ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. Να εκφραστούν σε αλγεβρική μορφή οι μιγαδικοί αριθμοί:

(α) $(6+2i)^{-1}$ (β) $(2+i)(3+2i)(1-i)^{-1}$ (γ) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4$

2. Να εκφραστούν στην τριγωνομετρική (πολική) μορφή $z=r(\cos\phi+i\sin\phi)$, $\phi=Argz$ οι ακόλουθοι μιγαδικοί αριθμοί:

(α) $3i$ (β) $-1-i$ (γ) $-2+5i$ (δ) $a+bi,\ a\neq 0$

3. Να προσδιοριστεί και να εκφραστεί σε πολική μορφή ο μιγαδικός αριθμός $x+yi$ για τον οποίο ισχύει η σχέση $x(3+5i)+y(8-i)=25-30i$.

4. Να υπολογιστούν όλες οι ρίζες των εξισώσεων:

(α) $z^2=3+4i$ (β) $z^3=-2+2i$ (γ) $z^5=-4+3i$

5. Να λυθεί η εξίσωση $z^2+\sqrt{32}\,iz-6i=0$.

6. Να δειχτεί ότι αν $z^m=1$, $z\neq 1$, $m\in\aleph$ τότε $\sum_{k=1}^{m} z^{k-1}=0$.

7. Να αποδειχτεί γεωμετρικά η ανισότητα $\left|z|z|^{-1}-1\right|\leq|Argz|$ και στη συνέχεια η ανισότητα

$$|z-1|\leq\big||z|-1\big|+|z||Argz|$$

8. Να δειχτεί ότι για κάθε z_1 , $z_2\in C$ ισχύει ο «κανόνας του παραλληλογράμμου»

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$$

9. Εστω $z_1,z_2\in C$ και a_1 , $a_2\in\Re$, $a_1^2+a_2^2\neq 0$. Να δειχτεί ότι

$$|z_1|^2+|z_2|^2-|z_1^2+z_2^2|\leq 2\frac{|a_1z_1+a_2z_2|^2}{a_1^2+a_2^2}\leq|z_1|^2+|z_2|^2+|z_1^2+z_2^2|$$

10. Να σχεδιαστούν στο επίπεδο Gauss τα ακόλουθα σύνολα και να καθοριστεί ποια από αυτά είναι τόποι:

(α) $|z-i|\leq 1$ (β) $\frac{|z-1|}{|z+1|}=1$ (γ) $|z-3|<|z-2|$

(δ) $|z|<1\wedge \operatorname{Im}z>0$ (ε) $z^{-1}=\bar{z}$ (στ) $|z|^2=\operatorname{Im}z$

(η) $|z^2-1|<1$ (θ) $0<\operatorname{Re}(iz)<1$ (ι) $|z|=\operatorname{Re}z+1$

(ια) $\operatorname{Im}\frac{z-z_1}{z-z_2}=0$ (ιβ) $\operatorname{Re}\frac{z-z_1}{z-z_2}=0$ (ιγ) $|z|<Argz$

Κ.Γ. ΛΑΣΚΑΡΙΔΗΣ
27.4.04

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: CSLAKONAS 03103313

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1ο

1) (α) $(6+2i)^{-1} = \frac{1}{6+2i} = \frac{6-2i}{40} = \frac{3}{20} - \frac{1}{20}i$

(β) $(2+i)(3+2i)(1-i)^{-1} = \frac{(2+i)(3+2i)}{1-i} = \frac{4+7i}{1-i} = \frac{(4+7i)(1+i)}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{11}{2}i$

(γ) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4 = \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 =$

$= \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ■

2) (α) $z = 3i = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

$|z| = 3$ / $\theta = \arctan\left(\frac{3}{0}\right) = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow z = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

(β) $z = -1-i = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

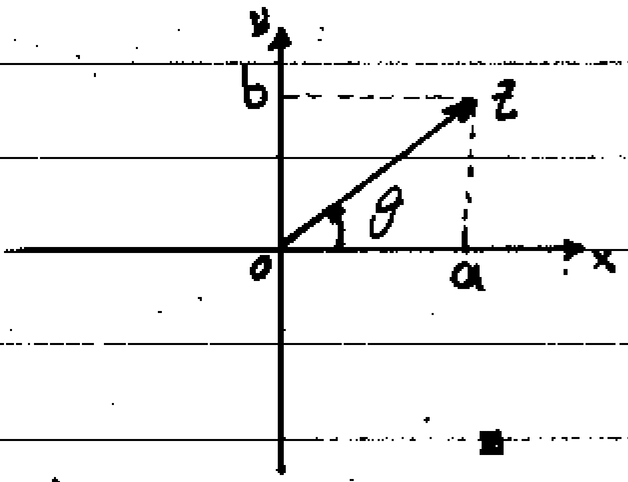
$|z| = \sqrt{2}$ / $\theta = \arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) = \frac{5\pi}{4} \longrightarrow z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

(γ) $z = -2+5i = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

$|z| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$ / $\theta = \arctan\left(\frac{5}{-2}\right) = 111{,}801^\circ \longrightarrow z = \sqrt{29}(\cos\theta + i\sin\theta)$

(δ) $z = a+bi = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ / $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$



■

3) $x(3+5i) + y(8-i) = 25-30i \longleftrightarrow 3x + 5xi + 8y - yi = 25-30i \longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow (3x+8y) + (5x-y)i = 25-30i$

Δηλαδή $\left.\begin{aligned} 3x+8y &= 25 \\ 5x-y &= -30 \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} x &= -5 \\ y &= 5 \end{aligned}$ $\longrightarrow z = -5+5i$

και σε πολική μορφή: $z = \sqrt{50}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ ■

4) (α) $z^2 = 3+4i$

$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \longrightarrow z^2 = |z|^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = 3+4i$

όμως $3+4i = 5(\cos(53.13^\circ) + i\sin(53.13^\circ)) = 5\left(\cos(\underbrace{0.9272}_{\text{rad}} + 2k\pi) + i\sin(0.9272 + 2k\pi)\right)$

$k = 1, 2, \ldots$

$$z^2 = |z|^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = 5\left(\cos(0.9272+2k\pi) + i\sin(0.9272+2k\pi)\right)$$

$|z| = \sqrt{5}$

$k=0 \;:\; 2\theta = 0.9272 \Rightarrow \theta_1 = 0.4636$ rad

$k=1 \;:\; 2\theta = 7.2103 \Rightarrow \theta_2 = 3.6051$ rad

$z_1 = \sqrt{5}(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = \sqrt{5}(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

(β) $z^3 = -2+2i$

$$\left.\begin{array}{l} z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ -2+2i = \sqrt{8}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)\right) \end{array}\right\}$$

$|z|^3 = \sqrt{8} \Rightarrow |z| = \sqrt[6]{8}$

$k=0 \;:\; 3\varphi = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4}$

$k=1 \;:\; 3\varphi = \frac{11\pi}{4} \Rightarrow \varphi_2 = \frac{11\pi}{12}$

$k=2 \;:\; 3\varphi = \frac{19\pi}{4} \Rightarrow \varphi_3 = \frac{19\pi}{4}$

(γ) $z^5 = -4+3i$

$$\left.\begin{array}{l} z = |z|(\cos\omega + i\sin\omega) \\ -4+3i = 5\left(\cos(2.4981+2k\pi) + i\sin(2.4981+2k\pi)\right) \end{array}\right\}$$

$|z|^5 = 5 \Rightarrow |z| = \sqrt[5]{5}$

$k=0 \;:\; 5\omega = 2.4981 \Rightarrow \omega_1 = 0.49962$ rad

$k=1 \;:\; 5\omega = 8.7813 \Rightarrow \omega_2 = 1.75626$ rad

$k=2 \;:\; 5\omega = 15.0645 \Rightarrow \omega_3 = 3.0129$ rad

$k=3 \;:\; 5\omega = 21.3477 \Rightarrow \omega_4 = 4.2695$ rad

$k=4 \;:\; 5\omega = 27.6308 \Rightarrow \omega_5 = 5.5262$ rad ■

5) $z^2 + \sqrt{32}\,i z - 6i = 0$

$$z_{1,2} = \frac{-\sqrt{32}\,i \pm \sqrt{-32+24i}}{2}$$

αν τώρα

$$W = -32+24i = 40(\cos\theta + i\sin\theta) = 40\left(\cos(2.4981) + i\sin(2.4981)\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{W} = \pm 20\left(\cos(1.2491) + i\sin(1.2491)\right)$$

$|z-1| \le ||z|-1| + |z||\mathrm{Arg}\, z|$

αρκεί να δειχθεί πως: $\dfrac{|z-1|-||z|-1|}{|z|} \le |z|z|^{-1}-1|$

$\left[|z-1|-||z|-1|\right]|z|^{-1} \le |z|z|^{-1}-1| \longleftrightarrow$

$|z-1|-||z|-1| \le |z|\cdot|z|z|^{-1}-1| = |z-|z||$

όμως: $|z-1|-||z|-1| \le |z-1-(|z|-1)| = |z-|z||$

από τις ιδιότητες των μιγαδικών. ■

8) Έστω $z_1 = x_1+iy_1$ κ $z_2 = x_2+iy_2 \in \mathbb{C}$

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right) \longleftrightarrow$$

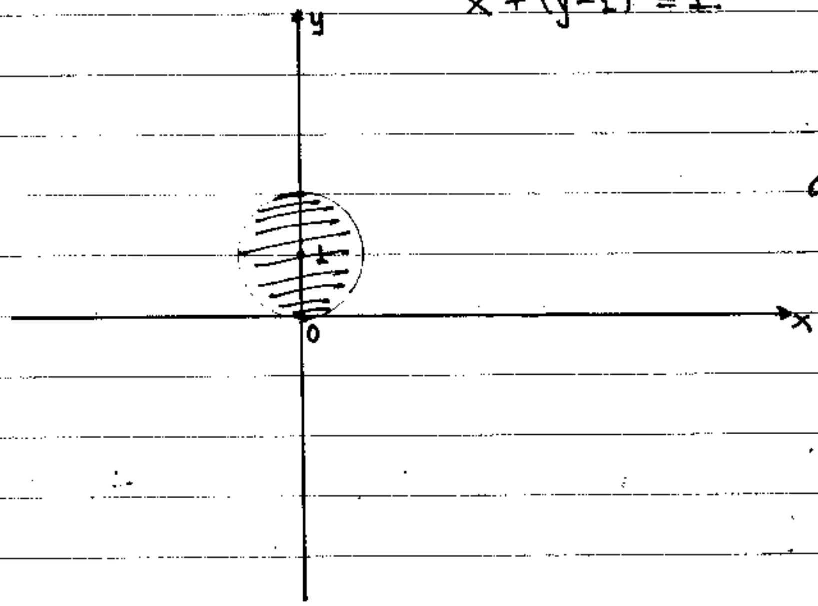
$$(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2+(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 = 2\left(x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2\right) \longleftrightarrow$$

$$x_1^2+x_2^2+\cancel{2x_1x_2}+y_1^2+y_2^2+\cancel{2y_1y_2}+x_1^2+x_2^2-\cancel{2x_1x_2}+y_1^2+y_2^2-\cancel{2y_1y_2} = 2x_1^2+2y_1^2+2x_2^2+2y_2^2$$

$$2x_1^2+2y_1^2+2x_2^2+2y_2^2 = 2x_1^2+2x_2^2+2y_1^2+2y_2^2 \quad ■$$

10) α) $|z-i| \le 1 \longleftrightarrow |x+yi-i| \le 1 \longleftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2} \le 1 \longleftrightarrow$

$x^2+(y-1)^2 \le 1.$



ο ζητούμενος τόπος είναι ο κυκλικός δίσκος με κέντρο $(0,1)$ και ακτίνα 1.

β) $\dfrac{|z-1|}{|z+1|} = 1 \xleftrightarrow{z=x+yi} \dfrac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} = 1 \longleftrightarrow (x-1)^2+y^2 = (x+1)^2+y^2$

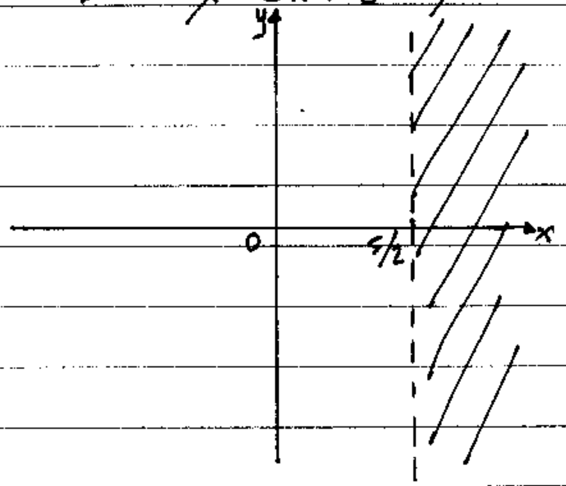
$\longleftrightarrow x = 0$

$y \in \mathbb{R}.$

ο τόπος που προκύπτει είναι η ευθεία $x=0$.

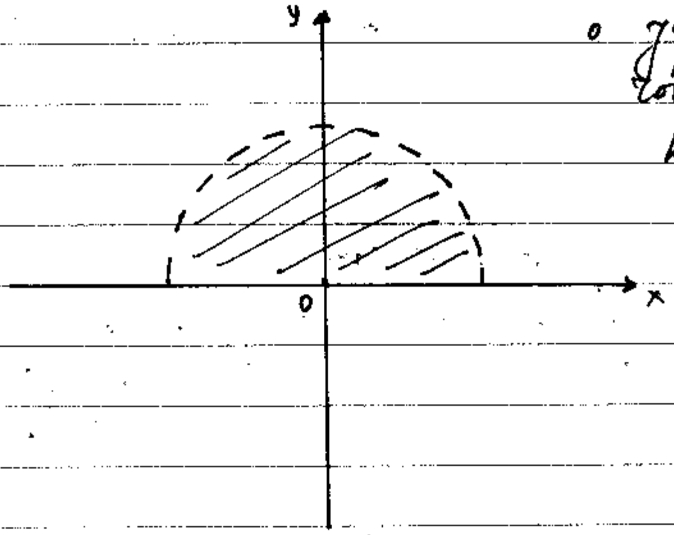
γ) $|z-3|<|z-2| \xleftrightarrow{z=x+yi} \sqrt{(x-3)^2+y^2}<\sqrt{(x-2)^2+y^2} \longleftrightarrow (x-3)^2+y^2<(x-2)^2+y^2$

$\longleftrightarrow \cancel{x^2}-6x+9<\cancel{x^2}-4x+4 \longleftrightarrow x>5/2,\ y\in\mathbb{R}$



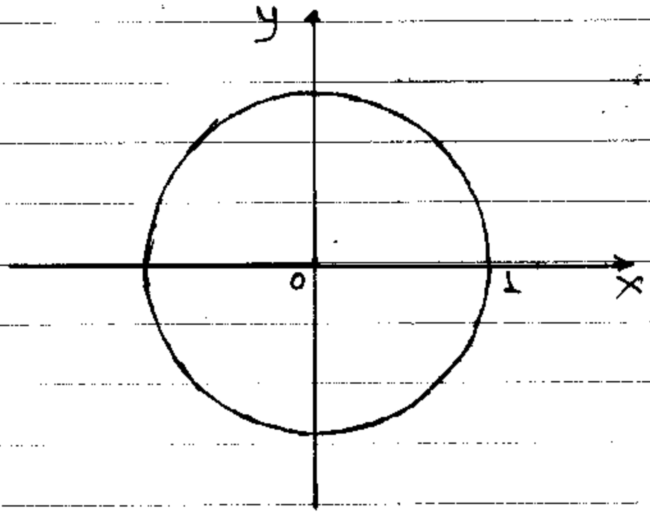
ο ζητούμενος τόπος είναι το επίπεδο
$\Sigma=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>5/2\}$.

δ) $|z|<1 \wedge \mathrm{Im}z>0$



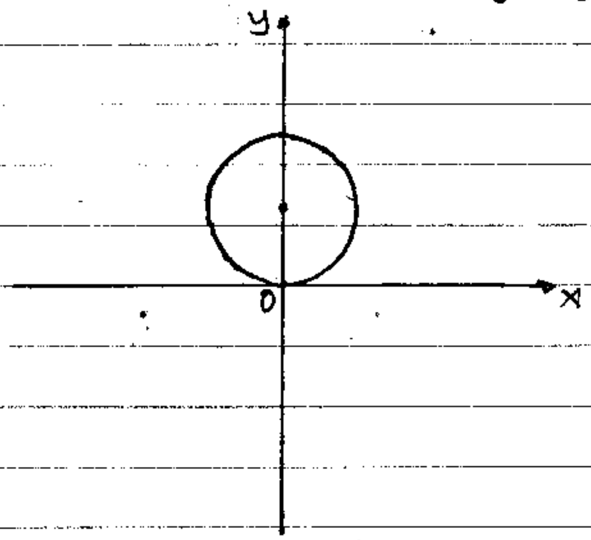
ο ζητούμενος τόπος είναι το εσωτερικό του ημικυκλικού δίσκου με κέντρο $K(0,0)$ και τη μοναδιαία ακτίνα.

ε) $z^{-1}=\bar{z} \longleftrightarrow \frac{1}{x+yi}=x-yi \longleftrightarrow x^2+y^2=1$



ο τόπος είναι ο μοναδιαίος κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων.

6ε) $|z|^2 = \operatorname{Im} z \longleftrightarrow x^2+y^2=y \longleftrightarrow x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$



ο τόπος είναι κύκλος με κέντρο $K(0,1/2)$ και ακτίνα $1/2$

η) $|z^2-1|<1 \longleftrightarrow |(x^2-y^2-1)+2xyi|<1 \longleftrightarrow (x^2-y^2-1)^2+4x^2y^2<1$

$\longleftrightarrow \ldots \longleftrightarrow x^4+y^4-2x^2+2y^2+2x^2y^2<0 \longleftrightarrow (x^2+y^2)^2-2x^2+2y^2<0$

αντικαθιστώ $x=r\cos\varphi$

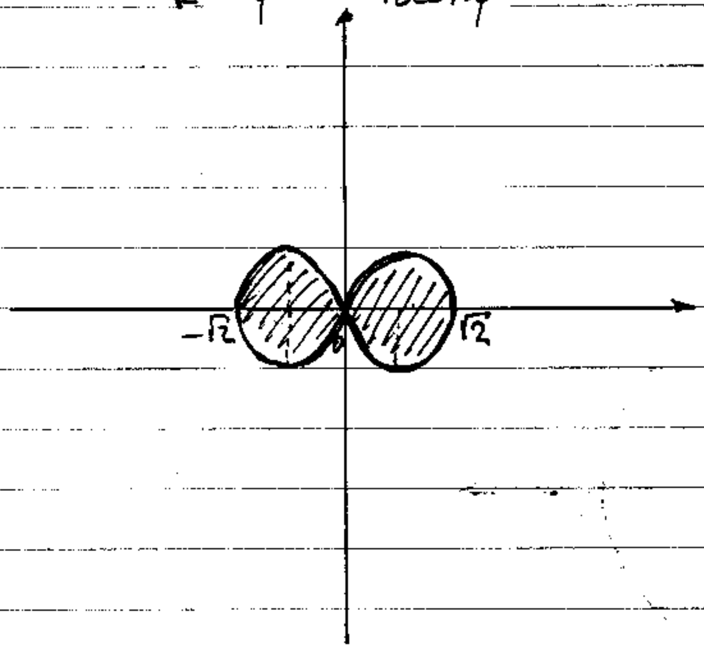
$y=r\sin\varphi$

$\longrightarrow r^4+2r^2(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi)<0 \xleftrightarrow{r\neq 0}$

$r^2-2\cos2\varphi<0 \longleftrightarrow r^2<2\cos2\varphi \longleftrightarrow$

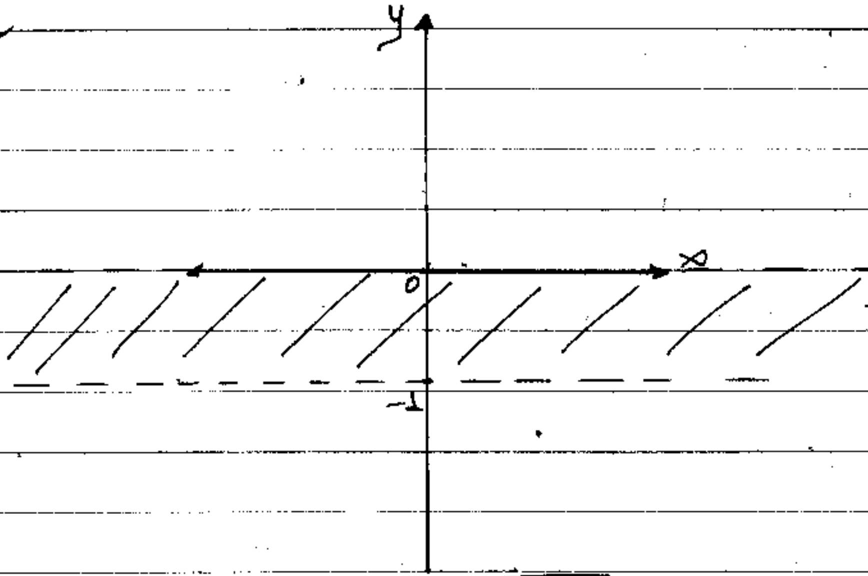
$-\sqrt{2\cos2\varphi}<r<\sqrt{2\cos2\varphi}$

$\varphi\in\left[\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$



ο τόπος είναι ο λημνίσκος του σχήματος

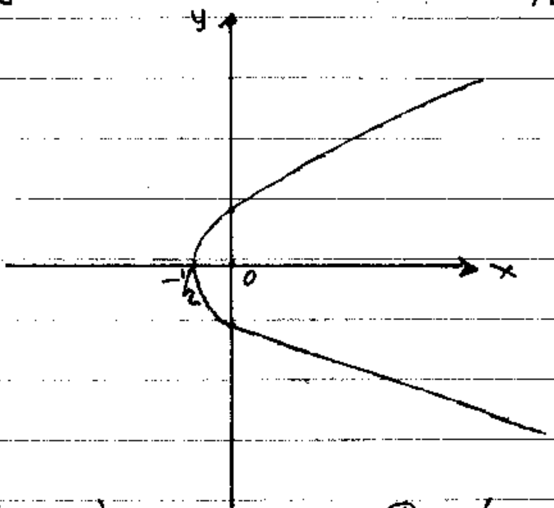
θ) $0 < Re(iz) < 1 \longleftrightarrow 0 < -y < 1 \longleftrightarrow -1 < y < 0$



ο τόπος είναι το επίπεδο $\Sigma := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : {-1<y<0 \atop x\in\mathbb{R}}\}$.

ι) $|z| = Re z + 1 \longleftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = x+1 \longleftrightarrow x^2+y^2 = (x+1)^2 \longleftrightarrow \cancel{x^2}+y^2 = \cancel{x^2}+2x+1$

$\longrightarrow y = \pm\sqrt{2x+1} \qquad x > -\frac{1}{2}$



ο τόπος είναι η κωνική τομή του σχήματος.

ια) $Im\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right) = 0 \longleftrightarrow Im\left(\frac{(x-x_1)+(y-y_1)i}{(x-x_2)+(y-y_2)i}\right) = 0 \longleftrightarrow \dots$

$\longleftrightarrow \frac{-(x-x_1)(y-y_2)+(x-x_2)(y-y_1)}{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2} = 0 \longleftrightarrow (x-x_1)(y-y_2) = (x-x_2)(y-y_1)$

$\longleftrightarrow \dots \longrightarrow y = \left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)x - \frac{x_1y_2+x_2y_1}{x_2-x_1}$ όπου $x_1 \neq x_2$, $z \neq z_2$

αν $x_1 = x_2$: $x = \frac{x_1(y_1+y_2)}{y_2-y_1}$, $y\in\mathbb{R}$

(1ι) $Re\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)=0 \longleftrightarrow Re\left(\frac{x-x_1+(y-y_1)i}{x-x_2+(y-y_2)i}\right)=0 \longleftrightarrow$

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)}{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}=0 \longleftrightarrow$$

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$

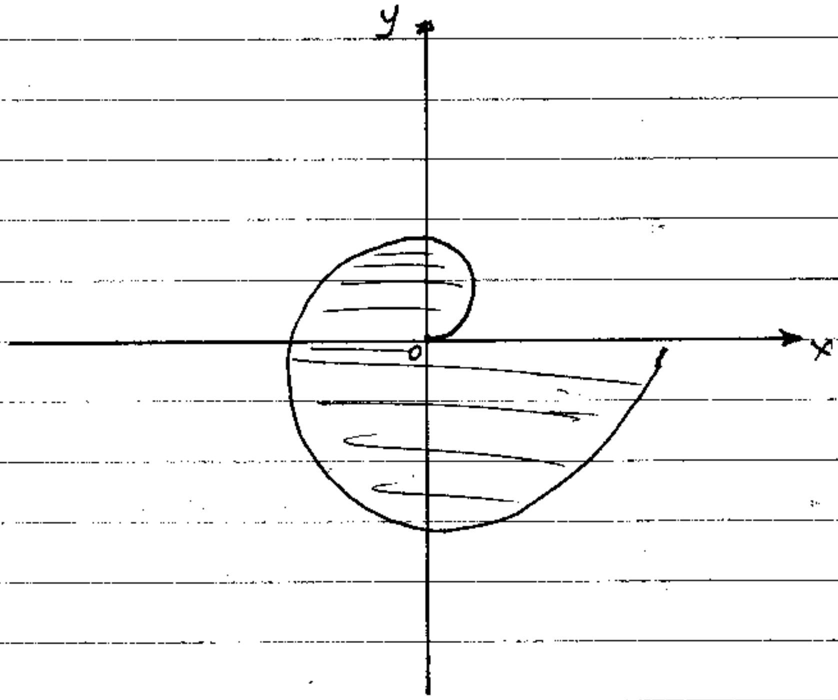
$$x^2-xx_2+x_1x_2-xx_1+y^2-yy_2-yy_1+y_1y_2=0$$

$$x^2+y^2-x(x_1+x_2)-y(y_2+y_1)+y_1y_2+x_1x_2=0$$

$$\left(x-\frac{(x_1+x_2)}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2=\frac{(y_1+y_2)^2}{4}+\frac{(x_1+x_2)^2}{4}-x_1x_2-y_1y_2$$

ο τόπος είναι κύκλος με κέντρο $K\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$ και ακτίνα $\sqrt{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2-x_1x_2-y_1y_2}$

(1γ) $|z|<Arg\,z \longrightarrow \sqrt{x^2+y^2}<\arctan\frac{|y|}{|x|}$



ο τόπος είναι ο κοχλίας του Αρχιμήδους