พีชคณิตบูลีน

Quiz I (20 นาที)

- จงแปลง 1110011.00011_2 ให้เป็นเลขฐานสิบ
- จงหาค่า $110011.101_2 + 10011.001_2 + 110.110_2$
- จงลบเลขฐานสองต่อไปนี้ด้วย 2's complement
  $10111_2 - 110110_2$
- จงแปลง $8ADF.238_{16}$ ให้เป็นเลขฐานแปด

ระบบดิจิตอลพื้นฐาน

- พีชคณิตบูลีน (Boolean Algebra)
- วงจรลอจิก (Logic Circuit)

พีชคณิตบูลีน (Boolean Algebra)

- เป็นคณิตศาสตร์นำมาใช้ในการอธิบายและออกแบบวงจรดิจิตอลและอิเล็กทรอนิกส์ โดย จอร์จ บลู (George Boole)
- หลักการพีชคณิตบูลีน คือ การใช้เลขฐานสองเป็นหน่วยนับในระบบ และใช้หลักทางลอจิก (Logic) และเซต (Set) ในรูปแบบ AND, OR, NOT

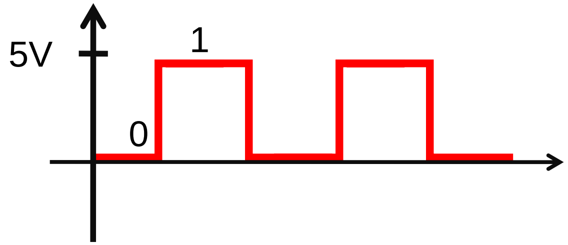
หลักการเบื้องต้นของวงจรลอจิก

- **Two-State Logic** คือใช้ตัวแปรค่า 2 สภาวะ
- มีข้อกำหนดคือ **Input** และ **Output** มีได้เพียง 2 สภาวะเท่านั้น
- ใน 2 สภาวะที่กล่าวถึงนั้น อาจอยู่ในสภาวะใด สภาวะหนึ่งก็ได้

Logic “0” สภาวะ “0”	ไม่มีสัญญาณ หรือ ไฟดับ สวิทช์อยู่ในสถานะเปิดวงจร	
Logic “1” สภาวะ “1”	มีสัญญาณ หรือ ไฟติด สวิทช์อยู่ในสถานะปิดวงจร	

หลักการเบื้องต้นของวงจรลอจิก(ต่อ)

- ในระบบ **Electronics Logic** เราใช้ระดับของแรงดันไฟฟ้า **(Voltage Level)** แทนสภาวะทั้งสอง
  - **Logic 1** แทน แรงดันไฟฟ้าที่เป็นบวก (+)
  - **Logic 0** แทน แรงดันที่เป็นมีค่าเท่ากับ **0**



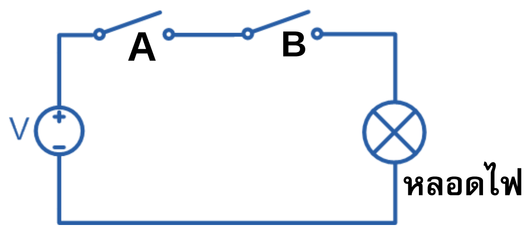
หลักการเบื้องต้นของพีชคณิตบูลีน

- **พีชคณิตบูลีน เป็นเทคนิคแบบหนึ่งที่ใช้ในการลดรูป Switching Function**
  - โดยใช้ตัวอักษร **A,B,C,D, …** แทนตัวแปร
  - ค่า **2** สภาวะ แทนด้วย **0** หรือ **1**
  - ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรแต่ละตัวใช้เครื่องหมายทางเลขคณิต ได้แก่
    - เครื่องหมาย . แทนความหมาย **AND** (แอน)
    - เครื่องหมาย + แทนความหมาย **OR** (ออ)
    - เครื่องหมาย — แทนความหมาย **NOT** (นอต)

วงจร AND

- หลักการทำงานของวงจร **AND** หลอดไฟจะติดเมื่อสวิทช์ **A** และ สวิทช์ **B** ปิดวงจร

วงจร AND ใช้ Contact



วงจร AND ใช้สวิทช์

วงจร AND (ต่อ)

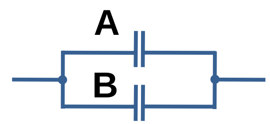
- ดังนั้น เราสามารถเขียนตารางความจริง (Truth Table) สำหรับวงจร AND ได้ดังนี้

A	B	Y=A.B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

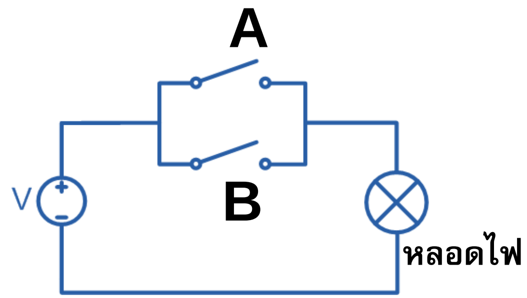
- ผลลัพธ์ของวงจร AND เขียนแทนสมการ คือ Y=A.B หรือ Y=AB
- สรุปได้ว่า Output ของวงจร AND จะเป็น 1 เมื่อ Input A และ B เป็น 1 ทั้งคู่

วงจร OR

- หลักการทำงานของวงจร OR หลอดไฟจะติดเมื่อสวิทซ์ A หรือ สวิทซ์ B ตัวใดตัวหนึ่ง หรือ สวิทซ์ทั้งสองปิดวงจร



วงจร OR ใช้ Contact



วงจร OR ใช้สวิทซ์

วงจร OR (ต่อ)

- ดังนั้น เราสามารถเขียนตารางความจริง (Truth Table) สำหรับวงจร OR ได้ดังนี้

A	B	Y=A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- ผลลัพธ์ของวงจร OR เขียนแทนสมการ คือ Y=A+B
- สรุปได้ว่า Output ของวงจร OR จะเป็น 1 เมื่อ Input A หรือ B ตัวไหนตัวหนึ่งเป็น 1 หรือ Input A และ B เป็น 1 ทั้งคู่

วงจร NOT

- NOT หรือ Inverter หมายถึง การกลับค่าสภาวะตัวแปร
- ดังนั้น เราสามารถเขียนตารางความจริง (Truth Table) สำหรับวงจร NOT ได้ดังนี้

A	$Y=\overline{A}$
0	1
1	0

- ผลลัพธ์ของวงจร NOT เขียนแทนสมการ คือ $Y=\overline{A}$
- สรุปได้ว่า Output ของวงจร NOT จะมีสภาวะตรงกันข้ามกับ Input

ทฤษฎีของพีชคณิตบูลีน

- ทฤษฎีบทที่ 1 กฎการสลับที่ (Commutative Law)

ก)	A+B	= B+A
ข)	A.B	= B.A

ทฤษฎีของพีชคณิตบูลีน

- ทฤษฎีบทที่ 2 กฎการจัดหมู่ (Associative Law)

ก)	(A+B)+C	= A+(B+C)
ข)	(A.B).C	= A.(B.C)

ทฤษฎีของพีชคณิตบูลีน

- ทฤษฎีบทที่ 3 กฎการกระจาย (Distributive Law)

ก)	A.(B+C)	= A.B+A.C
ข)	A+(B.C)	= (A+B)(A+C)

ทฤษฎีของพีชคณิตบูลีน

- ทฤษฎีบทที่ 4 กฎความเป็นเอกลักษณ์ (Identity Law)

ก)	A+A	= A
ข)	A.A	= A

ทฤษฎีของพีชคณิตบูลีน

- ทฤษฎีบทที่ 5 กฎการเป็นนิเสธ (Negation Law)

ก)	$(\overline{A}) = \overline{A}$
ข)	$\overline{\overline{A}} = A$

ทฤษฎีของพีชคณิตบูลีน

- ทฤษฎีบทที่ 6 กฎการลดทอน (Redundancy Law)

ก)	$A+A.B = A$
ข)	$A.(A+B) = A$

ทฤษฎีของพีชคณิตบูลีน

- ทฤษฎีบทที่ 7

ก)	$0+A = A$
ข)	$1.A = A$
ค)	$1+A = 1$
ง)	$0.A = 0$

ทฤษฎีของพีชคณิตบูลีน

- ทฤษฎีบทที่ 8

ก)	$\overline{A} + A = 1$
ข)	$\overline{A}.A = 0$

ทฤษฎีของพีชคณิตบูลีน

- ทฤษฎีบทที่ 9

ก)	$A + \bar{A}B = A + B$
ข)	$A.(\bar{A} + B) = A.B$

ทฤษฎีของพีชคณิตบูลีน

- ทฤษฎีบทที่ 9 (ตัวอย่างการนำไปใช้)

ก)	$A+\bar{A}B = A+B$
ข)	$A+\bar{A}\bar{B} = A+\bar{B}$
ค)	$\bar{A}+AB = \bar{A}+B$
ง)	$A+\bar{A}BC = A+BC$
จ)	$AB+\overline{AB}C = AB+C$
ฉ)	$\overline{AB}+ABCD = \overline{AB}+CD$

ทฤษฎีของพีชคณิตบูลีน

- ทฤษฎีบทที่ 10 กฎของ De Morgan

ก)	$\overline{A + B} = \bar{A}.\bar{B}$
ข)	$\overline{A.B} = \bar{A} + \bar{B}$

การพิสูจน์ทฤษฎีบทของพีชคณิตบูลีน

- 1. พิสูจน์ว่า A+A.B =A

A	B	A.B	A+A.B
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

การพิสูจน์ทฤษฎีบทของพีชคณิตบูลีน

- 2. พิสูจน์ว่า $A+A.\overline{B} = A+B$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{A}.B$	$A+\overline{A}.B$	A+B
0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1

การพิสูจน์ทฤษฎีบทของพีชคณิตบูลีน

- 3. พิสูจน์ว่า $\overline{A+B} = \overline{A}.\overline{B}$

A	B	A+B	$\overline{A+B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}.\overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

การใช้ทฤษฎีของบูลีน ลดรูป Switching Function

- การออกแบบวงจร logic จาก Switching ใด ๆ ก็ตาม จำเป็นต้องลดรูป Switching Function นั้น ๆ ให้น้อยที่สุด
  - เพื่อให้จำนวนอุปกรณ์ในวงจรมีน้อยที่สุด
  - ลดเวลาหน่วง (Delay Time) ของวงจรลงได้ *(Delay Time หมายถึงเวลาที่ใช้ในการทำงานของวงจร นับจาก Input ไปจนถึง Output)

ดังนั้น Switching Function สามารถลดรูปให้สั้นลงได้ โดยใช้เทคนิควิธีการ ทฤษฎีของ Boolean

ตัวอย่าง

- จงลดรูป Switching Function ต่อไปนี้ให้สั้นที่สุด

ก) $Y = AB + \overline{A}B + \overline{A}\,\overline{B}$

ข) $Y = A + A\overline{B} + \overline{A}B$

ค) $Y = \overline{A\overline{B} + \overline{A} + B}$

ง) $Y = \left(\overline{A} + AB\right)\left(\overline{A}B\right)$

ตัวอย่าง

- จงลดรูป Switching Function ต่อไปนี้ให้สั้นที่สุด

จ) $f(A,B,C,D) = ABCD + BC + AD + ACD + \bar{A}$

ฉ) $f(A,B,C,D) = AB + CD + (AB)(C + D)$

ช) $f(A,B,C) = \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$

ซ) $f(A,B,C) = \left[A(B + \bar{C}) + \bar{A}B\right]C$

ตัวอย่าง ก) $Y = AB + \bar{A}B + \bar{A}\bar{B}$

- วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
Y &= AB + \bar{A}B + \bar{A}\bar{B} \\
&= B(A + \bar{A}) + \bar{A}\bar{B} \\
&= B.1 + \bar{A}\bar{B} \\
&= B + \bar{A}\bar{B} \\
&= B + \bar{A} \\
&= \bar{A} + B
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง ข) $Y = A + A\bar{B} + \bar{A}B$

- วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
Y &= A + A\bar{B} + \bar{A}B \\
&= A(1 + \bar{B}) + \bar{A}B \\
&= A.1 + \bar{A}B \\
&= A + \bar{A}B \\
&= A + B
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง ค) $Y = \overline{A\bar{B} + \bar{A} + B}$

- วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
Y &= \overline{A\bar{B} + \bar{A} + B} \\
&= \overline{\bar{A} + A\bar{B} + B} \\
&= \overline{\bar{A} + \bar{B} + B} \\
&= \overline{\bar{A} + 1} \\
&= \bar{1} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง ง) $Y = \left(\overline{A} + AB\right)\left(\overline{A}B\right)$

- วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
Y &= \left(\overline{A} + AB\right)\left(\overline{A}B\right) \\
&= (\overline{A} + B)(\overline{A}B) \\
&= \overline{A}\,\overline{A}B + \overline{A}BB \\
&= \overline{A}B + \overline{A}B \\
&= \overline{A}(B + B) \\
&= \overline{A}B
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง

จ) $f(A,B,C,D) = ABCD + BC + AD + ACD + \overline{A}$

- วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
f(A,B,C,D) &= ABCD + BC + AD + ACD + \overline{A} \\
&= BC(AD + 1) + AD(1 + C) + \overline{A} \\
&= BC(1) + AD(1) + \overline{A} \\
&= BC + AD + \overline{A} \\
&= BC + D + \overline{A} \\
&= \overline{A} + BC + D
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง

ฉ) $f(A,B,C,D) = AB + CD + (AB)(C + D)$

- วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
f(A,B,C,D) &= AB + CD + (AB)(C + D) \\
&= AB + CD + ABC + ABD \\
&= AB(1 + C + D) + CD \\
&= AB(1) + CD \\
&= AB + CD
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง

ช) $f(A,B,C) = \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$

- วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
f(A,B,C) &= \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC \\
&= \overline{A}BC + A\overline{B}(\overline{C} + C) + AB(\overline{C} + C) \\
&= \overline{A}BC + A\overline{B}(1) + AB(1) \\
&= \overline{A}BC + A\overline{B} + AB \\
&= \overline{A}BC + A(\overline{B} + B) \\
&= \overline{A}BC + A \\
&= BC + A \qquad = A + BC
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง

ซ) $f(A,B,C)=\left[A(B+\bar{C})+\bar{A}B\right]C$

- วิธีทำ $f(A,B,C)=\left[A(B+\bar{C})+\bar{A}B\right]C$

$$=\left[AB+A\bar{C}+\bar{A}B\right]C$$

$$=\left[B(A+\bar{A})+A\bar{C}\right]C$$

$$=\left[B+A\bar{C}\right]C$$

$$=BC+A\bar{C}C$$

$$=BC+0$$

$$=BC$$

แบบฝึกหัด

- จงใช้ตารางความจริง(Truth Table)พิสูจน์ว่า

ก)	$A+\bar{A}B+A\bar{B}=A+B$
ข)	$\bar{A}+B+A\bar{B}=1$
ค)	$A+\bar{B}C+\bar{A}\bar{B}\bar{C}=A+\bar{B}$
ง)	$\bar{B}(\bar{A}+B)(\bar{A}+\bar{C})=\bar{A}\bar{B}$

การบ้าน

- จงลดรูป Switching Function ต่อไปนี้ให้สั้นที่สุด

ก) $Y=\overline{\bar{A}(B+C)+\overline{BCD}}$

ข) $Y=\bar{A}B(C+A\bar{B})+\bar{B}C$

ค) $Y=(A+B)(A+BC)(\bar{C}+D)+ABD$

ง) $Y=ABC+ABD+\bar{A}B\bar{C}+CD+B\bar{D}$