ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. Να εξετάσετε αν η μιγαδική συνάρτηση $f(z) = z^2\bar{z}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{C}$.

2. Αν $f(z) = \sqrt{z^2+3}$, $f(0) = \sqrt{3}$ να προσδιορίσετε το όριο $\lim\limits_{z\to 1} \dfrac{\sqrt{z^2+3}-2}{z-1}$.

3. Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια πάνω στο δίσκο $|z| \le 1$ η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{z}{z^4+1}$ και να προσδιοριστούν ακριβώς τα σημεία ασυνέχειάς της.

4. Να λυθούν οι εξισώσεις: (α) $\cos z = \dfrac{3+i}{4}$, (β) $\sin z = \sqrt{3}$, (γ) $\overline{\left(e^{iz}\right)} = e^{i\bar{z}}$

5. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2+y^2}$, $z \neq 0$ και $f(0) = 0$ είναι συνεχής στο 0 και ικανοποιεί τις συνθήκες Cauchy-Riemann στο σημείο αυτό. Υπάρχει η παράγωγος $f'(0)$;

6. Σε ποιά σημεία έχει παράγωγο η $f(z) = (x^2+2y) + i(x^2+y^2)$, $z = x+iy$;

7. Να δειχτεί ότι η συνάρτηση $f(z) = z\,\mathrm{Re}\,z$ έχει παράγωγο στο $z=0$ και να προσδιοριστεί η παράγωγος αυτή. Είναι η παραπάνω συνάρτηση αναλυτική στο $z=0$;

8. Σε ποιό σύνολο είναι η $f(z) = z^{z}$ αναλυτική; Υπολογίστε την παράγωγό της.

9. Να προσδιοριστούν οι αντίστροφες εικόνες των συναρτήσεων $\mathrm{Re}\,w =$ σταθ., $\mathrm{Im}\,w =$ σταθ. μέσω της απεικόνισης $w = z^2$.

10. Να προσδιοριστούν οι τιμές των ακολούθων εκφράσεων:

$$(\alpha)\ \mathrm{Log}\,4,\ (\beta)\ (-2)^{\sqrt{2}},\ (\gamma)\ \mathrm{Log}\,i,\ (\delta)\ 2^{i},\ (\varepsilon)\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i},\ (\sigma\tau)\ (3-4i)^{1+i}\,\mathrm{Log}(2-3i)$$

11. Να προσδιοριστούν οι αναλυτικές συναρτήσεις $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x+iy$ στις ακόλουθες περιπτώσεις: (α) $u(x,y) = x - xy$, (β) $u(x,y) = \dfrac{y}{(x-2)^2+y^2}$.

12. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\oint_{\Gamma} f(z)\,dz$ στις ακόλουθες περιπτώσεις όταν η καμπύλη διαγράφεται κατά τη θετική φορά:

(α) $f(z) = |z|\bar{z}$, $\Gamma :=$ Η κλειστή καμπύλη που αποτελείται από το σύνολο $\{(x,0) : -1 \le x \le 1\}$ και το ημικύκλιο $|z| = 1$, $y \ge 0$.

(β) $f(z) = \dfrac{z}{\bar{z}}$, $\Gamma :=$ Η κλειστή καμπύλη που αποτελείται από τα ημικύκλια $|z| = 1$, $y \ge 0$ και $|z| = 2$, $y \ge 0$ και τα σύνολα $\{(x,0) : -2 \le x \le -1\}$, $\{(x,0) : 1 \le x \le 2\}$

(γ) $f(z) = \left(1+z^2\right)^{-1}$, $\Gamma :=$ Η έλλειψη $x^2 + 4y^2 = 1$.

13. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα: (α) $\oint\limits_{|z|=1} (z^5+12)\,dz$, (β) $\oint\limits_{|z-(1+5i)|=3} e^{1/z}\,dz$, $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \sqrt{z^2-1}\,dz$

14. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\oint\limits_{|z|=3} \frac{2z^2-15z+30}{z^3-10z^2+32z-32}dz$

15. Να υπολογιστεί το $\oint\limits_{C} \bar{z}^2 dz$ όταν (α) C είναι ο κύκλος $|z|=1$ και (β) C είναι ο κύκλος $|z-1|=1$

16. Αν η C αποτελείται από τα τόξα των παραβολών $y=x^2$ από το σημείο (0,0) έως το σημείο (1,1) και $y^2=x$ από το σημείο (1,1) έως το σημείο (0,0), να υπολογιστεί το $\oint\limits_{C}\left(5z^4-z^3+2\right)dz$

17. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα: (α) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z(z^2-1)}$, (β) $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{\left(z^2-1\right)^2}dz$.

(γ) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z-1}{z(z+2)^3}dz$, (δ) $\oint\limits_{L} \frac{ze^z}{(z-a)^3}dz$ με $a \in I(L)$.

Κ.Γ. ΛΑΣΚΑΡΙΔΗΣ
27.5.04

$$|f_2(z)-f_2(z_0)| = |z^4+1-z_0^4-1| = |z^4-z_0^4| = |z-z_0||z^3+z^2z_0+z_0^2z+z_0^3| \le$$
$$\le 4|z-z_0|$$

και αν θέσουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$

$$\xrightarrow{|z-z_0|<\delta} |f_2(z)-f_2(z_0)| \le \varepsilon$$

άρα η f_2 είναι συνεχής (και μάλιστα όπως και η f_1 ομοιόμορφα)

$\rightarrow$ η f είναι συνεχής $\forall z \in D - \{z \in D : z^4+1 \neq 0\}$.

4) α) $\cos z = \frac{3}{4} + i\frac{1}{4}$

$$W := \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \leftrightarrow e^{iz}+e^{-iz} = 2W \leftrightarrow$$

$$(e^{iz})^2 - 2W \cdot e^{iz} + 1 = 0 \rightarrow e^{iz} = \frac{2W \pm \sqrt{4W^2-4}}{2} = W \pm \sqrt{W^2-1}$$
$$= W + \sqrt{W^2-1}$$

όμως $e^{iz} = e^{i(z-2k\pi)}$ $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$i(z-2k\pi) = \ln(W+\sqrt{W^2-1}) \leftrightarrow z = 2k\pi + \frac{1}{i}\ln(W+\sqrt{W^2-1})$$

όπου $W = \frac{3}{4} + i\frac{1}{4}$

β) $\sin z = \sqrt{3}$

κατά τρόπο όμοιο:

$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2} = \sqrt{3} \leftrightarrow e^{iz}-e^{-iz} = 2\sqrt{3} \leftrightarrow (e^{iz})^2 - 2\sqrt{3}(e^{iz}) - 1 = 0$$

$$e^{iz} = \frac{2\sqrt{3} \pm 4}{2} = \sqrt{3} \pm 2 \xrightarrow{z=x+iy} e^{-y}\cos x + i e^{-y}\sin x = \sqrt{3} \pm 2$$

$$\rightarrow x = n\pi \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

έτσι ώστε:

$$x_1 = 2k\pi \rightarrow e^{-y_1} = \sqrt{3}+2 \rightarrow y_1 = -\ln(\sqrt{3}+2) \rightarrow z_1 = 2k\pi - i\ln(\sqrt{3}+2)$$
$$x_2 = (2k+1)\pi \rightarrow -e^{-y_2} = \sqrt{3}-2 \rightarrow y_2 = -\ln(2-\sqrt{3}) \rightarrow z_2 = (2k+1)\pi - i\ln(2-\sqrt{3})$$

γ) $\left(\overline{e^{iz}}\right) = e^{i\bar{z}} \xleftrightarrow{z=x+iy}$

$$\longleftrightarrow \left(\overline{e^{ix-y}}\right) = e^{ix+y} \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow e^{-y-ix} = e^{ix+y} \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow e^{-y}(\cos x - i\sin x) = e^{y}(\cos x + i\sin x)$$

$$\longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e^{-y}\cos x = e^{y}\cos x \\ e^{-y}\sin x = -e^{y}\sin x \end{array}\right\} \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (e^{-y} - e^{y})\cos x = 0 \\ (e^{-y} + e^{y})\sin x = 0 \end{array}\right\} \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot\sinh y\cdot\cos x = 0 \\ 2\cosh y \sin x = 0 \end{array}\right\} \longleftrightarrow \begin{array}{l} x = n\pi \quad n=0,1,\ldots \\ y = 0 \end{array}$$

δηλαδή : $z = n\pi \quad n = 0,1,2\ldots$

δ) $f(x+iy) = \dfrac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2+y^2}$, $f(0) = 0$

πρέπει : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x+iy) = f(0) = 0$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} + i\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3(\cos^3\varphi - \sin^3\varphi)}{r^2} + i\frac{r^3(\cos^3\varphi + \sin^3\theta)}{r^2}$$

$$= 0.$$

Άρα η $f(z)$ είναι συνεχής στο $z=0$.

$$f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} + i\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} u_x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{u(x,0) - u(0,0)}{x} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{u(x,0)}{x} = 1 \\ v_y = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{v(0,y) - v(0,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{v(0,y)}{y} = 1 \end{array}\right\} \boxed{u_x = v_y} \text{ στο } z=0$$

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \lim_{x\to 0} \frac{v(x,0)-v(0,0)}{x} = 1 \\ u_y &= \lim_{y\to 0} \frac{u(0,y)-u(0,0)}{y} = 1 \end{aligned}\right\} \boxed{u_y = -v_x}$$

$$f'(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)-f(0,0)}{x+iy} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)}{x+iy} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3-y^3+i(x^3+y^3)}{(x+iy)(x^2+y^2)} =$$

α) $$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^3-y^3+i(x^3+y^3)}{(x^3+xy^2)+i(x^2y+y^3)}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3+ix^3}{x^3} = 1+i$$

β) $$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^3-y^3+i(x^3+y^3)}{(x+iy)(x^2+y^2)}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{-y^3+iy^3}{i\cdot y^3} = 1+i$$

έτσι η $f'(0)$ υπάρχει και μάλιστα $f'(0)=1+i$

Θα μπορούσε κανείς να παραπλανηθεί από τις συνθήκες CR αφού αποδεικνύεται πως η $u_y^{(*)}$ ΔΕΝ είναι συνεχής στο $z=0$. Αυτό όμως δε σημαίνει κάτι αναφορικά με την $f'(z=0)$ αφού η ασυνέχεια δεν είναι η αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη της παραγώγου. (*) κ και επίσης η v_x)

6. $f(x+iy) = (x^2+2y) + i(x^2+y^2)$, $z=x+iy$

Η f έχει παράγωγο στα σημεία όπου ισχύουν οι συνθήκες Cauchy-Riemann και επιπλέον οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς. Πρέπει δηλαδή:

$$\left.\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}\right. \text{ κ } u_x, v_x, u_y, v_y \text{ συνεχείς } \Big\}$$

$$\left.\begin{aligned} U_x &= 2x \\ V_y &= 2y \end{aligned}\right\} \longrightarrow 2x = 2y \longleftrightarrow x = y$$

ακόμη:

$$\left.\begin{aligned} U_y &= 2 \\ U_x &= 2x \end{aligned}\right\} \longrightarrow x = -1.$$

$\longrightarrow$ Άρα το σημείο στο οποίο υπάρχει η $f'(z_0)$ είναι το $z_0 = -1 - i$.

7) $f(z) = z \cdot Re\{z\} = x^2 + iyx$

$f(0) = 0$

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+iyx}{x+iy} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x = 0.$$

$$\longrightarrow f'(0) = 0.$$

έστω $z_0 \in \mathbb{C} - \{z=0\}$. Θα αναζητήσουμε την παράγωγο της $f(z)$ σε εκείνο το σημείο:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{x^2-x_0^2+i(yx-y_0x_0)}{(x-x_0)+i(y-y_0)}$$

αν διαλέξω το δρόμο παράλληλο προς τον πραγματικό άξονα, δηλαδή $x \to x_0$ και $y = y_0$ τότε:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{x^2-x_0^2+iy_0(x-x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} x+x_0+iy_0 = 2x_0+iy_0$$

ενώ αν διαλέξω τον παράλληλο προς τον φανταστικό άξονα, δηλαδή $x = x_0$ όταν $y \to y_0$ τότε:

$$\lim_{y\to y_0} \frac{ix_0(y-y_0)}{i(y-y_0)} = x_0$$

Τελικά θα πρέπει $x_0 = 2x_0 + iy_0 \longleftrightarrow x_0 = 0$ και $y_0 = 0$

Συνεπώς η $f(z)$ δεν είναι αναλυτική στο $z=0$ αφού μόλις αποδείχθηκε πως εκτός του σημείου αυτού πουθενά αλλού η f δεν έχει πρώτη παράγωγο. Έτσι δεν υπάρχει δίσκος γύρω από το σημείο της αρχής των αξόνων όπως ο ορισμός του αναλυτικού σημείου απαιτεί.

8) $f(z)=z^z$ $\qquad z=x+iy=r\cdot e^{i\varphi}$

$$f(z)=e^{z\cdot \ln z}=e^{z\cdot\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}+i(\arctan(y/x)+2k\pi)\right)}= \qquad k=0,1,\dots$$

$$=\exp\Big[r[\cos\varphi+i\sin\varphi]\cdot[\ln r+i\varphi]\Big]=$$

$$=\exp\Big[(r\cos\varphi\cdot\ln r-r\sin\varphi\cdot\varphi)+i(r\cdot\sin\varphi\cdot\ln r+r\cdot\cos\varphi\cdot\varphi)\Big]=$$

$$=\cos(A(r,\varphi))+i\sin(B(r,\varphi))=u(r,\varphi)+i\,v(r,\varphi)$$

πρέπει:

$$u_r=\frac{1}{r}v_\varphi$$

$$u_r=-\sin(A(r,\varphi))\cdot A_r=-\sin(A)\{\cos\varphi\cdot\ln r+\cos\varphi-\sin\varphi\cdot\varphi\}$$

$$\frac{1}{r}v_\varphi=\frac{1}{r}\cos(B(r,\varphi))\cdot B_r \qquad =\frac{1}{r}\cos(B(r,\varphi))\{r\cos\varphi\cdot\ln r+r\cdot\cos\varphi-\sin\varphi\cdot\varphi\}$$

Συνεπώς $\xrightarrow{\text{πρέπει}} -\sin A=+\cos B \longrightarrow \boxed{A+B=-\frac{\pi}{2}}$

$$u_\varphi=-r v_r$$

$$u_\varphi=-\sin A\cdot\left[-\sin\varphi\, r\ln r-r\sin\varphi-r\cos\varphi\cdot\varphi\right]=\sin A\left[r\cdot\ln r\cdot\sin\varphi+r\cdot\sin\varphi+r\cdot\cos\varphi\cdot\varphi\right]$$

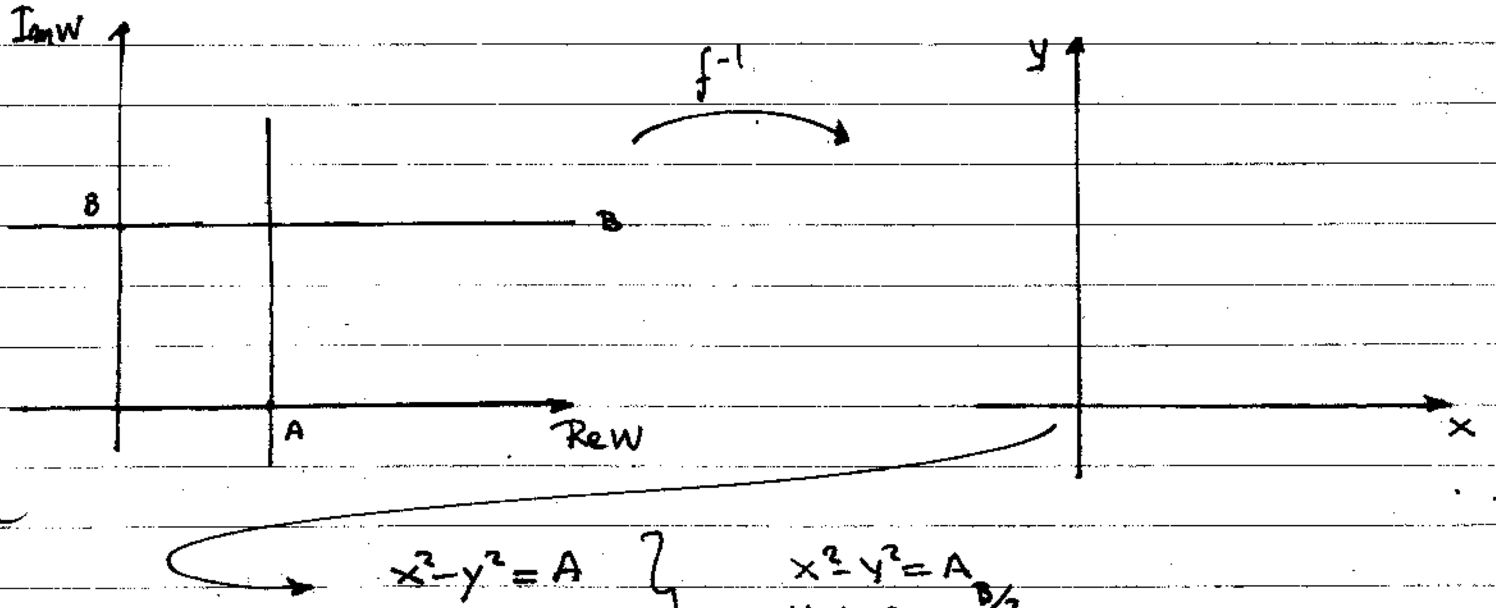
$$-r\cdot v_r=-r\cdot\cos B\cdot\left[\sin\varphi\cdot\ln r+\sin\varphi+\cos\varphi\cdot\varphi\right]=-\cos B\left[r\cdot\ln r\cdot\sin\varphi+r\cdot\sin\varphi+r\cdot\cos\varphi\cdot\varphi\right]$$

$$\sin A=-\cos B \longrightarrow \dots \boxed{A+B=-\pi/2}$$ σύνολο που η f είναι αναλυτική

$$f'(z)=(z^z)'=(e^{z\ln z})'=e^{z\ln z}(\ln z+1)=z^z\cdot\ln z+z^z$$

9) $f(z) = w = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$

$\mathrm{Im}\,w =$ σταθ. $\quad \mathrm{Re}\,w =$ σταθ.



$$\left.\begin{aligned} x^2 - y^2 &= A \\ 2xy &= B \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x^2 - y^2 &= A \\ y(x) &= \frac{B/2}{x} \end{aligned}$$

Οι δύο αυτοί γεωμετρικοί τόποι είναι οι ισογώνιες αντίστροφες απεικονίσεις. Οι γραφικές παραστάσεις ποικίλουν ανάλογα με τα A, B.

10) α) $\mathrm{Log}\,4 = \ln 4$

β) $(-2)^{\sqrt{2}} = (2 \cdot e^{i\pi})^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}} \cdot e^{i\sqrt{2}\pi} = 2^{\sqrt{2}} \cos\sqrt{2}\pi + i 2^{\sqrt{2}} \sin\sqrt{2}\pi$

γ) $\mathrm{Log}\,i = \mathrm{Log}\, e^{i\pi/2} = i\frac{\pi}{2} \quad \{\mathrm{Log}\,i = \ln 1 + i\,\mathrm{Arg}(1/0) = i\pi/2$

δ) $2^i = e^{i\ln 2} = \cos(\ln 2) + i\sin(\ln 2)$

ε) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{1+i} = \left(1 e^{-i\pi/4}\right)^{1+i} = e^{\pi/4}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$

$= e^{\pi/4}\cos\frac{\pi}{4} - ie^{\pi/4}\sin\pi/4 = e^{\pi/4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - ie^{\pi/4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

στ) $(3-4i)^{1+i} \cdot \mathrm{Log}(2-3i) = (5 \cdot e^{i\varphi_1})^{1+i} \cdot [\ln r + i\varphi_2] =$

$\varphi_1 = \arctan(4/3)$

$\varphi_2 = \arctan(-3/2)$

$= 5 \cdot 5^i \cdot e^{i\varphi_1} \cdot e^{-\varphi_1} [\ln r + i\varphi_2] = 5[\cos(\ln 5) + i\sin(\ln 5)] \cdot [\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1] \cdot e^{-\varphi_1} \cdot$

$\cdot [\ln r + i\varphi_2] = \ldots$

11) $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

α) $u(x,y) = x - xy$

από C-R έχω: $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$

$$u_x = 1 - y = v_y$$

$$v(x,y) = y - \frac{1}{2}y^2 + g_1(x) \longrightarrow v'_x = g_1'(x) = -u_y = -x$$

$$g_1'(x) = -x$$

$$\longrightarrow v(x,y) = -\frac{1}{2}x^2 + g_2(y)$$

$\longrightarrow g_2(y) = y - \frac{1}{2}y^2$ και τέλος: $v(x,y) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + y + c \in \mathbb{C}$

$$f(z) = x - xy + i\left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + y + c\right)$$

β) $u(x,y) = \dfrac{y}{(x-2)^2 + y^2}$ $\quad (x,y) \neq (2,0)$

Θέτω $x - 2 = r\cdot\cos\varphi$, $y = r\cdot\sin\varphi$ χωρίς βλάβη των συνθηκών Cauchy-Riemann και έτσι

$$u(r,\varphi) = \frac{r\cdot\sin\varphi}{r^2} = \frac{\sin\varphi}{r}$$

C-R:

$$u_r = \frac{1}{r}v_\varphi \longrightarrow -\frac{\sin\varphi}{r^2} = \frac{1}{r}v_\varphi \longrightarrow v_\varphi = -\frac{\sin\varphi}{r}$$

$$\left.\begin{aligned} v(r,\varphi) &= \frac{1}{r}\cos\varphi + q_1(r) \\ v_r = -\frac{1}{r}u_\varphi = -\frac{\cos\varphi}{r^2} &\longrightarrow v(r,\varphi) = \frac{\cos\varphi}{r} + q_2(\varphi) \end{aligned}\right\}.$$

$$v(r,\varphi) = \frac{\cos\varphi}{r} + q_1(r) + q_2(\varphi)$$

εφαρμόζοντας εκ νέου τις C-R $\longrightarrow v(r,\varphi) = \dfrac{\cos\varphi}{r} + c$, $c \in \mathbb{C}$

{προκύπτουν δηλαδή οι $q_1', q_2' = 0$}.

και τελικά:

$$f(r,\varphi)=\frac{\sin\varphi}{r}+i\left(\frac{\cos\varphi}{r}+c\right) \qquad \left\{\begin{array}{l} x=r\cos\varphi-2 \\ y=r\sin\varphi \end{array}\right\}$$

12) $\oint_\Gamma f(z)\,dz$

α) $f(z)=|z|\bar{z}$ $\qquad \Gamma:=\{|z|=1,\ Im(z)\geq 0 \ \cup \ Im(z)=0 : -1\leq Re(z)\leq 1\}$

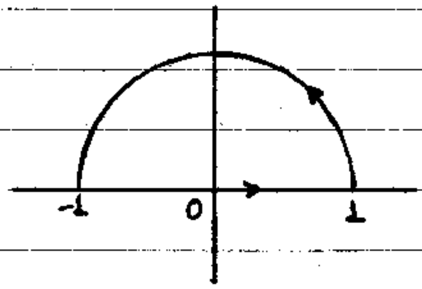
$$f(z)=\sqrt{x^2+y^2}\,(x-iy)=x\sqrt{x^2+y^2}-iy\sqrt{x^2+y^2}=u+iv$$

$$\left.\begin{array}{l} u_x=\sqrt{x^2+y^2}+x\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{x^2+y^2+x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ v_y=-\sqrt{x^2+y^2}-y\dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{-x^2-y^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=-\dfrac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array}\right\} u_x\neq v_y$$

Άρα η f δεν είναι αναλυτική $\longrightarrow \oint f\,dz\neq 0.$

$$\oint f(z)\,dz=\oint\sqrt{x^2+y^2}\,(x-iy)\,dz=$$

$$\Gamma:=\left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=0 \end{array}\ -1\leq t\leq 1\right\}\cup\left\{\begin{array}{l} z=e^{i\varphi} \\ 0\leq\varphi\leq\pi \end{array}\right\}$$



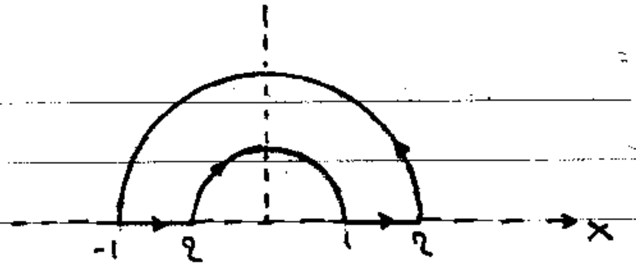
$$=\int_{-1}^{1}|t|(t)\,dt+\int_0^{\pi}e^{-i\varphi}\,i\cdot e^{i\varphi}\,d\varphi=$$

$$=-\int_{-1}^{0}t^2dt+\int_0^1 t^2dt+\int_0^{\pi}i\,d\varphi=-\frac{1}{3}t^3\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{3}t^3\Big|_0^1+i\pi=\frac{2}{3}+i\pi$$

β) $f(z)=\dfrac{z}{\bar{z}}$

$$\Gamma:=\left\{\begin{array}{l} z\in\mathbb{C}:\{|z|=1,\ |z|=2\}/Im(z)\geq 0\ \cup \\ Im(z)=0 \quad \text{και} \quad -2\leq Re(z)\leq -1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 1\leq Re(z)\leq 2 \end{array}\right\}$$

Ομοίως και εδώ μπορούμε να αποδείξουμε πως δεν ισχύουν οι συνθήκες C-R για την f στον τόπο Γ. $\longrightarrow \oint f(z)dz\neq 0.$



άρα: $z=x+iy$

$\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3+\Gamma_4$ όπου

$\Gamma_1:=\left\{\begin{matrix} y=0 \\ x=t \end{matrix},\ -1\le t\le 2\right\}$

$\Gamma_2:=\left\{ z=e^{i\varphi},\ 0\le\varphi\le\pi\ (\pi\to\varphi\to 0)\right\}$

$\Gamma_3:=\left\{\begin{matrix} y=0 \\ x=t \end{matrix},\ 1\le t\le 2\right\}$

$\Gamma_4:=\left\{ z=2\cdot e^{i\varphi},\ 0\le\varphi\le\pi\right\}$ άρα:

$$\oint_C f(z)\,dz=\int_{\Gamma_1}+\int_{\Gamma_2}+\int_{\Gamma_3}+\int_{\Gamma_4}=\int_{-1}^{2}dt+\int_{\pi}^{0}\frac{e^{i\varphi}}{e^{-i\varphi}}\cdot ie^{i\varphi}d\varphi+\int_{1}^{2}dt+\int_{0}^{\pi}\frac{2e^{i\varphi}}{2e^{-i\varphi}}i2e^{i\varphi}d\varphi$$

$$=3+\int_0^{\pi} ie^{i\cdot 3\varphi}d\varphi=3+\frac{1}{3}e^{i3\varphi}\Big|_0^{\pi}=3+\frac{1}{3}\left(e^{i3\pi}-1\right)=\frac{1}{9}$$

(γ) $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ $\Gamma:=\left\{z=x+iy\in\mathbb{C}\ :\ x^2+4y^2=1\right\}$

Η $f(z)$ είναι αναλυτική $\forall\ z^2+1\neq 0$ ή $z=e^{i\pi/2}=0+i$. Όμως αυτό το σημείο $\nexists$ στον τόπο που ορίζει η Γ. Συνεπώς:

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz=0 \quad \blacksquare$$

13)

(α) $\oint_C z^5+12\,dz$ $C:\{z\in\mathbb{C}:\ |z|=1\}$

$$=\int_0^{2\pi}\left(e^{i\cdot 5\varphi}+12\right)ie^{i\varphi}d\varphi=\int_0^{2\pi}i\left(e^{i6\varphi}+12e^{i\varphi}\right)d\varphi=i\int_0^{2\pi}e^{i6\varphi}d\varphi+i\int_0^{2\pi}12e^{i\varphi}d\varphi=$$

$$=\frac{1}{6}e^{i6\varphi}\Big|_0^{2\pi}+12e^{i\varphi}\Big|_0^{2\pi}=\frac{1}{6}\left(e^{i12\pi}-1\right)+12\left(e^{i2\pi}-1\right)=0$$

Αναμενόμενο άλλωστε αφού η z^5+12 είναι αναλυτική στο $Im(C)$ }.

(β) $\oint_{|z-(1+5i)|=3} e^{1/z}\, dz = 0$ αφού η $e^{1/z}$ είναι αναλυτική στον τόπο του κύκλου $|z-(1+5i)|=3$ και η καμπύλη είναι λεία (Θ. Cauchy Goursat)

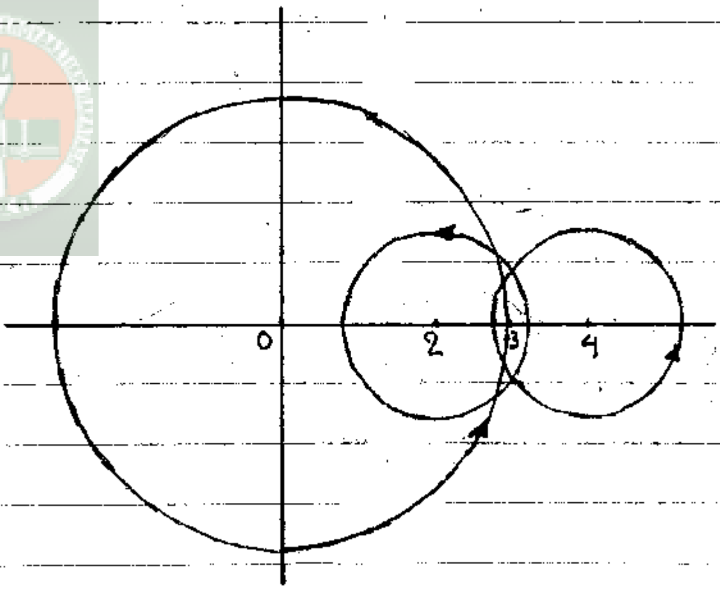
(γ) $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \sqrt{z^2-1}\, dz = 0$ για τον ίδιο λόγο όπως προηγουμένως.

14) $\oint_C \frac{2z^2-15z+30}{z^3-10z^2+32z-32}\,dz$ $\quad C:=\{|z|=3\ ,\ z\in\mathbb{C}\}$.

$$= \oint_C \frac{2(z^2-8z+16)+(z-2)}{(z-2)\cdot(z-4)^2}\,dz = \oint_C \frac{2\cancel{(z-4)^2}}{(z-2)\cancel{(z-4)^2}}\,dz + \oint_C \frac{\cancel{z-2}}{\cancel{(z-2)}(z-4)^2}\,dz =$$

$$= \oint_{|z-2|=\varepsilon_1} \frac{2}{z-2}\,dz + \oint_{|z-4|=\varepsilon_2} \frac{1}{(z-4)^2}\,dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{2\cdot i\cancel{\varepsilon_1 e^{i\varphi}}}{\cancel{\varepsilon_1 e^{i\varphi}}}\,d\varphi + \int_0^{2\pi} \frac{i\cancel{\varepsilon_2 e^{i\varphi}}}{\cancel{\varepsilon_2 e^{i\varphi}}}\,d\varphi =$$



$$= 4\pi i + 2\pi i = 6\pi i.$$

15) $\oint_C \bar{z}^2\,dz$

(α) $C:\{z\in\mathbb{C}: |z|=1\}$

Η $f(z)=\bar{z}^2$ δεν έχει παράγωγο σε κανένα σημείο του τόπου που ορίζει η C εκτός της αρχής των αξόνων. Συνεπώς:

$$\oint \bar{z}^2\,dz = \int_0^{2\pi} e^{-i2\varphi}\cdot i e^{i\varphi}\,d\varphi = i\int_0^{2\pi} e^{-i\varphi}\,d\varphi = -e^{i\varphi}\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Αν και υπάρχει αντίστροφο θεώρημα του Cauchy (Θ. Morera) αυτό προϋποθέτει τη συνέχεια της ολοκληρωτέας ποσότητας στον τόπο που ορίζει η καμπύλη C

Η $f(z)=\bar{z}^2$ ισοδυναμεί με την $f=\frac{\bar{z}}{z}\cdot|z|^2$ που πάνω στην $C: |z|=1$ το ολοκλήρωμα δίνει μια υπό ολοκλήρωση ποσότητα $\oint \frac{\bar{z}}{z}|z|^2 = \oint \frac{\bar{z}}{z}$ η οποία δεν είναι συνεχής στο 0

(β) $C: \{z\in\mathbb{C} : |z-1|=1\}$

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_C \bar{z}^2\,dz \overset{(*)}{=} \int_0^{2\pi} (1+e^{-i\varphi})^2\, i e^{i\varphi}\,d\varphi = i\int_0^{2\pi} (e^{i\varphi}+2+e^{-i\varphi})\,d\varphi =$$

$\boxed{(*)\quad z=1+e^{i\varphi}}$

$$= i\int_0^{2\pi} e^{i\varphi}\,d\varphi + 4\pi i + i\int_0^{2\pi} e^{-i\varphi}\,d\varphi = 4\pi i$$

16) $\oint 5z^4 - z^3 + 2\,dz \qquad C: \left\{ z\in\mathbb{C} \mid z=x+iy : \begin{matrix} y^2=x \\ y=x^2 \end{matrix} \quad (0,0)\to(1,1) \right\}$

Η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι αναλυτική στο χωρίο της C $\xrightarrow[\text{Goursat}]{\text{Cauchy}}$ $\oint = 0$.

17)

(α)
$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z(z^2-1)} = \oint_{|z|=2} \frac{-1}{z}\,dz + \oint_{|z|=2} \frac{1/2}{z-1}\,dz + \oint_{|z|=2} \frac{1/2}{z+1}\,dz =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \frac{\cancel{2}\, i \cancel{e^{i\varphi}}}{\cancel{2}\cdot\cancel{e^{i\varphi}}}\,d\varphi + \frac{1}{2}\int_{|z-1|=\varepsilon_1<1} \frac{dz}{z-1} + \frac{1}{2}\int_{|z+1|=\varepsilon_2<1} \frac{dz}{z+1} = -2\pi i + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{i\cancel{\varepsilon_1 e^{i\varphi}}\,d\varphi}{\cancel{\varepsilon_1 e^{i\varphi}}} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{i\cancel{\varepsilon_2 e^{i\varphi}}\,d\varphi}{\cancel{\varepsilon_2 e^{i\varphi}}}$$

$$= -2\pi i + 2\pi i = 0$$

(β) $\displaystyle\oint_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2}\,dz = \oint_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z-1)^2(z+1)^2}\,dz \overset{(*)}{=} \oint_{|z-1|=1} \frac{f(z)}{(z-1)^2}\,dz$

(*) $\displaystyle f(z) := \frac{\sin \pi z}{(z+1)^2}$ $\quad \left\{ f'(z) = \frac{\pi\cdot\cos \pi z \cdot (z+1)^{\cancel{2}} - 2\cancel{(z+1)}\sin \pi z}{(z+1)^3} \right.$

από τον τύπο του Cauchy το ολοκλήρωμα είναι ίσο με:

$$\oint \frac{f(z)}{(z-1)^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(1) = 2\pi i\left(\frac{-2\pi}{8}\right) = -\frac{\pi^2}{2} i$$

(δ) $\displaystyle\oint_{|z-a|=\varepsilon} \frac{z\cdot e^z}{(z-a)^3}\,dz \overset{(*)}{=} \oint_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{(z-a)^3}\,dz$ $\qquad f(z) = z\cdot e^z$

και πάλι από τους τύπους του Cauchy έχουμε:

$$\oint \frac{f(z)}{(z-a)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(a) = \frac{\pi}{2}(2+a)e^a i$$

$f'(z) = ze^z + e^z$

$f''(z) = e^z + ze^z + e^z = (2+z)e^z$

(γ) $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{z-1}{z(z+2)^3}\,dz = \oint_{|z|=3} \frac{1/8\,(z-1)}{z}\,dz - \oint_{|z|=3} \frac{(z-1)\left(\frac{1}{8}z^2 + \frac{3}{4}z + \frac{3}{2}\right)}{(z+2)^3}\,dz$

$\displaystyle = \frac{1}{8} 2\pi i f(0) - \frac{1}{8}\oint_{|z|=3} \frac{(z-1)(z^2+6z+12)}{(z+2)^3}\,dz = \frac{\pi i}{4}\cdot f(0) - \frac{\pi i}{8}\cdot g(-2)$

$\displaystyle = -\frac{\pi i}{4} + \frac{3\pi i}{2} = \frac{5\pi i}{4}$

$f(z) = z-1$

$g(z) = (z-1)(z^2+6z+12)$