, z_0) = \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \to x_0} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x = x_0} + i \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x = x_0}$$
$$= f'(z_0)$$

(β) $(x,y)\to(x_0,y_0)$ ⟶ $x=x_0$, $y\to y_0$

$$k_f=\frac{u(x_0,y)-u(x_0,y_0)}{i(y-y_0)}+i\,\frac{v(x_0,y)-v(x_0,y_0)}{i(y-y_0)}=-i\left(\frac{u(x_0,y)-u(x_0,y_0)}{y-y_0}\right)+$$

$$+\frac{v(x_0,y)+v(x_0,y_0)}{y-y_0}\xrightarrow[y\to y_0]{} f'(z_0)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}\longrightarrow\left[\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x}&=-\frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}\right]$$

<u>πόρισμα:</u> Έστω η f όπως στο θεώρημα. Τότε

$$f'(z_0)=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0}=-i\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=y_0}\qquad\{f(z)=u+iv\}$$

παράδειγμα: Η συνάρτηση $f(z)=\begin{cases}\frac{z^5}{|z|^4} & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$ δεν έχει παράγωγο στο $z=0$ μολονότι ισχύουν οι C-R στο σημείο αυτό.

απάντηση: $z=x+iy$ $\quad w=f(z)=\begin{cases}\frac{(x+iy)^5}{|x+iy|^4} & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$

$$f(z)=\frac{(x+iy)^5}{(|x+iy|^2)^2}=\frac{(x+iy)^5}{(x^2+y^2)^2}=\underbrace{\frac{x^5-10x^3y^2+5xy^4}{(x^2+y^2)^2}}_{u(x,y)}+i\underbrace{\frac{5x^4y-10x^2y^3+y^5}{(x^2+y^2)^2}}_{v(x,y)}\qquad (x,y)\neq 0$$

$$u_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{u(h,0)-u(0,0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(h,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^5}{h^5}=1$$

$$u_y(0,0)=\lim_{\substack{\eta\to 0\\ \eta\neq 0}}\frac{u(0,\eta)-u(0,0)}{\eta}=0$$

$$v_x=\lim_{h\to 0}\frac{v(h,0)-v(0,0)}{h}=0$$

$$v_y=\lim_{\eta\to 0}\frac{v(0,\eta)-v(0,0)}{\eta}=1$$

$$\boxed{u_x=v_y \quad \text{και} \quad u_y=-v_x}$$

όμως $$K_f=\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\frac{z^5}{z\cdot|z|^4}=\left(\frac{z}{|z|}\right)^4=\left(\frac{z^2}{|z|^2}\right)^2=\left(\frac{z^2}{z\bar z}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{z}{\bar z}\right)^2\longrightarrow\nexists$$

<u>Πρόταση</u>: Αν η $f/G \subseteq \mathbb{C}$ είναι αναλυτική στον τόπο G, τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες

(1) $f'(z) = 0 \quad \forall z \in G$

(2) $f(z) =$ σταθερά στο G

(3) $\mathrm{Re} f(z) =$ σταθερά "

(4) $\mathrm{Im} f(z) =$ σταθερά "

(5) $|f(z)| =$ σταθερά "

(6) $\arg f(z) =$ σταθερά "

<u>απόδειξη</u>:

$(1) \to (2)$ $f'(z) = \dfrac{\partial f}{\partial x} = -i\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \longrightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow f =$ σταθ.

$(2) \Rightarrow (3)$ προφανές

$(3) \to (4)$ Αν $f(z) = A + i\,v(x,y) \xrightarrow{f \text{ αναλυτική}} \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{v = \text{σταθ.}}}$

$(4) \to (5)$ $|f(z)| = \sqrt{u^2(x,y) + B^2}$ $\quad \{\mathrm{Im} f(z) = B = \text{σταθερά}\}$

$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{array}\right\} u = A = \underline{\text{σταθερά}} \longrightarrow u(x,y) = \text{σταθερά}$

$f(z) = A + iB$

$\longrightarrow |f(z)| = \sqrt{A^2 + B^2}$

$(5) \Rightarrow (6)$ $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ με $|f(z)|^2 = u^2 + v^2 = C =$ σταθ.

Αν $C = 0 \to f(z) = 0 \Rightarrow \arg f = 0$

Αν $C \neq 0$ $\quad v^2 + u^2 = C$

$\to 2uu_x + 2vv_x = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} uu_x + vv_x = 0 \\ uu_y + vv_y = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\substack{u_x = v_y \\ u_y = -v_x}}$

$uu_x - vu_y = 0$

$uu_y + vu_x = 0$

$D = \begin{vmatrix} u & -v \\ v & u \end{vmatrix} = u^2 + v^2 = C \neq 0 \Rightarrow u_x = u_y = 0 \Rightarrow u =$ σταθ.

$\left.\begin{array}{l} uv_y + vv_x = 0 \\ -uv_x + vv_y = 0 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} vv_x + uv_y = 0 \\ -uu_x + vv_y = 0 \end{array}\right\}$ $u_x = v_y = 0$ $\rightarrow v = \text{σταθ}$

(ε) → (1) Έστω $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

αν $\text{Re} f = 0 \longrightarrow f(z) = \text{σταθ} \longrightarrow f'(z) = 0$

άρα έστω $u(x,y) \neq 0 \quad \forall x,y$

Αφού η $f(z)|_0$ αναλυτική τότε υπάρχει η $f(z)$ με $\text{Re} f(z) = u(x,y) \neq 0$

→ ισχύει σε έναν τόπο υποσύνολο του D.

Άρα έχει έννοια η $\dfrac{v(x,y)}{u(x,y)} = \tan(\arg f) = \tan c$

$\longrightarrow v(x,y) = u(x,y)\tan c$

$f(z) = u + iv = u + iu\tan c = u(1 + i\tan c)$

$h(z) := (1 - i\tan c) f(z) = (1 + \tan^2 c) u$

$\rightarrow h(z) = (1 + \tan^2 c) u + i\tilde{v}$ όπου $\tilde{v} = 0 \quad \forall x y$

$\text{Im}\, h(z) = 0 \longrightarrow h(z)$ σταθερά $\longrightarrow h'(z) = 0 \longrightarrow$

$(1 + \tan^2 c) u = \text{σταθ.} \longrightarrow u = \text{σταθ.} \rightarrow f(z) = \text{σταθ} \rightarrow f'(z) = 0.$

ΘΕΩΡΗΜΑ: (ικανές συνθήκες αναλυτικότητας)

Έστω $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ $|\, G \subseteq \mathbb{C}$, $z = x + iy$ για την οποία ισχύουν:

i) ∃ οι u_x, u_y, v_x, v_y και μαζί με τις u, v είναι συνεχείς στο G.

ii) Ισχύουν οι συνθήκες C-R στο G $\quad u_x = v_y$
$\quad u_y = -v_x$

⟶ Η $f(z)$ είναι αναλυτική στο G.

απόδειξη

Έστω $z \in G$, $h = \kappa + i\lambda$ $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ και $(z+h) \in G$, $z = x + iy$

$K_f = \dfrac{f(z+h) - f(z)}{h}$

$f(z+h) = u(x+\kappa, y+\lambda) + i\,v(x+\kappa, y+\lambda)$

$f(z) = u + iv$

$f(z+h) - f(z) = \{u(x+\kappa, y+\lambda) - u(x,y)\} + i\{v(x+\kappa, y+\lambda) - v(x,y)\}$

$u(x+k, y+\lambda) = u(x,y) + \left(k\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \varepsilon(k,\lambda)$. $\lim_{(k,\lambda)\to(0,0)} \varepsilon(k,\lambda) = 0$

$f(z+h) - f(z) = \{k u_x + \lambda u_y + \varepsilon_1(k,\lambda)\} + i\{k v_x + \lambda v_y + \varepsilon_2(k,\lambda)\}$

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{k(u_x+iv_x) + \lambda(u_y+iv_y) + \{\varepsilon_1(k,\lambda) + i\varepsilon_2(k,\lambda)\}}{k+i\lambda} =$$

$$= \frac{k f_x + \lambda f_y + \{\varepsilon_1 + \varepsilon_2\}}{k+i\lambda} = \frac{k f_x + \lambda i f_x + \{\varepsilon_1 + \varepsilon_2\}}{k+i\lambda} =$$

$$= f_x + \frac{\varepsilon_1(k,\lambda) + \varepsilon_2(k,\lambda)}{k+i\lambda} \xrightarrow[k,\lambda\to 0]{} f_x$$

$f'(z) = f_x$

όμοια προκύπτει $f'(z) = -i f_y$

→ Αν οι $f(z)$ η $\bar{f}(z)$ είναι αναλυτικές τότε $f(z) = σταθ.$

Έστω: $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$
$\bar{f}(z) = u(x,y) - iv(x,y)$
$f(z)$ αναλυτική $\longrightarrow \{u_x = v_y,\ u_y = -v_x\}$
$\bar{f}(z)$ αναλυτική $\longrightarrow \{u_x = -v_y,\ u_y = v_x\}$ →

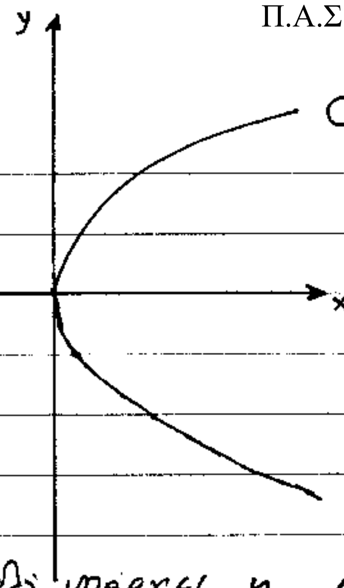
→ $u_x = 0$
$u_y = 0$
$v_x = 0$
$v_y = 0$

$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = u_x + iv_x = 0 \rightarrow f(z) = σταθερή$.

παράδειγμα:
Σε ποια σημεία έχει παράγωγο η $f(z) = x^2 + iy^3$; Είναι αναλυτική η f στα σημεία αυτά;

Γράφω $u(x,y) = x^2 \rightarrow u_x = 2x$ $u_y = 0$
$v(x,y) = y^3 \rightarrow v_x = 0$ $v_y = 3y^2$

$\xrightarrow[\text{Riemann}]{\text{Cauchy}} u_x = v_y \longleftrightarrow 2x = 3y^2 \longrightarrow x = \frac{3}{2}y^2$
$\{u_y = -v_x$ ισχύει$\}$



Η συνάρτηση δεν είναι αναλυτική, καθώς δεν υπάρχει δίσκος πάνω στα σημεία της C που να ορίζεται η παράγωγος.

πάνω στην παραβολή υπάρχει η παράγωγος $f'(z)=f_x=2x=3y^2=f_y$

$z=z(x,y)\in\mathbb{C}$

παράδειγμα:
Είναι η $f(z)=2\ln|z|+2i\,\mathrm{Arg}\,z$ αναλυτική στο $\mathbb{C}-\{0\}$;

$z=x+iy\to|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ $\qquad \mathrm{Arg}\,z=\mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$

$f(z)=\ln(x^2+y^2)+2i\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

$u(x,y)=\ln(x^2+y^2)\longrightarrow u_x=\frac{2x}{x^2+y^2},\quad u_y=\frac{2y}{x^2+y^2}$

$v(x,y)=2\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\longrightarrow v_x=2\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{2y}{x^2+y^2}$

$v_y=2\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{2x}{x^2+y^2}$

$\longrightarrow$ επαληθεύονται οι συνθήκες C-R
και επειδή οι u_x,u_y,v_x,v_y,u,v είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}^2-\{0,0\}$ έπεται πως η $f(z)$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}-\{0\}$.

<u>πρόταση</u>: Έστω το μιγαδικό επίπεδο με πολικές συντεταγμένες (r,φ) δηλαδή $z=r\cdot e^{i\varphi}$, $f(z)=u(r,\varphi)+iv(r,\varphi)$ και $\exists$ η $f'(z_0)$ στο z_0 όπου $z_0=r_0e^{i\varphi_0}$. Τότε στο σημείο αυτό υπάρχουν οι παράγωγοι $u_r,u_\varphi,v_r,v_\varphi$ και ισχύουν οι συνθήκες Cauchy-Riemann σε πολικές συντεταγμένες

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\qquad\frac{\partial u}{\partial\varphi}=-r\frac{\partial v}{\partial r}$$

επιπλέον $f'(z_0)=e^{i\varphi}\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{z_0}=\frac{1}{ire^{i\varphi}}\cdot\left.\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right|_{z_0}$

άσκηση: Να υπολογιστεί η πρώτη παράγωγος της $f(z)=e^z$

$z=x+iy$ $\quad f(z)=e^x\cdot e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)=\underbrace{e^x\cos y}_{u(x,y)}+i\underbrace{e^x\sin y}_{v(x,y)}$

$\left.\begin{array}{l} u_x=e^x\cos y=v_y \\ u_y=-e^x\sin y=-v_x \end{array}\right\}$ ισχύουν οι C-R $\longrightarrow f(z)$ είναι αναλυτική

$\rightarrow f'(z)=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(u+iv)=u_x+iv_x=e^x\cos y+ie^x\sin y=e^z$

άσκηση: Να υπολογιστεί η παράγωγος της $f(z)=\mathrm{Log}\, z$

$z=re^{i\theta}$ $\quad -\pi<\theta<\pi$

$\mathrm{Log}\, z=\ln r+i\,\mathrm{Arctan}(z)=\ln r+i\theta$

$u(r,\theta)=\ln r$ $\quad u_r=1/r$ $\quad v_r=0$

$v(r,\theta)=\theta$ $\quad u_\theta=0$ $\quad v_\theta=1$ $\quad \left\{\begin{array}{l} u_r=\frac{1}{r}v_\theta \\ u_\theta=-r u_r \end{array}\right. \longrightarrow$ Cauchy Riemann

$f'(z)=\frac{1}{iz}\cdot\frac{\partial f}{\partial\theta}=\frac{1}{iz}\cdot i=\frac{1}{z}$

Έστω $f(x,y)\,|\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$ αρμονική (δηλ. $\Delta f:=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$)

Έστω $f(z)|_D$ μια αναλυτική στον τόπο D. Τότε $f'(z)=f_x=-if_y$. Η δεύτερη παράγωγος θα είναι $f''(z)=(f'(z))'$. Αν $g(z):=f'(z)\longrightarrow f''(z)=g'(z)$. Τότε η $g(z)$ αναλυτική και θα πρέπει $g'(z)=g_x=-ig_y$

$\left.\begin{array}{l} g'(z)=\frac{\partial}{\partial x}(f'(z))=\frac{\partial}{\partial x}(f_x)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ g'(z)=-i\frac{\partial}{\partial y}(f'(z))=-i\frac{\partial}{\partial y}\left(-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)=-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{array}\right\}\Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\longrightarrow \boxed{\Delta f=0}$

$\Rightarrow$ Κάθε αναλυτική συνάρτηση είναι και αρμονική!!

<u>πρόταση</u>: Αν $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)|_D$ αναλυτική στο D, τότε οι u,v είναι αρμονικές.

απόδ. Ισχύουν οι Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y \longrightarrow u_{xx} = v_{xy}$$
$$u_y = -v_x \qquad u_{yy} = -v_{yx}$$

$\Big\} u_{xx} = -u_{yy} \longrightarrow u_{xx}+u_{yy}=0$

↳ κατά Schwarz

όμοιως προκύπτει και για τη v

παράδειγμα: Να δειχθεί ότι το ζεύγος $(\underbrace{e^x\cos y}_{u}, \underbrace{e^x\sin y}_{v})$ είναι αρμονικό.

$$f(z) = u(x,y)+iv(x,y) = e^x\cos y + ie^x\sin y = e^{x+iy} = e^z$$

αλλά η $f(z)$ είναι αναλυτική $\Longrightarrow$ u, v αρμονικό ζεύγος.

άσκηση: Να προσδιοριστεί η οικογένεια των αναλυτικών $f(z)$ για τις οποίες είναι $Re f(z) = y^3 - 3x^2y$

Αν $z = x+iy$ και $f(z) = y^3-3x^2y + i v(x,y)$

α) ισχύουν οι C-R

β) f αρμονική

$\longrightarrow$ α) $u_x = v_y \longrightarrow v_y = -6xy$

$u_y = -v_x \qquad v_x = -3y^2+3x^2 = 3x^2-3y^2$

$$v(x,y) = \int -6xy\, dy = -3xy^2 + g(x) \longrightarrow v_x = -3y^2 + g'(x) = 3x^2-3y^2$$

$$\longrightarrow g'(x) = 3x^2$$
$$g(x) = x^3 + c$$

$$\longrightarrow v(x,y) = x^3 - 3xy^2 + c$$

άρα $f(z) = y^3 - 3x^2y + i(x^3-3xy^2+c)$

Θέτω: $x = \dfrac{z+\bar{z}}{2} \qquad y = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

άσκηση: Να δειχτεί ότι η $u(x,y) = e^{-x}(x\sin y) - e^{x}\cos y$ είναι αρμονική και να εκφραστούν σε μιγαδική μορφή όλες οι αναλυτικές συναρτήσεις $f(z)$ με $Re f(z) = u(x,y)$

$$u_x = e^{-x}[(1-x)\sin y + y\cos y], \qquad u_y = e^{-x}[(x-1)\cos y + y\sin y]$$
$$u_{xx} = e^{-x}[(x-2)\sin y - y\cos y] \qquad u_{yy} = e^{-x}[(\cancel{2}-x)\sin y + y\cos y]$$

$$u_{xx}+u_{yy} = 0$$

τώρα $f(z) = e^{-x}(x\sin y - y\cos y) + i\,v(x,y)$

από C-R:

$v_y = u_x = e^{-x}[(1-x)\sin y + y\cos y]$

$v_x = -u_y = e^{-x}[(1-x)\cos y - y\sin y]$

. . . .

$v(x,y) = e^{-x}(x\cos y + y\sin y) + C$ C-R

. . . . . . $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

$f(z) = ize^{-z} + ci$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

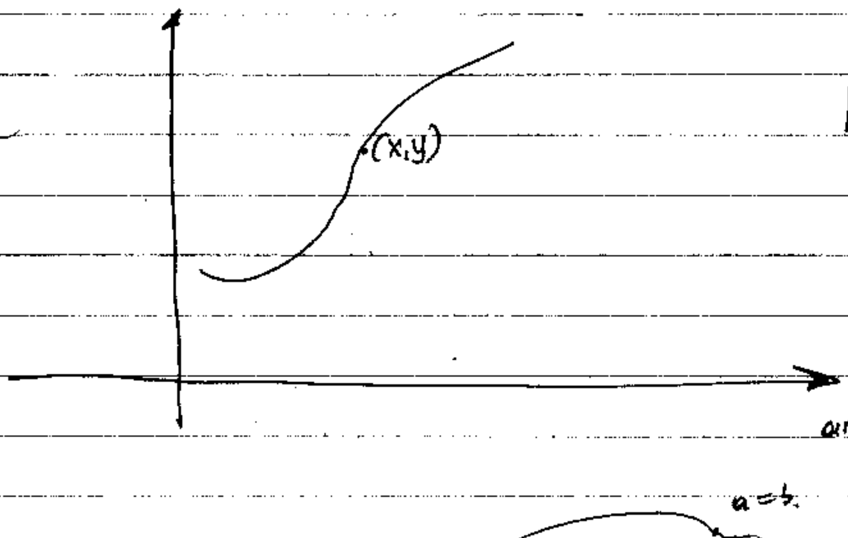
Έστω $f(z)/G$ μια μιγαδική συνάρτηση ορισμένη και συνεχής στον τόπο G. Μια αναλυτική συνάρτηση $F(z)$ με $F'(z)=f(z)$ στο G είναι μια παράγουσα της f. Η οικογένεια $\{F(z)+C, c \in C\}$ όπου F παράγουσα λέμε ότι είναι το ολοκλήρωμα της f.

ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

. B

A .

$x = x(t)$
$y = y(t)$ $t \in [a,b]$ παραμετρικές εξισώσεις μιας καμπύλης Γ



Ίχνος καμπύλης

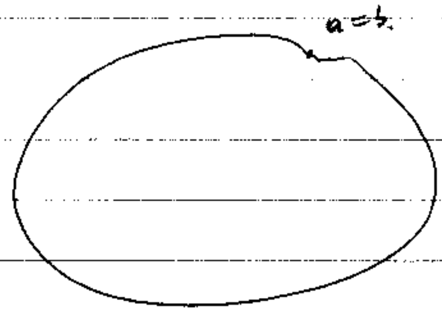
$\Gamma = \Gamma(t) = \{x(t), y(t)\}$

κλειστή καμπύλη: $\Gamma(a) = \Gamma(b)$

απλή καμπύλη: $\Gamma(t_1) \neq \Gamma(t_2)$ $\forall\, t_1, t_2 \in [a,b]$

απλή κλειστή καμπύλη:

$\Gamma(t_1) \neq \Gamma(t_2)$ $\forall\, t_1, t_2 \in (a,b)$,



$t_1 \neq a,\ t_2 \neq b$

$\Gamma(a) = \Gamma(b)$

Στο μιγαδικό επίπεδο: $z(t)=x(t)+iy(t)$ παραμετρική εξίσωση καμπύλης στο $\mathbb{C}$

πεπερασμένο $[a,b]$: τόξο καμπύλης

$[-\infty,a]$ ή $[a,+\infty)$: καμπύλη

Λεία καμπύλη: $\exists$ οι $x'(t), y'(t)$ $t\in[a,b]$ και $x'^2+y'^2\neq 0$ και είναι συνεχείς.

Αν Γ: λεία καμπύλη

$$S=\text{μήκος τόξου}=\int_a^b\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

Κατά τμήματα λεία καμπύλη (τμηματικά λεία) ορισμός: υπάρχει μια πεπερασμένη διαμέριση $\delta_{[a,b]}=\{a=t_0<t_1<t_2\ \ \}$ για την οποία κάθε καμπύλη $\Gamma_i(t)=\{z(t)=x(t)+iy(t),\ t\in(t_{i-1},t_i)\}$ είναι λεία $i=1,2,\dots,\nu$

ΘΕΩΡΗΜΑ JORDAN

Κάθε απλή κλειστή καμπύλη (του επιπέδου) χωρίζει το επίπεδο σε ένα φραγμένο (το εσωτερικό της καμπύλης) και σε ένα μη φραγμένο (το εξωτερικό της καμπύλης).

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $z=z(t)\ |\ t\in[a,b]$

$$\int_a^b z(t)\,dt:=\int_a^b x(t)\,dt+i\int_a^b y(t)\,dt$$

παράδειγμα:

$$\int_0^{\pi/2}e^{z(t)}dt=\int_0^{\pi/2}e^{x(t)+iy(t)}dt=\int_0^{\pi/2}e^{x(t)}(\cos y(t)+i\sin y(t))\,dt=\int_0^{\pi/2}e^{x(t)}\cos y(t)\,dt+i\int_0^{\pi/2}e^{x(t)}\sin y(t)\,dt$$

εφαρμογή: $z=1+it \rightarrow x(t)=1,\ y(t)=t \rightarrow \int_0^{\pi/2}e^{z(t)}dt=e\int_0^{\pi/2}e^{it}dt=e\left(e^{i\pi/2}-1\right)$

Έστω $f(z) / A \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο και $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ένα λείο τόξο με $\gamma([a,b]) \subseteq A$. Τότε το ολοκλήρωμα της f πάνω στο τόξο γ ορίζεται ως:

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_\gamma f(\gamma(t))\,d\gamma(t) = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$$

Αν γ είναι κατά τμήματα λεία τότε:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{} \int_{\gamma_i} f(z)\,dz$$

όπου γ_i τα λεία τμήματα της γ.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Με τις υποθέσεις του ορισμού έστω ότι η $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ $\big| z = x+iy$ είναι ορισμένη και συνεχής στο A. Τότε:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma (u+iv)\,d(x+iy) = \int_\gamma (u+iv)(dx+idy) = \int_\gamma (u\,dx - v\,dy) + i(u\,dy + v\,dx)$$

παραδ. 1

$$\int_\gamma |z|\,dz \qquad \gamma := \{ z(t) = 2t - it \mid 0 \le t \le 1 \}$$

$$\int |z|\,dz = \int_0^1 |2t - it|\, z'(t)\,dt = \int_0^1 t\sqrt{5}(2-i)\,dt = (2-i)\sqrt{5}\int_0^1 t\,dt = \frac{(2-i)\sqrt{5}}{2}$$

παραδ. 2

$$\int_\gamma |z|\,dz \quad \text{όταν} \quad \gamma = \{ |z| = 1,\ 0 \le \operatorname{Arg} z \le \pi \}$$

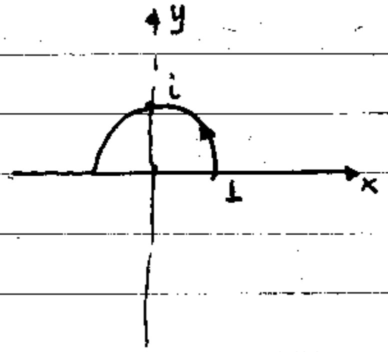
με αρχή το σημείο $z=1$.

α' τροπος

$z(t)=\cos t+i\sin t$ $\quad 0\le t\le \pi$

$dz=(-\sin t+i\cos t)\,dt$

$|z(t)|=1$



$$\int_\gamma |z|\,dz=\int_0^\pi(-\sin t+i\cos t)\,dt=$$

$$-\int_0^\pi \sin t\,dt+\int_0^\pi i\cos t\,dt=-2$$

β' τροπος

$z(t)=e^{it}\ /\ 0\le t\le \pi$

$$\int |z|\,dz=\int_0^\pi ie^{it}\,dt=-2$$

παραδ. 3

$$\int_\gamma \bar{z}\,dz \qquad \gamma:=\{z(t)=t^2+it\ /\ 0\le t\le 2\}$$

$z=t^2+it \longrightarrow \bar{z}=t^2-it \qquad dz=(2t+i)\,dt$

$$\int_\gamma \bar{z}\,dz=\int_\gamma (t^2-it)(2t+i)\,dt=\int_0^2(2t^3+t)\,dt+i\int_0^2 t^2-2t^2\,dt=\dots=10-\frac{8}{3}i$$

πρόταση: Έστω f,g συνεχείς μιγαδικές συναρτήσεις που ορίζονται πάνω στον κατά τμήματα λείο τόξο $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$. Τότε:

i) $\int_\gamma(\alpha f+\beta g)(z)\,dz=\alpha\int_\gamma f(z)\,dz+\beta\int_\gamma g(z)\,dz \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{C}$ σταθ.

ii) $\int_{\gamma^-} f(z)\,dz=-\int f(z)\,dz$

iii) $\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$ με $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ $\quad \gamma_1, \gamma_2$ τμηματικά λεία.

<u>πρόταση:</u> Αν f συνεχής μιγαδική συνάρτηση πάνω σε ένα λείο τόξο $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, L είναι το μήκος του τόξου γ (δηλ. $L = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$) και $\exists$ $M>0$ για το οποίο $|f(z)| \le M$ $\forall$ $z \in \gamma([a,b])$ τότε:

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le \int_\gamma |f(z)||dz| \le M \cdot L$$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u> Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ τμηματικά λείο τόξο. Ένα τμηματικά λείο τόξο $\hat{\gamma} : [c,d]$ είναι μια αναπαραμέτρηση του γ $\overset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow}$ Αν $\exists$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $\sigma : [a,b] \to [c,d]$ με τις ακόλουθες ιδιότητες.

(1) Η σ είναι C^1

(2) $\sigma'(t) > 0$ $\quad \forall$ $t \in (a,b)$

(3) $\sigma(a) = c$, $\sigma(b) = d$

(4) $\gamma(t) = \hat{\gamma}(\sigma(t))$ $\quad \forall$ $t \in [a,b]$

<u>παράγουσα της $f(z)$:</u> μια αναλυτική συνάρτηση $F(z)$ με $F'(z) = f(z)$

$$\int f(z)\,dz = F(z) + c \qquad c \in \mathbb{C}$$

<u>ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ</u>

Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ τμηματικά λείο τόξο και F μια μιγαδική συνάρτηση ορισμένη και αναλυτική σε ένα ανοικτό υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{C}$ με $\gamma([a,b]) \subseteq A$, τότε:

$$\int_\gamma F'(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Αν γ κλειστή τότε $\int_\gamma F'(z)dz = 0$

απόδειξη: Έστω $g(t) := \frac{dF(\gamma(t))}{dt} = F'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) = u' + iv'$

όταν $F(\gamma(t)) := u(t) + iv(t)$

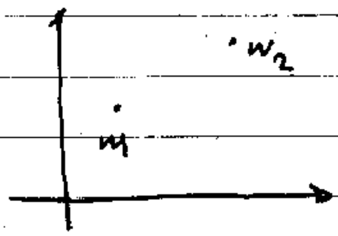
Έτσι:

$$\int_\gamma F'(z)\,dz = \int_\gamma F'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^b u'(t)+iv'(t)\,dt = \int_a^b u'(t)\,dt + i\int_a^b v'(t)\,dt =$$

$$= (u(b)-u(a)) + i\,(v(b)-v(a)) =$$
$$= u(b)+iv(b) - (u(a)+iv(a)) =$$
$$= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

παράδ. 1

$$\int_{w_1}^{w_2} z\,dz \qquad w_1, w_2 \in \mathbb{C}$$



πόρισμα: Αν η f έχει μια παράγουσα τότε το $\int_{w_1}^{w_2} f(z)\,dz$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης

$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ με $\gamma(0) = w_1$, $\gamma(1) = w_2$

Έστω $F(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi =: u(x,y) + iv(x,y)$

συνθήκες CR

$u_x = 2x = v_y$ $\longrightarrow$ ισχύουν οι συνθήκες

$u_y = -2y = -v_x$ $\longrightarrow$ $F(z)$ αναλυτική

$F'(z) = \frac{\partial F}{\partial x} = u_x + iv_x = 2z$

$$\int_\gamma z\,dz = \frac{1}{2}\int F'(z)\,dz = \frac{1}{2}\Big[F(\gamma(1)) - F(\gamma(0))\Big] = \frac{1}{2}\left[w_1^2 - w_2^2\right]$$

παραδ. 2

$$\int z^n dz \quad n \in \mathbb{Z},\ n \neq -1 \quad \text{πάνω στην } |z|=1$$

συμβολικά: $\boxed{\oint_{|z|=1} z^n dz}$

Έστω $F(z) = \dfrac{z^{n+1}}{n+1}$

$$\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} = \frac{z^{n+1}-z_0^{n+1}}{(n+1)(z-z_0)} = \frac{1}{n+1}\left[z^n + z^{n-1}z_0 + \dots + z_0^n\right]$$

$$\lim_{z \to z_0} z_0^n \longrightarrow F'(z) = z^n$$

ΑΣΘΕΝΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ CAUCHY

Έστω $D \subseteq \mathbb{C}$ ένας τόπος και $f(z)/D$ μια αναλυτική συνάρτηση στο D. Έστω επιπλέον $f'(z)$ συνεχής. Τότε

$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz = 0$$

πάνω σε οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη $\gamma \subset D$

ΑΣΘΕΝΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ CAUCHY

Έστω $f/D \subseteq \mathbb{C}$ αναλυτική στον τόπο D και η f' συνεχής τότε:

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$$

$\forall$ απλή κλειστή τμηματικά λεία καμπύλη $\gamma \in D$.

παράδειγμα:

$$\oint_{|z|=1} \sin z\,dz = 0$$

ΠΟΡΙΣΜΑ

Με τις παραπάνω υποθέσεις ισχύει:

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

$\forall$ δυο καμπύλες γ_1, γ_2 τμηματικά λείες με $\gamma_1, \gamma_2 \in D$ και ταυτιζόμενα άκρα (αρχή $\leftrightarrow$ αρχή, πέρας $\leftrightarrow$ πέρας)

παράδειγμα:

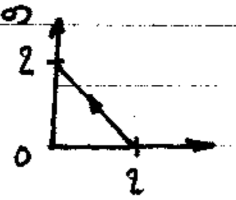
$$\int_2^{2i} (z^2+3z)\,dz$$

α' τρόπος

Η $F(z)=\frac{1}{3}z^3+\frac{3}{2}z^2$ είναι αναλυτική (ως πολυώνυμο) και $F'(z)=z^2+3z$ από το θ.θ.μ.ο. έχουμε:

$$\int_2^{2i}(z^2+3z)\,dz = \int_2^{2i} F'(z)\,dz = F(2i)-F(2) = \dots = -\frac{1}{3}(44+8i)$$

β' τρόπος



$$x+y=2 \rightarrow \begin{cases} x = 2-t \\ y = t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2$$

οπότε:

$$\int_0^2 \left\{(2-t+it)^2 + 3(2-t+it)\right\}(-1+i)\,dt =$$

$$= (-1+i)\int_0^2 (10-7t)+i(7t-2t^2)\,dt = -\frac{44}{3} - \frac{8}{3}i$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω f/D συνεχής στον τόπο D και $\exists$ μια F/D αναλυτική με $F' = f/D$. Τότε οι ακόλουθες προτάσεις ισχύουν και είναι ισοδύναμες:

i) $\int_{\gamma_1} f\,dz = \int_{\gamma_2} f\,dz$ $\forall \gamma_1,\gamma_2$ τμηματικά λείες με τα ίδια άκρα. $(\gamma_1,\gamma_2 \in D)$.

ii) $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$ $\forall$ απλή κλειστή τμηματικά λεία $\gamma \in D$

ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ

Αν ισχύει μια από τις (i), (ii), τότε η

$F(z) = \int_a^z f(z')\,dz'$ $a, z \in D$ είναι μια παράγουσα της f.

Α' ΘΕΩΡΗΜΑ GOURSAT

Αν f/G αναλυτική στον τόπο $G \subseteq \mathbb{C}$ και R ένα απλό κλειστό ορθογώνιο στο G, τότε:

$$\oint_{\partial R} f(z)\,dz = 0$$

$\partial R :=$ (σύνορο του R)

Β' ΘΕΩΡΗΜΑ GOURSAT

Αν f/G αναλυτική στον τόπο $G \subseteq \mathbb{C}$, τότε

$$\oint_{\partial D} f(z)\,dz = 0$$

όπου ∂D συνόρου κλειστού δίσκου $D(z_0, r) = \{z \in G : |z - z_0| \leq r\}$, $D \subseteq G$

Γ' ΘΕΩΡΗΜΑ GOURSAT

Αν f/G αναλυτική στον τόπο G με G απλά συνεκτικό τόπο και $\gamma \subseteq G$ μια τμηματικά λεία κλειστή καμπύλη, τότε

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$$

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΘΕΩΡΗΜΑ CAUCHY-GOURSAT

Έστω f αναλυτική στον πολλαπλά συνεκτικό τόπο G, γ_0 μια απλή, κλειστή, τμηματικά λεία καμπύλη στο εσωτερικό του G ($\gamma_0 \in I(G)$) που περικλείει τις απλές, κλειστές, τμηματικά λείες καμπύλες $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ και η γ_j είναι στο εξωτερικό της γ_k $\forall j \neq k$ $j,k = 1,2,\dots,n$. Τότε:

$$\oint_{\gamma_0} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \oint_{\gamma_j} f(z)\,dz$$

$$\left\{\begin{array}{l} I(G) \equiv \text{interior } G : \text{εσωτερικό του } G \\ E(G) \equiv \text{exterior } G : \text{εξωτερικό του } G \end{array}\right\}$$

παράδειγμα

Έστω C μια απλή, κλειστή, τμηματικά λεία καμπύλη. Να υπολογιστεί το $\oint_C \frac{1}{z-a}dz$ $a \in \mathbb{C}$. όταν (i) $a \in E(C)$
(ii) $a \in I(C)$

i) $$\oint_C \frac{dz}{z-a} = 0$$

{η $f(z) = \frac{1}{z-a}$ είναι αναλυτική στον τόπο που ορίζει η καμπύλη C και το ολοκλήρωμα είναι κλειστό.

ii) $$\oint_C \frac{1}{z-a}dz = \oint_{|z-a|=\varepsilon} \frac{1}{z-a}dz \overset{(\cdot)}{=} \int_0^{2\pi} \frac{i\,e^{i\varphi}}{\varepsilon \cdot e^{i\varphi}}\,d\varphi = 2\pi i$$

$(\cdot)$ $z = a + \varepsilon \cdot e^{i\varphi} \rightarrow dz = i \cdot \varepsilon e^{i\varphi} d\varphi$

$$\rightarrow \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{1}{z-a} = \begin{cases} 1 & a \in I(C) \\ 0 & a \notin I(C) \end{cases}$$

ο αριθμός $\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{1}{z-a}dz$ είναι ακέραιος και δηλώνει πόσες φορές η καμπύλη C τυλίγεται γύρω από το α. Συμβολίζεται με $I(C,a)$ και λέγεται δείκτης στροφής της C γύρω από το α.

παράδειγμα
Έστω $f/C \cup I(C)$ και $a\in I(C)$. Να δειχθεί ότι

$$\oint_C \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz=0$$

$$\int_C \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz=\oint_{|z-a|=\varepsilon}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz$$

αφού f αναλυτική $\rightarrow \lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}=f'(a)$. Οπότε $\exists\, \eta(z)$:
$\frac{f(z)-f(a)}{z-a}=f'(a)+\eta(z)$ οπότε:

$$=\int_{|z-a|=\varepsilon} f'(a)\,dz+\int_{|z-a|=\varepsilon}\eta(z)\,dz=f'(a)\int_0^{2\pi} i\varepsilon e^{i\varphi}d\varphi+\int_{|z-a|=\varepsilon}\eta(z)dz=$$

$$=f'(a)\int_0^{2\pi}\varepsilon e^{i\varphi}d(i\varphi)+\int_{|z-a|=\varepsilon}\eta(z)\,dz=0+\int_{|z-a|=\varepsilon}\eta(z)\,dz$$

όμως $\left|\int_{|z-a|=\varepsilon}\eta(z)dz\right|\le\frac{M}{2\pi}L=\frac{M}{2\pi}\int_{|z-a|=\varepsilon}|dz|=\frac{2\pi\varepsilon M}{2\pi}=\varepsilon M$

διότι $|\eta(z)|\le\frac{M}{2\pi}$ $\{\eta(z)$ μηδενική $\rightarrow$ φραγμένη$\}$

$$L=\int_{|z-a|=\varepsilon}|dz|$$

$$\oint_C\frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz=0\longrightarrow\oint_C\frac{f(z)}{z-a}=\oint_C\frac{f(a)}{z-a}\qquad a\in I(C)$$

$$=f(a)\oint_C\frac{dz}{z-a}=2\pi i\, f(a)$$

άρα $f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{z-a}dz$

Αν f αναλυτική στον τόπο G, γ μια απλή κλειστή καμπύλη με $C \subseteq G$ και $a \in I(\gamma)$. Τότε

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z-a}\, dz \qquad \text{(Ολοκληρωτικός τύπος Cauchy)}$$

$$f(a) = \begin{cases} 0 & a \notin I(\gamma) \\ \dfrac{1}{2\pi i} \oint \dfrac{f(z)}{z-a}\, dz & a \in I(\gamma) \end{cases}$$

Γενικά ισχύει:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \qquad n = 0,1,2,\dots$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 (ανισότητα Cauchy)

Αν f αναλυτική στον δίσκο $D = |z-a| \leq r$, τότε

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{M \cdot n!}{r^n} \qquad n = 0,1,\dots$$

όταν $|f(z)| \leq M$ $\forall$ z πάνω στον κύκλο $|z-a| = r$

απόδειξη:

$$|f^{(n)}(a)| \leq \left|\frac{n!}{2\pi i}\right| \oint \frac{|f(z)|}{|z-a|^{n+1}}\, |dz| \leq \frac{Mn!}{2\pi} \oint \frac{|dz|}{|z-a|^{n+1}} = \frac{Mn!}{2\pi r^{n+1}} \oint |dz| =$$

$$= \frac{Mn!}{2\pi r^{n+1}} 2\pi r =$$

$$= \frac{Mn!}{r^n}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 (Liouville)

Αν $\forall$ $z \in \mathbb{C}$ ισχύει: i) $f(z)$ αναλυτική

ii) $f(z)$ φραγμένη ($|f(z)| \leq M$ $\forall$ $z \in \mathbb{C}$)

τότε $f(z) =$ σταθερή.

αποδειξη:

Για $n=1 \xrightarrow[\text{Cauchy}]{\text{ανισότητα}} |f'(a)| \le \frac{M}{r}$ $\forall$ κυκλο $|z-a|=r$

άρα για $r \to \infty$ $|f'(a)| \le 0 \longrightarrow |f'(a)|=0.$

και επειδή $a \in \mathbb{C} \longrightarrow f(z)=$ σταθερή.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 (Morera)

Αν $f(z)$ συνεχής σε ενα απλά συνεκτικό τόπο G και $\oint f(z)\,dz=0$ $\forall$ απλή κλειστή καμπυλη $C \subseteq G$, τότε f αναλυτική στο G.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 (Μέση τιμη του Gauss)

Αν $f(z)$ αναλυτική στο δίσκο $|z-a| \le r$ τότε:

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\varphi})\,d\varphi$$

αποδειξη:

αφου $f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\varphi})\,d\varphi$

$$\left.\begin{array}{l} z=a+re^{i\varphi} \\ dz=ire^{i\varphi}d\varphi \end{array}\right\}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

(α) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i) $A := \oint_{|z|=3} \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz$ ii) $B := \oint_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$

Λύση

i) $\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$

άρα $A = \oint_{|z|=3} \frac{f(z)}{z-2} dz - \oint_{|z|=3} \frac{f(z)}{z-1} dz$ όπου $f(z) = \sin \pi z^2 + \cos \pi z^2$

στον κύκλο $|z| = 3$ ανήκουν τα $1, 2 \rightarrow$ ισχύει ο τύπος του Cauchy. Οπότε

$A = 2\pi i\, f(2) - 2\pi i\, f(1) = \ldots = 4\pi i$

ii) $B = \oint_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{[z-(-1)]^{3+1}} dz = \frac{2\pi i}{3!} f^{(3)}(-1)$ με $f(z) = e^{2z}$

$f^{(3)}(z) = 8e^{2z}$ άρα $f^{(3)}(-1) = 8e^{-2}$ άρα

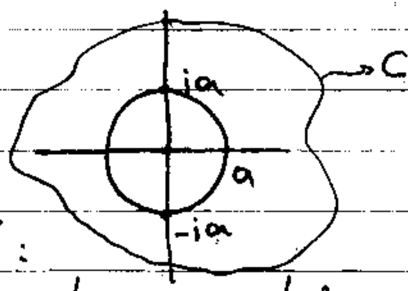
$B = \frac{2\pi i}{6} 8e^{-2} = \frac{\pi i}{3} 8e^{-2}$

(β) Ομοίως για το $\Gamma := \oint_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2} dz = \oint \frac{\sin \pi z}{(z-1)^2 (z+1)^2} dz =$

$= \oint \frac{\frac{\sin \pi z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2} dz = \oint_{|z-1|=1} \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(1) = \frac{2\pi i}{1} \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi^2}{2} i$

$f(z) = \frac{\sin \pi z}{(z+1)^2} \longrightarrow f'(z) = \frac{\pi \cdot \cos \pi z (z+1)^2 - 2(z+1)\sin \pi z}{(z+1)^4} \rightarrow f'(1) = \frac{4\pi \cdot \cos \pi - 4 \sin \pi}{2^4}$

(γ) Έστω C απλή κλειστή τμηματικά λεία καμπύλη που στο εσωτερικό της περιέχει το δίσκο $|z| \leq a$.
Να υπολογιστεί το: $\displaystyle\oint_C \frac{e^z}{z^2+a^2}\,dz$



$$D = \oint_C \frac{e^z}{(z-ai)(z+ai)}\,dz$$

$\boxed{\text{Σημ}}$: Τα σημεία ανωμαλίας του ολοκληρώματος βρίσκονται ΠΑΝΩ στον $|z|=a$.

$$\frac{1}{z^2+a^2} = \left(\frac{1}{z-ai} - \frac{1}{z+ai}\right)\frac{1}{2ai}$$

οπότε: $$D = \frac{1}{2ai}\oint_C \frac{e^z}{z-ai}\,dz - \frac{1}{2ai}\oint_C \frac{e^z}{z+ai}\,dz =$$

$\boxed{f(z) = e^z}$ $$= \frac{1}{2ai}\Big(2\pi i\, f(ai) - 2\pi i\, f(-ai)\Big) = \frac{\pi}{a}\left(e^{ai} - e^{-ai}\right) = \frac{2\pi i}{a}\sin a$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ - ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ

Ορίζουμε τους μιγαδικούς τελεστές:

$$\nabla := \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} = 2\frac{\partial}{\partial \bar z}$$

$$\bar\nabla := \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} = 2\frac{\partial}{\partial z}$$

Έστω $F(x,y) \,/\, \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \in C^1$ και $A(x,y) = P(x,y) + i\,Q(x,y)$ μιγαδική με συνεχή παράγωγο συνάρτηση των x, y.
Μπορούμε να γράψουμε:

$$F(x,y) = F\left(\frac{z+\bar z}{2}, \frac{z-\bar z}{2i}\right) = G(z,\bar z) \quad \text{και}$$
$$A(x,y) = B(z,\bar z)$$

•) ΚΛΙΣΗ:

$$\text{grad}\,F = \nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y} = 2\frac{\partial G}{\partial \bar z}$$

$$\text{grad}\,A = \nabla A = \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} + i\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial B}{\partial \bar z}$$

Αν B αναλυτική συνάρτηση $\longrightarrow$ ισχύουν οι C-R και $\frac{\partial B}{\partial \bar z} = 0$ ή $\nabla A = 0$.

•) ΑΠΟΚΛΙΣΗ:

$$\text{div}\,A = \nabla \cdot A = \text{Re}\{\bar\nabla A\} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 2\,\text{Re}\left\{\frac{\partial B}{\partial z}\right\}$$

•) ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ:

$$\text{curl}\,A = \nabla \times A = \text{Im}\{\bar\nabla A\} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2\,\text{Im}\left\{\frac{\partial B}{\partial z}\right\}$$

•) ΛΑΠΛΑΣΙΑΝΗ:

(ΤΕΛΕΣΤΗΣ : $\nabla^2 = \text{Re}\{\bar\nabla \nabla\} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar z}$

Αν A αναλυτική $\longrightarrow$ P, Q αρμονικές $\longrightarrow$ $\nabla^2 A = 0$.