

การลดรูปสมการโดยใช้แผนผังคาร์โนห์ (Karnaugh Map)

การลดรูปสมการโดยใช้แผนผังคาร์โนห์

- การลดรูปสมการโดยใช้แผนผังคาร์โนห์เป็นการลดรูปสมการอีกวิธีหนึ่งซึ่งจะทำให้ได้สมการที่สั้นลง โดยเขียนสมการให้อยู่ในรูปของผลบวกของผลคูณ หรืออยู่ในรูปผลคูณของผลบวกก็ได้

ลักษณะของแผนผังคาร์โนห์

- ลักษณะเป็นตารางสี่เหลี่ยมที่มีจำนวนช่องของตารางแปรผันตามจำนวนของตัวแปร
- กรณีมีตัวแปร 2 ตัว จะมีช่องของตาราง 4 ช่อง ($2^2=4$)
- กรณีมีตัวแปร 3 ตัว ก็จะมี 8 ช่อง ($2^3=8$)
- กรณีมีตัวแปร 4 ตัว ก็จะมี 16 ช่อง ($2^4=16$)
- การลดรูปสมการโดยใช้แผนผังคาร์โนห์สามารถลดรูปสมการที่มีตัวแปร 2,3,4,5 หรือ 6 ตัวแปร
- โดยทั่วไปมักจะใช้ลดรูปสมการที่มีตัวแปรไม่เกิน 4 ตัว

แผนผังคาร์โนห์ชนิด 2 ตัวแปร

- แผนผังคาร์โนห์ชนิด 2 ตัวแปร จะประกอบด้วยช่องซึ่งใช้สำหรับแทนเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นกับตัวแปรจำนวน 4 ช่อง

	A	0	1
B	0	00	10
			0
		01	11
			1
	1		
			2
			3

	A	0	1
B	0	$\overline{A}B$	$A\overline{B}$
		0	2
		$\overline{A}B$	$A\overline{B}$
		1	3
	1		
			2
			3

	A	0	1
B	0	$A+B$	$\overline{A+B}$
		0	2
		$A+B$	$\overline{A+B}$
		1	3
	1		
			2
			3

แผนผังคาร์โนห์ชนิด 3 ตัวแปร

- แผนผังคาร์โนห์ชนิด 3 ตัวแปรจะประกอบด้วยช่องซึ่งใช้สำหรับแทนเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นกับตัวแปรจำนวน 8 ช่อง ($2^3 = 8$)

	AB			
	00	01	11	10
C	000	010	110	100
0	0	2	6	4
1	001	011	111	101
	1	3	7	5

	C	
	0	1
AB	000	001
00	0	1
01	010	011
	2	3
11	110	111
	6	7
10	100	101
	4	5

แผนผังคาร์โนห์ชนิด 4 ตัวแปร

- แผนผังคาร์โนห์ชนิด 4 ตัวแปรจะประกอบด้วยช่องซึ่งใช้สำหรับแทนเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นกับตัวแปรจำนวน 16 ช่อง

	AB			
	00	01	11	10
CD	0000	0100	1100	1000
00	0	4	12	8
01	0001	0101	1101	1001
	1	5	13	9
11	0011	0111	1111	1011
	3	7	15	11
10	0010	0110	1110	1010
	2	6	14	10

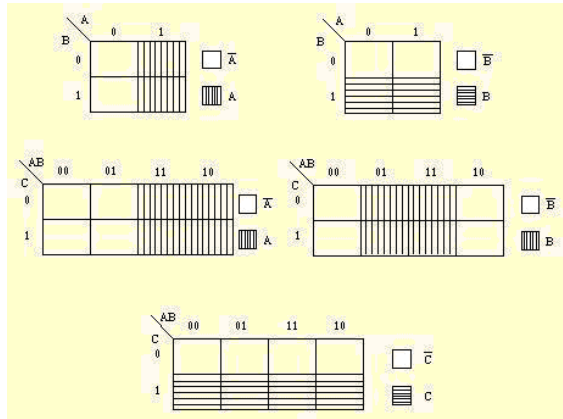
ขั้นตอนการลดรูปสมการโดยใช้แผนผังคาร์โนห์

- กรณีเป็นสมการ Minterm ให้ใส่ลอจิก "1" ลงในช่องของแผนผังคาร์โนห์ตามค่าของตัวแปรในแต่ละเทอมของสมการ
- กรณีเป็นสมการ Maxterm ให้ใส่ลอจิก "0" ลงในช่องของแผนผังคาร์โนห์ตามค่าของตัวแปรในแต่ละเทอมของสมการ
- จับคู่และวงรอบตัวแปรที่เป็นลอจิก "1" ที่อยู่ติดกันในกรณี que พิจารณาแบบ Minterm หรือวงรอบตัวแปรที่เป็นลอจิก "0" ที่อยู่ติดกัน ในกรณี que พิจารณาแบบ Maxterm
- โดยพิจารณาวงรอบตัวแปรที่อยู่ติดกันจำนวน 16,8,4,2,1 ตัวตามลำดับหมายความว่าถ้าลอจิก "1" หรือลอจิก "0" อยู่ ติดกัน ถ้าอยู่ติดกัน 16 ตัว ก็ให้วง 16 ตัว ถ้าอยู่ติดกัน 8 ตัวก็ให้วง 8 ตัว ตามลำดับ
- ถ้าวงรอบได้ 8 ตัว ก็ไม่ควรวงรอบ 4 ตัว 2 ครั้ง เพราะจะทำให้สมการที่ได้จะไม่ใช้สมการที่เหลือตัวแปรน้อยที่สุด

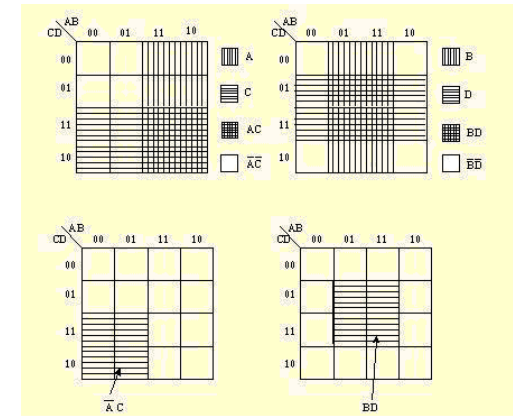
ขั้นตอนการลดรูปสมการโดยใช้แผนผังคาร์โนห์

- ช่องที่ถูกวงรอบไปแล้ว สามารถนำไปจับคู่เพื่อวงรอบร่วมกับตัวอื่นได้อีก
- เมื่อวงรอบได้แล้วให้พิจารณาว่าจะได้ตัวแปรอะไรสำหรับวงนั้น โดยถือหลักว่าตัวแปรที่เหลืออยู่ก็คือตัวแปรที่ไม่เปลี่ยนสภาวะลอจิกเลยในทุก ๆ ช่องภายในวงรอบนั้น แต่ถ้าตัวแปรมีการเปลี่ยนแปลงให้ตัดตัวแปรนั้นทิ้งไป

แสดงค่าตัวแปรในพื้นที่ของแผนผังคาร์โนห์

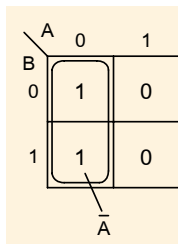


แสดงค่าตัวแปรในพื้นที่ของแผนผังคาร์โนห์



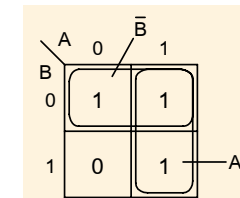
ตัวอย่างการลดรูปฟังก์ชันโดยใช้แผนผังคาร์โนห์

ก) $f(A,B) = \overline{A}B + A\overline{B}$



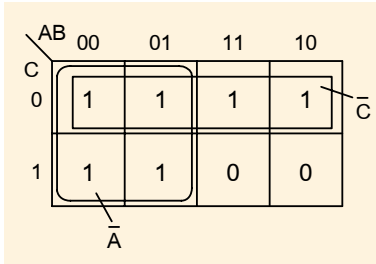
ตัวอย่างการลดรูปฟังก์ชันโดยใช้แผนผังคาร์โนห์

ข) $f(A,B) = \overline{A}B + A\overline{B} + AB$



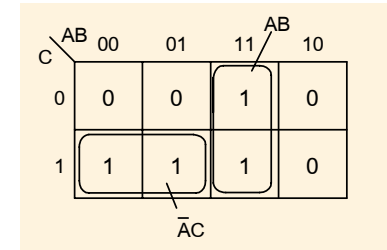
ตัวอย่างการลดรูปฟังก์ชันโดยใช้แผนผังคาร์โนห์

▪ ง) $f(A,B,C) = \overline{A}BC + A\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} + ABC + \overline{A}\overline{B}\overline{C}$



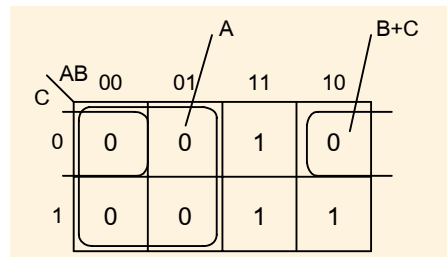
ตัวอย่างการลดรูปฟังก์ชันโดยใช้แผนผังคาร์โนห์

▪ จ) $f(A,B,C) = \sum m(1,3,6,7)$



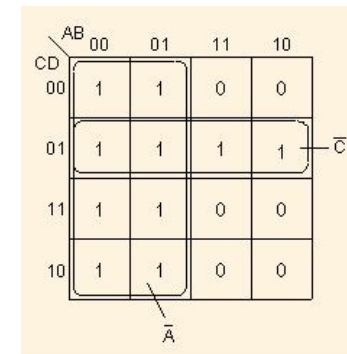
ตัวอย่างการลดรูปฟังก์ชันโดยใช้แผนผังคาร์โนห์

▪ ฉ) $f(A,B,C) = \prod M(0,1,2,3,4)$



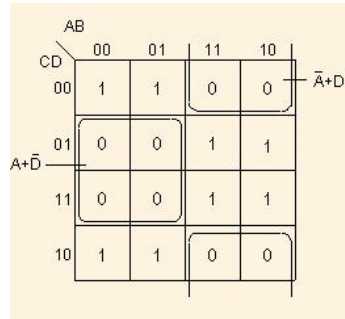
ตัวอย่างการลดรูปฟังก์ชันโดยใช้แผนผังคาร์โนห์

▪ ช) $f(A,B,C,D) = \overline{A}BCD + \overline{A}BC\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + \overline{A}BCD + \overline{A}BC\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}B\overline{C}\overline{D}$



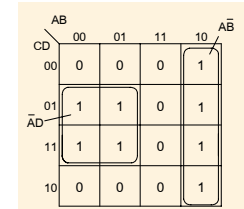
ตัวอย่างการลดรูปฟังก์ชันโดยใช้แผนผังคาร์โนห์

- ข) $f(A,B,C,D) = \Pi M(1,3,5,7,8,10,12,14)$



ตัวอย่างการลดรูปฟังก์ชันโดยใช้แผนผังคาร์โนห์

- เขียนสมการและวงจรถลอจิกจากตารางความจริง

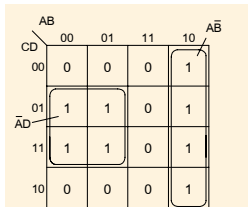


$$Y = \bar{A}B + A\bar{D}$$

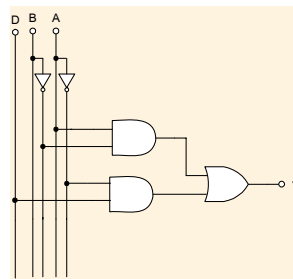
อินพุต				เอาต์พุต
A	B	C	D	Y
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

ตัวอย่างการลดรูปฟังก์ชันโดยใช้แผนผังคาร์โนห์

- เขียนสมการและวงจรถลอจิกจากตารางความจริง



$$Y = \bar{A}B + A\bar{D}$$



สถานะไม่สนใจ (Don't care Condition)

- บางครั้งการออกแบบวงจรถลอจิกอาจมีเงื่อนไขที่ไม่สนใจสถานะที่เอาต์พุตเมื่ออินพุตมีค่าใดค่าหนึ่ง
- ค่าของอินพุตมีค่าตั้งแต่ 0000 ถึง 1001 มี 4 ตัวแปรต้องใช้แผนผังคาร์โนห์ 16 ช่อง

อินพุต				เอาต์พุต
A	B	C	D	Y
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0

สภาวะไม่สนใจ (Don't care Condition)

- เมื่อนำค่าจากตารางความจริงมาใส่ลงในแผนผังคาร์โนห์จะใส่ได้เพียง 10 ช่อง คือตั้งแต่ 0000 ถึง 1001 ช่องที่เหลือตั้งแต่ 1010 ถึง 1111 จะใส่เครื่องหมาย X หมายถึงเป็นสภาวะที่ไม่สนใจ
- ในบางครั้งอาจสมมติให้ช่องที่ใส่เครื่องหมาย X เป็น "1" หรือ "0" เพื่อช่วยในการวงรอบหรือจับคู่ร่วมกับช่องอื่น ๆ เพื่อให้การวงรอบได้จำนวนช่องมากที่สุด

	AB				
	00	01	11	10	
Y					\bar{D}
CD	00	01	11	10	
00	1 ₀	1 ₄	X ₁₂	1 ₈	
01	0 ₁	0 ₅	X ₁₃	0 ₉	
11	0 ₃	0 ₇	X ₁₅	X ₁₁	
10	1 ₂	1 ₆	X ₁₄	X ₁₀	

$$Y = \sum m(0,2,4,6,8) + d(10,11,12,13,14,15)$$

ตัวอย่างการลดรูปฟังก์ชันโดยใช้แผนผังคาร์โนห์

- ฅ) $f(A,B,C,D) = \sum m(2,3,6,7,8,9) + d(10,11,12,13,14,15)$

	AB				
	00	01	11	10	
					A
CD	00	01	11	10	
00	0 ₀	0 ₄	X ₁₂	1 ₈	
01	0 ₁	0 ₅	X ₁₃	1 ₉	
11	1 ₃	1 ₇	X ₁₅	X ₁₁	
10	1 ₂	1 ₆	X ₁₄	X ₁₀	
					C

ตัวอย่างการลดรูปฟังก์ชันโดยใช้แผนผังคาร์โนห์

- ฅ) $f(A,B,C,D) = \sum m(1,4,5,6,7,9) + d(12,13,14,15)$

	AB		B		
	00	01	11	10	
					$\bar{C}\bar{D}$
CD	00	01	11	10	
00	0 ₀	1 ₄	X ₁₂	0 ₈	
01	1 ₁	1 ₅	X ₁₃	1 ₉	
11	0 ₃	1 ₇	X ₁₅	0 ₁₁	
10	0 ₂	1 ₆	X ₁₄	0 ₁₀	