МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Данилов Никита Юрьевич

УДК 517.91.1

КАТЕГОРНЫЕ И БУРБАКОВСКИЕ КОНСТРУКЦИИ В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Специальность 01.01.09 — „Математическая кибернетика“

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель
член.-корр. РАН Павловский Юрий Николаевич

Долгопрудный — 1999

Оглавление

Глава 1. Предисловие **4**

Глава 2. Введение **6**

Глава 3. Постановка задачи **9**

3.1 Введение 9

3.2 Структуры 11

3.3 Обозначения 12

Глава 4. Подобъекты и факторобъекты **13**

4.1 Инъекции и мономорфизмы 13

4.2 Свободные объекты 15

4.3 Бурбаковское и категорное определение подобъекта и фактор-объекта 18

4.4 Строгие мономорфизмы и эпиморфизмы 22

4.5 Регулярные мономорфизмы и эпиморфизмы 24

4.6 HPF-роды структур и бикатегории 26

Глава 5. Произведения и копроизведения **28**

5.1 Определения 28

5.2 $(P_i) - \mathsf{lim}$-предел 31

5.3 Строгость конуса 34
5.4 Категории функторов 39
5.5 EKM-морфизмы 41

Глава 6. Управляемые системы **43**
6.1 Категории для динамических систем 43
6.1.1 Гладкие многообразия 43
6.1.2 Обыкновенные дифференциальные уравнения . . 47
6.1.3 Динамические системы 49
6.2 EKM-рода структур для динамических систем 62
6.2.1 Гладкие многообразия 63
6.2.2 Дифференциальные уравнения 66
6.2.3 Динамические системы 70

Глава 7. η-категории **72**
7.1 Определения и мотивировка 72
7.1.1 Введение 72
7.1.2 Определения 73
7.1.3 Примеры 76
7.2 Категории функторов 77
7.3 Лемма Йонеды 87

Глава A. Теория категорий **101**
A.1 Основные понятия 101
A.2 Естественные преобразования, пределы 109
A.3 Подобъекты и факторобъекты 115
A.4 Бикатегории 119

Глава Б. Рода структур **122**

Б.1 Основные факты 122

Б.2 Рода структур 126

Б.3 Особенности бурбаковскиой системы 129

Глава В. Примеры **133**

В.1 Категории 133

В.2 Роды структур 136

В.3 Свободные и косвободные объекты 140

Библиография **147**

Предметный указатель **149**

Глава 1

Предисловие

Описание цели и мотивации.

Данная работа представляет собой сравнение некоторых конструкций теории категорий и исчисления родов структур Бурбаки применительно к теории управляемых динамических систем. Как теория категорий, так и исчисление родов структур используются как формализмы для описания и изучения совокупностей (типов) однородных математических объектов: алгебр, топологических пространств, дифф. многообразий, дифф. уравнений (с управлением) и т.п. Оба этих формализма конкретизируют общематематические понятия подобъекта, фактороообъекта, произведения семейства объектов и т.д.

В то время как в классических примерах (группы, кольца, моноиды) эти конкретизации приводят к одинаковым результатам, достаточно легко строятся примеры, в которых категорные и бурбаковские версии определений неэквивалентны. Это естественным образом приводит к задаче „сведения“ т.е. определения того как и при каких условиях можно выразить категорные понятия через бурбаковские и/или наоборот.

Очевидным результатом разрешения таких задач является возможность переносить утверждения из одного формализма в другой, например, использовать такую категорную конструкцию как эпи-моно-разложение в теории переносимости, естественным образом формулируемой в рамках исчисления родов структур.

Автор выражает искреннюю благодарность Юрию Николаевичу Павловскому без помощи которого эта работа была бы невозможна.

Текст подготовлен с использованием `diagrams.tex` П. Тейлора и шрифтов `LH Cyrillic`, созданных в `CyrTUG`.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований. Код проекта `99-01-00018`.

Глава 2

Введение

> Описание методики. Происхождение теории категорий и бурбаковских родов структур. Их место в (мета-)математике. Аналоги: (универсальные) алгебры, наброски (sketches) и т.д.

Теория категорий была создана Эйленбергом и Маклейном в конце 40-х годов как формализм для изучения гомологических конструкций над структурами более общими чем решетка открытых множеств топологического пространства. Несмотря на то, что с алгебраической точки зрения структура категории достаточно бедна (нет всюду определенного умножения, обратных элементов и т. д.), она оказалась черезвычайно удобной не только для решения задач алгебраической топологии и алгебраической геометрии, но и в целом ряде других областей математики:

- инструмент в алгебраической геометрии и топологии — изначальная область применения категорий ([5]).
- Самостоятельная ветвь общей алгебры (т.е. изучение категорий так же как изучаются группы, кольца и т.д.).
- Средство унификации построений в алгебре и математике вообще. Многие понятия, естественным образом возникающие в теории категорий (универсальные отображения, сопряженные функторы, мономорфизмы и эпиморфизмы, пределы функторов и т. д.),

единообразным образом описывают понятия из разных ветвей математики, помогая обнаруживать скрытые соответствия. Отсюда берет начало традиция использования теории категорий для характеризации математических объектов в стандартных изложениях той или иной теории. Как один из наиболее ранних примеров такого подхода можно указать [1].

- Инструмент в мат. логике и кибернетике. Классическая мат. логика рассматривает модели той или иной формальной теории. С точки зрения теории категорий, это модели „в категории множеств“, поэтому возникает естественное желание рассматривать модели в других категориях (например, категориях групп, топологических пространств, функторов и т.д.). Реализация этой идеи позволила получить аналоги многих классических результатов (например, теоремы Геделя о полноте) для неклассических логик: интуиционистских, когерентных, модальных и др. С другой стороны, декартовые замкнутые категории являются естественными моделями для λ-исчислений, фундаментальных для кибернетики.

- Формализм для оснований математики. Начиная с работы [9], где была предложена система элементарных аксиом, характеризующих категорию множеств, теория категорий стала восприниматься в работах по основаниям математики, как возможная альтернатива теории множеств. Дальнейшее развитие этой темы и ее пересечение с теорией пучков привело к возникновению и изучению понятия (элементарного) топоса ([7],[6]).

Теория категорий и исчисление родов структур предлагают различные модели для описания совокупностей „однородных“ математических объектов. В разное время для этой цели были предложены и другие формализмы, например, универсальные алгебры (см. [17]), наброски (sketches, библиографию см. в [13]) и Чу-пространства (Chu-spaces). Однако, между универсальными алгебрами и категориями с одной стороны и родами структур и набросками с другой есть существенное различие: первые больше подходят для изучения математических структур уже заданных при помощи средств, лежащих вне этих формализмов и, соответственно, предоставлют минимальные средства для порождения новых типов объектов (по двум типам универсальных алгебр, можно построить „тип-произведение“, по двум категориям — категорию функторов и т.д.), в то время как формализмы второй группы предоставляют средства для построения всех типов математических объектов (как множеств со структурой в случае родов структур или как функторов специального вида в случае набросков). Например, там где при использовании родов структур можно сказать „определим род структуры группы как … “, в теории категорий говорится „рассмотрим категорию групп … “, предполагая при этом, что определение группы и гомоморфизма групп известно заранее. Действительно, попытки определить категории „похожие“ на категорию множеств при помощи чисто категорных методов потребовали многолетних усилий множества математиков (см. [7]).

Наиболее очевидным отличием теории категорий от исчисления родов структур является, конечно, использование морфизмов, как едиственного средства изучения объектов. Такое решение связывают обычно с течением в философии математики, известным как структурализм и противопоставляемым редукционизму (т.е., сведению всех математических структур к одной), примером которого являются построения Бурбаки (теоретико-множественный редукционизм). Не вдаваясь в эту обширную тему, сошлемся на [26],[23],[24] и [25].

Глава 3

Постановка задачи

Описание структуры документа, обозначения, ссылки.

3.1 Введение

В исчислении родов структур Бурбаки различные математические объекты можно изучать, образуя такие конструкции, как подобъекты, факторобъекты, произведения и суммы (копроизведения). Все эти конструкции являются обобщениями соответствующих построений различных „частных“ математических теорий (исторически, в основном алгебраических и топологических): групп, колец, модулей, топологических пространств и т. д.

На подобное обобщение претендует и теория категорий, изучающая математические объекты исключительно при помощи „отображений“ (*морфизмов*) между ними. В теории категорий также вводятся понятия подобъекта, факторобъекта, произведения и копроизведения.

Так как оба этих обобщения (т.е. теория категорий и исчисление родов структур) базируются на одном и том же фундаменте нижележащего „наивного“ математического знания, то, как и следовало ожидать, вводимые ими аналоги стандартных математических конструкций оказываются похожими и в некоторых случаях совпадают. В общем случае, это, однако, не так, как будет показано далее. Так как хочется иметь возможость переносить результаты из категорий в рода структур и обратно, то перед нами встает задача „сравнения“ или „сведения“ соответствующих одноименных понятий.

Примечание 3.1. *Задачу эту можно решать, в частности, одним из двух следующих способов.*

- *Погрузить теорию категорий в бурбаковский формализм, т.е., в контексте некоторой бурбаковской формальной системы BI, ввести термы и соотношения, обозначающие категорные конструкции: мономорфизмы, пределы функторов и т. д. (см. далее).*
- *Рассматривать рода структур как категории, снабженные, возможно, некоторой дополнительной стурктурой.*

Мы будем придерживаться в основном второго подхода, т.е. будем строить в категориях аналоги бурбаковских конструкций и сравнивать их с „аборигенами“.

Примечание 3.2. *Первым вопросом, который требуется разрешить, является терминология. Как уже упоминалось, мы будем изучать конструкции, имеющие в теории категорий и исчислении родов структур одинаковые названия: подобъект, факторобъект, произведение и т. д. Так как мы в основном будем использовать категорный аппарат, то названия категорных понятий останутся без изменений, а их бурбаковские аналоги будут явно называться* бурбаковским *подобъектом,* бурбаковским *произведением и т. д.*

В разделе 4.1 рассматривается связь между понятиями мономорфизма и эпиморфизма с одной стороны, и инъективного и сюръективного отображений, с другой стороны.

В разделах 4.4 и 4.5, исходя из результатов предыдущего, сравниваются бурбаковские и категорные понятия подобъекта и факторобъекта. Находятся условия, при которых бурбаковские подобъекты совпадают с категорными подобъектами, получаемыми при помощи некоторых *суженных* классов мономорфизмов (регулярных и строгих), и аналогично для факторобъектов.

Другим направлением исследования этого вопроса является наложение некоторых условий на саму категорию, при выполнении которых категорные подобъекты и факторобъекты совпадают с бурбаковскими. Некоторые результаты в этом направлении можно найти в разделе 4.6: понятие HPF-рода структуры интерпретируется как бикатегорная структура на соответствующей категории, выясняется, что при необременительных условиях в HPF-родах структур категорные и бурбаковские под-[фактор-]объекты — одно и тоже (см. также [15]).

В разделе 5 аналогичным образом рассматриваются категорные произведения (копроизведения) и бурбаковские начальные-финальные структуры.

В главе 6 строятся категории и роды структур (с EKM-морфизмами) для объектов, изучаемых в теории управляемых динамических систем: обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, конечномерных дифференцируемых многообразий и управляемых систем.

В относительно замкнутой главе 7 рассматривается некоторый вариант „обогащения“ категорий, т.е. снабжения множеств морфизмов дополнительной структурой, и доказываются некоторые свойства замкнутости полученного класса категорий.

В разделе В полученные результаты разбираются (в частности, строятся свободные объекты) на примерах широко известных родов структур (множества, группы, отображения, отношения эквивалентности и т.д.).

3.2 Рода структур Бурбаки

Исчисление родов структур было предложено и развито в [14]. Сводку основных результатов можно найти в [16], а также в [18].

Общие факты приведены в приложении Б.

3.3 Обозначения

[Сокращения] являются уступками краткости человеческой жизни и терпения, которые мы делаем на практике, но делать которые в теории мы считаем ниже своего достоинства.

А. Черч „Введение в математическую логику“

Стандартными изложениями теории категорий являются [22] или [12].

Элементарное введение в эту область дано в приложении A.

Имея в виду приведенные там определения, мы введем следующие сокращения и условные обозначения:

- произвольные категории будут обозначаться заглавными латинскими буквами из начала алфавита: A, B, C и т. д.
- Фиксированные категории будут обозначаться сокращениями, начинающимися с заглавной латинской буквы: Set, MapSet, Top и т. д.
- Функторы (см. определение A.6, с. 104) будут обозначаться заглавными латинскими буквами: F, G … P, S и т. д.
- Значение функции и, в частности, функтора в точке x будет записываться как xf или xP. Исключение будет делаться для функторов, которые традиционно записываются иначе, например $\mathsf{Hom}_A(\alpha, \beta)$.
- Суперпозиция функций, морфизмов и функторов записывается слева направо: т.е., если $f : a \to b$ и $g : b \to c$, то $fg : a \to c$.
- Мономорфизмы обозначаются $f : \alpha \rightarrowtail \beta$, эпиморфизмы $f : \alpha \twoheadrightarrow \beta$.

Глава 4

Подобъекты и факторобъекты

4.1 Инъекции и мономорфизмы

В категориях родов структур понятие мономорфизма (см. определение А.46, с. 115) [эпиморфизма (см. определение А.47, с. 115)] является близким к понятию инъективного [сюръективного] отображения. Более точно, справедливо

Утверждение 4.1. *В категории рода структуры S_Σ инъективные [сюръективные] морфизмы являются мономорфизмами [эпиморфизмами].*

Доказательство.

Функтор $P_\Sigma : S_\Sigma \to \mathsf{Set}^n$ (см. определение Б.2, с. 129) является унивалентным и, следовательно, отражает мономорфизмы и эпиморфизмы. Утверждение следует из того, что в Set^n мономорфизмами и эпиморфизмами являются n-ки отображений каждая компонента которых инъекция и сюръекция соответственно. ∎

Примечание 4.1. *В дальнейшем, для упрощения изложения, формулировки и доказательства будут часто даваться только для рода структуры с одним основным множеством, снабженного „забывающим“ функтором $P_\Sigma : S_\Sigma \to \mathsf{Set}$*

Утверждение обратное к 4.1, вообще говоря, не справедливо:

Пример 4.1. *Рассмотрим категорию (ассоциативных) колец. Естественное вложение кольца целых чисел в кольцо рациональных $j : \mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$ является эпиморфизмом т.к. любые два гомоморфизма из $\mathbf{Q}$ в произвольное кольцо R, совпадающие на подкольце $\mathbf{Z}$, совпадают и на всем $\mathbf{Q}$. Согласно предложению 4.1 j, как и всякая инъекция, есть мономорфизм. Таким образом, j — биморфизм (см. определение А.48, с. 115), но, очевидно, не является сюръекцией.*

Пример 4.2. *Абелева группа G называется делимой ([3], стр. 85), если*

$$(\forall n \in \mathbf{N}) \Rightarrow (nG = \{ng | g \in G\} = G).$$

Рассмотрим категорию всех делимых групп, т.е. (полную) подкатегорию категории абелевых групп, т.е. (полную) подкатегорию категории групп. Для объекта этой категории — делимой группы всех (комплексных) корней из единицы (т.е. мультипликативной группы $T \cong \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$), пусть $f : T \to T$ — эндоморфизм, $f : u \longmapsto u^2$. Так как $(-1)f = (1)f$, то f — не инъективное отображение. Пусть даны гомоморфизмы $g, h : U \to T$, такие что $gf = hf$. U — делимая группа, следовательно,

$$(\forall t \in U) \Rightarrow (\exists v \in U) : (t = v + v)$$

и, следовательно

$$\begin{aligned} tg &= (v+v)g = (vg)(vg) = (vg)^2 = vgf = \\ &= vhf = (vh)^2 = (vh)(vh) = (v+v)h = th. \end{aligned}$$

Т.е. $h = g$ и f — мономорфизм.

Определение 4.1. *Будем называть категорию рода структуры категорией с инъективными мономорфизмами, если класс инъективных морфизмов и класс мономорфизмов [класс сюръективных морфизмов и класс эпиморфизмов] совпадают. (В случае многоосновных родов структур под инъективным [сюръективным] морфизмом понимается морфизм каждая компонента которого — инъекция [сюръекция]).*

4.2 Свободные объекты

Определение 4.2. *Назовем род структуры* тривиальным, *если в нем все базовые множества любого объекта содержат не более одного элемента.*

Род структуры называется нетривиальным *если он не является тривиальным.*

Определение 4.3. *Будем говорить, что объект $(X,\ \sigma)$ $[(X_1, \ldots, X_n,\ \sigma)]$, категории рода структуры является бурбаковски свободным объектом с множеством [множествами] свободных образующих G $[(G_1, \ldots, G_n)]$ если справедливы следующие эквивалентные условия:*

- *$(X,\ \sigma)$ свободен (см. определение A.57, с. 117) над объектом G $[(G_1, \ldots, G_n)]$ относительно пренебрегающего функтора $P : S_\Sigma \to \mathsf{Set}$ $[P : S_\Sigma \to \mathsf{Set}(n)]$*
- *$G \subseteq X$ $[G_i \subseteq X_i]$ и для всякого объекта $(Y,\ \tau)$ $[(Y_1, \ldots, Y_n,\ \tau)]$ и любого отображения множеств $\alpha : X \to Y$ [любого набора отображений $\alpha_i : X_i \to Y_i$] существует единственный морфизм $\overline{\alpha} : (X,\ \sigma) \to (Y,\ \tau)$, $[\overline{\alpha} : (X_1, \ldots, X_n,\ \sigma) \to (Y_1, \ldots, Y_n,\ \tau)$, $\overline{\alpha} = (\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n)$, $\overline{\alpha}_i : X_i \to Y_i]$ такой что $\overline{\alpha}|_G = \alpha$ $[\overline{\alpha}_i|_{G_i} = \alpha_i]$*

Двойственно определяется бурбаковски косвободный объект.

Примечание 4.2. *Отметим, что в категориях универсальных алгебр определенные таким образом бурбаковски свободные объекты — свободные алгебры. Примеры свободных объектов в других категориях будут приведены позднее.*

Определение 4.4. *Будем называть категорию рода структуры категорией с бурбаковски свободным объектом, если в ней имеется хотя бы один бурбаковски свободный объект.*

Утверждение 4.2. *Одноосновная категория рода структуры с бурбаковски свободным объектом с непустым множеством свободных образующих, есть категория с инъективными мономорфизмами.*

Доказательство.

Пусть $f : (X,\ \sigma) \to (Y,\ \tau)$ — морфизм не являющийся инъекцией, т.е.

$$(\exists x, y \in X) : (x \neq y) \wedge (xf = yf)$$

и $(F,\ w)$ — бурбаковски свободный объект с множеством образующих G.

Определим отображения $\alpha, \beta : G \to X$ так что $G\alpha = \{x\}$ и $G\beta = \{y\}$. Очевидно, что $\alpha \neq \beta$, (так как $G \neq \emptyset$), поэтому существуют различные морфизмы $\overline{\alpha}, \overline{\beta} : (F,\ w) \to (X,\ \sigma)$ такие что $\overline{\alpha}|_G = \alpha$ и $\overline{\beta}|_G = \beta$; так как отображения $\alpha f = \beta f : G \to Y$, то существует едиственный морфизм $u : (F,\ w) \to (Y,\ \tau)$, такой что $u|_G = \alpha f = \beta f$, однако как $\overline{\alpha} f$ так и $\overline{\beta} f$ удовлетворяют этому условию.

Следовательно, $\overline{\alpha} f = \overline{\beta} f$ при $\overline{\alpha} \neq \overline{\beta}$, т.е. f — не мономорфизм. ∎

Примечание 4.3. *Сопоставляя это утверждение с примером 4.2 немедленно получаем, что не существует „свободных делимых групп“ с непустым множеством образующих. (Свободная делимая группа с пустым множеством образующих состоит из одного единичного элемента.)*

Утверждение 4.3. *Многоосновная категория нетривиального рода структуры с бурбаковски свободным объектом с множеством непустых множеств свободных образующих, есть категория с инъективными мономорфизмами.*

Доказательство.

Повторим предыдущее доказательство, выбрав в качестве $\alpha, \beta : G \to X$ отображения $\alpha = (\alpha_i : G_i \to X_i)$ и $\beta = (\beta_i : G_i \to X_i)$, где $G\alpha_{i_0} = x$, $G\beta_{i_0} = y$ и $G\alpha_i = t^i$, $G\beta_i = t^i$ для i_0 такого что

$$(\exists x, y \in X_{i_0}) : (x \neq y) \wedge (xf = yf),$$

$i \neq i_0$ и $t^i \in X_i$ существующих в силу непустоты X_i. ∎

Категорным обобщением этого утверждения является следующее:

Утверждение 4.4. *Если имеется функтор $P : C_1 \to C_2$ и существует объект $F \in \mathsf{Ob}\, C_1$ свободный относительно P над образующим U категории C_2, то P сохраняет мономорфизмы*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть $\varphi : \alpha \to \beta$ — морфизм категории C_1, такой что $\varphi P : \alpha P \to \beta P$ — не мономорфизм, т.е., существуют $\omega, o : \gamma \to \alpha P$ такие что $\omega \neq o$ и $\omega(\varphi P) = o(\varphi P)$. Так как $\omega \neq o$, то существует $\lambda : U \to \alpha P$ такой что $\lambda\omega \neq \lambda o$. Следовательно, по определению свободного объекта существуют различные $[\lambda\omega] \neq [\lambda o] : F \to \alpha$ такие что $j[\lambda\omega]P = \lambda\omega$ и $j[\lambda o]P = \lambda o$ где $j : U \to FP$ — морфизм существующий по определению свободного объекта.

С другой стороны так как $\omega(\varphi P) = o(\varphi P)$, то существует единственный морфизм $\tau : F \to \beta$, такой что $j(\tau P) = \omega(\varphi P) = o(\varphi P)$, но как $[\lambda\omega]\varphi$ так и $[\lambda o]\varphi$ удовлетворяют этому условию, следовательно $[\lambda\omega]\varphi = [\lambda o]\varphi$ и φ — не мономорфизм.

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[r, shift left, "{[\lambda\omega]}"] \arrow[r, shift right, "{[\lambda o]}"'] & \alpha \arrow[r, "\varphi"] & \beta \\
U \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "j"'] & \gamma \arrow[r, shift left, "\omega"] \arrow[r, shift right, "o"'] & \alpha P \arrow[r, "\varphi P"] & \beta P \\
FP & & &
\end{tikzcd}$$

■

Двойственным к этому утверждению является следующее:

Утверждение 4.5. *Если имеется функтор $P : C_1 \to C_2$ и существует объект $F \in \mathsf{Ob}\, C_1$ косвободный относительно P над кообразующим U категории C_2, то P сохраняет эпиморфизмы*

Возвращаясь обратно к родам структур и учитывая, что косвободными в Set являются множества, содержащие более двух элементов, а косвободными в Set^n — n-ки множеств, каждый элемент которых содержит не менее двух элементов, получаем:

Утверждение 4.6. *Односновная категория рода структуры с бурбаковски косвободным объектом с множеством косвободных образующих мощности больше* 1, *есть категория с сюръективными эпиморфизмами.*

Утверждение 4.7. *Многоосновная категория нетривиального рода структуры с бурбаковски косвободным объектом с множеством множеств косвободных образующих мощности больше* 1, *есть категория с сюръективными эпиморфизмами.*

4.3 Бурбаковское и категорное определение подобъекта и фактор-объекта

Категорный подобъект [фактор-объект] объекта a определяется как класс изоморфных (так как легко показать, что бурбаковские и категорные изоморфизмы совпадают, то безразлично в каком смысле используется этот термин) объектов, снабженных мономорфизмом [эпиморфизмом] в [из] объект[а] a (см. определение A.46, с. 115) [(см. определение A.47, с. 115)].

Так как всякая каноническая инъекция [проекция] является мономорфизмом [эпиморфизмом] в силу предложения 4.1, то бурбаковский подобъект [фактор-объект] является представителем некоторого категорного подобъекта. Мы будем говорить в таких случаях, что (категорный) подобъект и соответствующий мономорфизм [фактор-объект и соответствующий эпиморфизм] представляется или представим (бурбаковским) подобъектом [фактор-объектом], а бурбаковский подобъект [фактор-объект] представляет (категорный) подобъект [фактор-объект].

Не всякий подобъект представим бурбаковским подобъектом [фактор-объектом] (т.е. в теории категорий „*больше*“ подобъектов [факторобъектов], чем в исчислении родов структур).

Пример 4.3. *Рассмотрим категорию топологических пространств и непрерывных отображений. Пусть X_0 антидискретное, а X_1 — дискретное топологическое пространство над множеством X содержащим более одного элемента. Тогда тождественное преобразование множества X, индуцирует непрерывное отображение $j : X_1 \to X_0$, очевидно являющееся мономорфизмом.*

Пусть Y — бурбаковский подобъект (т.е. подпространство) X_0 представляющий j. Очевидно, что Y антидискретное пространство, но дискретное пространство может быть гомеоморфно антидискретному тогда и только тогда когда их множества-носители содержат по одному элементу, что противоречит предположению о множестве X. Следовательно, j не представим бурбаковским подобъектом.

Мы будем искать условия при которых мономорфизм [эпиморфизм] представим бурбаковским подобъектом [фактор-объектом].

Определение 4.5. *Будем говорить, что мономорфизм $\mu : (X,\ \sigma) \rightarrowtail (Y,\ \tau)$ категории рода структуры B-точен, если для него справедливо одно из следующих эквивалентных условий:*

- *μ — структурный мономорфизм относительно пренебрегающего функтора $P : S_\Sigma \to \mathsf{Set}$ (см. определение A.55, с. 117)*
- *для всякого $(T,\ \nu)$ объекта категории S_Σ и всякого отображения множеств $g : T \to X$, из того, что отображение $(g\mu) : T \to Y$ есть морфизм $g\mu : (T,\ \nu) \to (Y,\ \tau)$ следует, что g — морфизм $g : (T,\ \nu) \to (X,\ \sigma)$.*

B-точность мономорфизма это „половина“ бурбаковского понятия подобъекта. Действительно, утверждение о том что каноническая инъекция $j : (X,\ \sigma) \hookrightarrow (Y,\ \tau)$ (где $X \subseteq Y$) B-точна эквивалентно утверждению о том, что $(X,\ \sigma)$ подобъект (бурбаковский) $(Y,\ \tau)$.

Двойственно определяется B-точность эпиморфизма.

Утверждение 4.8. *B-точность распространяется на подобъекты.*

Доказательство.

Вариант 1 (бурбаковское доказательство)

Пусть $\mu : (A,\ \sigma) \rightarrowtail (B,\ \tau)$ — B-точный мономорфизм и дан $\theta : (C,\ \omega) \to (B,\ \tau)$, $\theta \in [\mu]$, т.е. существует изоморфизм $i : (A,\ \sigma) \to (C,\ \omega)$, такой что $\mu = i\theta$ и $\theta = i^{-1}\mu$.

Пусть имеется объект $(D,\ \rho)$ и такое отображение множеств $g : D \to C$, что $g\theta : D \to B$ — морфизм $g\theta : (D,\ \rho) \to (B,\ \tau)$. $g\theta = gi^{-1}\mu$, следовательно, gi^{-1} — морфизм $gi^{-1} : (D,\ \rho) \to (A,\ \sigma)$ (так как μ — B-точный мономорфизм) и $gi^{-1}i : (D,\ \rho) \to (C,\ \omega)$.

Но $gi^{-1}i = g$ как отображения множеств, значит g — морфизм:

$$\begin{tikzcd}
 & (A,\ \sigma) \arrow[r, tail, "\mu"] \arrow[d, shift right, "i"'] & (B,\ \tau) \\
(D,\ \rho) \arrow[r, "g"] & (C,\ \omega) \arrow[u, shift right, "i^{-1}"'] \arrow[ur, "\theta"'] &
\end{tikzcd}$$

Вариант 2 (категорное доказательство)

По определение B-точность это структурность относительно пренебрегающего функтора $P : S_\Sigma \to \mathsf{Set}$, а структурность распространяется на подобъекты.

■

Не всякий B-точный подобъект содержит каноническую инъекцию в качестве представителя.

Однако, в более конкретном, но достаточно распространенном случае, мы можем сформулировать

Утверждение 4.9. *В категориях родов структур, снабженных EKM-морфизмами, (EKM-родах структур) с инъективными мономорфизмами [сюръективными эпиморфизмами] всякий B-точный подобъект [фактор-объект] содержит в качестве представителя каноническую инъекцию [проекцию].*

Доказательство.

Пусть $\mu : (E_0,\ \tau_0) \rightarrowtail (E,\ \tau)$ — мономорфизм. Разложим μ как отображение множеств на композицию: $\mu = (\mathsf{coim}\,\mu)(\mathsf{im}\,\mu)$, где $\mathsf{coim}\,\mu : E_0 \to E_0\mu$ — сюръекция и $\mathsf{im}\,\mu : E_0\mu \hookrightarrow E$ — каноническое вложение. μ — инъекция (по условию), значит $\mathsf{coim}\,\mu$ — инъекция, значит $\mathsf{coim}\,\mu$ — биекция.

Значит, $(E_0\mu,\ \tau_0(\mathsf{coim}\,\mu S_\Sigma))$ — объект рода структуры Σ на $E_0\mu$ так как аксиома рода структуры биективно переносима. Тогда $\mathsf{coim}\,\mu$ — морфизм $\mathsf{coim}\,\mu : (E_0,\ \tau_0) \to (E_0\mu,\ \tau_0(\mathsf{coim}\,\mu S_\Sigma))$ (более того изоморфизм) по определению ЕКМ морфизмов. Кроме того, так как

$$\begin{aligned}\tau_0(\mu S_\Sigma) &= \tau_0((\mathsf{coim}\,\mu\,\mathsf{im}\,\mu)S_\Sigma) = \tau_0(\mathsf{coim}\,\mu S_\Sigma\,\mathsf{im}\,\mu S_\Sigma) = \\ &= (\tau_0(\mathsf{coim}\,\mu S_\Sigma))(\mathsf{im}\,\mu S_\Sigma) \subseteq \tau,\end{aligned}$$

то $\mathsf{im}\,\mu$ — морфизм $\mathsf{im}\,\mu : (E_0\mu,\ \tau_0(\mathsf{coim}\,\mu S_\Sigma)) \to (E,\ \tau)$. Т.о. каноническая инъекция $\mathsf{im}\,\mu \in [m]$.

$$\begin{tikzcd}
(E_0,\ \tau_0) \arrow[rr, tail, "\mu"] \arrow[dr, "\mathsf{coim}\,\mu"'] & & (E,\ \tau) \\
& (E_0\mu,\ \tau_0(\mathsf{coim}\,\mu S_\Sigma)) \arrow[ur, "\mathsf{im}\,\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

(Двойственное доказательство для фактор-объектов совершенно аналогично). ■

Таким образом, в категориях ЕКМ-родов структур с инъективными мономорфизмами [сюръективными эпиморфизмами] B-точные подобъекты [фактор-объекты] представимы.

Введем специальное обозначение для такой ситуации:

Определение 4.6. *Будем говорить, что в категории рода структуры бурбаковские и категорные подобъекты [фактор-объекты] совпадают, если каждый категорный подобъект [фактор-объект] представим бурбаковским.*

4.4 Строгие мономорфизмы и эпиморфизмы

Утверждение 4.10. *В категории рода структуры с сюръективными эпиморфизмами [инъективными мономорфизмами] каждый B-точный подобъект [фактор-объект] строг (см. определение A.61, с. 119).*

Доказательство.

Пусть $\xi : c \rightarrowtail d$ — представитель B-точного подобъекта объекта d и дана некоторая коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, two heads, shift left, "\eta"] \arrow[d, "\alpha"'] & b \arrow[l, shift left, "\sigma"] \arrow[dl, "\gamma"] \arrow[d, "\beta"] \\
c \arrow[r, tail, "\xi"'] & d
\end{tikzcd}$$

где $\eta : a \twoheadrightarrow b$ — эпиморфизм. По условию теоремы, η есть сюръекция, следовательно η обратим справа как отображение, т.е. существует отображение $\sigma : b \to a$, такое что $\sigma\eta = \mathbf{1}_b$. Рассмотрим отображение $\gamma = \sigma\alpha : b \to c$. Тогда $\gamma\xi = (\sigma\alpha)\xi = \sigma(\alpha\xi) = \sigma(\eta\beta) = (\sigma\eta)\beta = \mathbf{1}_b\beta = \beta$. Т.е. $\gamma\xi$ морфизм, а т.к. ξ B-точен, то и γ — морфизм. Очевидно, что $(\eta\gamma)\xi = \eta(\sigma\alpha)\xi = \eta\sigma\eta\beta = \eta\beta = \alpha\xi$. Так как ξ мономорфизм, то $\eta\gamma = \alpha$. Т.е. $\eta \downarrow \xi$ и ξ строг. ∎

Определение 4.7. *Будем говорить, что категория рода структуры* насыщена свободными объектами, *если справедливы следующие эквивалентные условия:*

- *Пренебрегающий функтор $P : S_\Sigma \to \mathsf{Set}$ имеет сопряженный справа функтор свободы: $F : \mathsf{Set} \to S_\Sigma$*
- *Для любого объекта $(X,\ \sigma)$, имеется бурбаковски свободный объект с множеством свободных образующих X.*

Утверждение 4.11. *В категории нетривиального рода структуры, насыщенной свободными [косвободными] объектами, каждый строгий подобъект [фактор-объект] B-точен.*

Доказательство.

Пусть $\xi : c \rightarrowtail d$ представитель строгого подобъекта и $g : b \to c$ отображение, такое что $(g\xi) : b \to d$ морфизм. Рассмотрим, тогда F_b свободный объект с множеством образующих b. Для отображений $\mathbf{1}_b : b \to b$ и $g : b \to c$ построим морфизмы $\overline{\mathbf{1}_b} : F_b \to b$ и $\overline{g} : F_b \to c$, такие что $j\overline{\mathbf{1}_b} = \mathbf{1}_b$ и $j\overline{g} = g$, где $j : b \hookrightarrow F_b$ вложение b в F_b как множества свободных образующих. $\overline{\mathbf{1}_b}(g\xi) : F_b \to d$ и $\overline{g}\xi : F_b \to d$.

Так как $\overline{\mathbf{1}_b}(g\xi)|_b = (g\xi) = (\overline{g}\xi)|_b : b \to d$, то $\overline{\mathbf{1}_b}(g\xi) = (\overline{g}\xi)$, так как они совпадают на множестве свободных образующих. Таким образом, имеем коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, tail, "j"] & F_b \arrow[r, two heads, "\overline{\mathbf{1}_b}"] \arrow[d, "\overline{g}"'] & b \arrow[d, "(g\xi)"] \arrow[dl, "\gamma"'] \\
b \arrow[r, Rightarrow, "g"] & c \arrow[r, tail, "\xi"] & d
\end{tikzcd}$$

Так как $j\overline{\mathbf{1}_b} = \mathbf{1}_b$, то $\overline{\mathbf{1}_b}$ сюръекция, а, значит, и эпиморфизм. Так как ξ строгий мономорфизм, то отсюда следует, что существует морфизм $\gamma : b \to c$, такой что $(g\xi) = \gamma\xi$. Согласно предложению 4.2, ξ инъекция, т.е. мономорфизм категории множеств. Значит $g = \gamma$, т.е. g морфизм.

■

Утверждение 4.12. *В EKM категории нетривиального рода структуры, насыщенной свободными и косвободными объектами, бурбаковских представителей имеют в точности все строгие подобъекты и фактор-объекты.*

Доказательство.

Согласно предложению 4.11, строгие подобъекты и фактор-объекты в таких категориях B-точны, а согласно предложению 4.9 они содержат в качестве представителей B-точные канонические инъекции и проекции т.е. бурбаковские подобъекты и фактор-объекты. Обратно, всякий бурбаковский подобъект и фактор-объект B-точен по определению, а B-точные подобъекты и фактор-объекты строги по предложению 4.10.

■

4.5 Регулярные мономорфизмы и эпиморфизмы

В [22] доказано следующее.

Утверждение 4.13. *В категории S_Σ со свободным объектом с непустым множеством образующих, мономорфизм $\mu : A \to B$ регулярен (см. определение A.58, с. 117) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

- *для всякого $x \in B - A\mu$ (т.е. $x \in B$ и $x \notin A\mu$) существует пара морфизмов $\varphi, \psi : B \to C$, таких что $\mu\varphi = \mu\psi$ и $x\varphi \neq x\psi$;*
- *μ B-точен.*

Утверждение 4.14. *В категории S_Σ со свободным объектом с множеством образующих мощности больше 1, сюръективный эпиморфизм $\pi : A \twoheadrightarrow B$ регулярен (см. определение A.59, с. 118) тогда и только тогда, когда он B-точен.*

Доказательство.

Необходимость ($\Rightarrow$) Пусть D — объект категории S_Σ и $g : B \to D$ — отображение, такое что $\delta = \pi g : A \to D$ и $\varphi, \psi : C \to A$, $(\varphi, \psi) \in \mathsf{Coeqp}(\{\pi\})$. $\varphi\delta = \varphi(\pi g) = (\varphi\pi)g = (\psi\pi)g = \psi(\pi g) = \psi\delta$ и $\delta \in \mathsf{Coeq}(\mathsf{Coeqp}(\{\pi\}))$. Т.к. μ регулярный эпиморфизм, то существует

$\omega : B \to D$ такой что $\delta = \pi g = \pi\omega$. Так как μ сюръекция т.е. эпиморфизм в категории множеств, то отсюда следует, что $g = \omega$. В частности, g — морфизм, т.е. μ B-точен.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, shift left, "\varphi"] \arrow[r, shift right, "\psi"'] & A \arrow[r, two heads, "\pi"] & B \arrow[r, Rightarrow, "g"] & D \end{tikzcd}$$

Достаточность ($\Leftarrow$) Пусть $g : A \to C$ принадлежит $\mathsf{Coeq}(\mathsf{Coeqp}(\{\pi\}))$. Так как π сюръекция, то можно определить отображение $\overline{g} : B \to C$ соотношением: $b\overline{g} = ag$ где $b = a\pi$. Покажем, что такое определение корректно, действительно, пусть $b = a\pi = a'\pi$. Для множества G свободных образующих свободного объекта F, определим отображения $x, x' : G \to A$, полагая $Gx = a$ и $Gx' = a'$.

По определению свободного объекта существуют такие морфизмы $\alpha, \alpha' : F \to A$, такие что для любого t из G $t\alpha = a$ и $t\alpha' = a'$. Тогда $t(\alpha\pi) = (t\alpha)\pi = a\pi = a'\pi = (t\alpha')\pi = t(\alpha'\pi)$, следовательно $\alpha\pi = \alpha'\pi$ так как существует единственное продолжение с множества свободных образующих до морфизма из свободного объекта, т.е. $(\alpha, \alpha') \in \mathsf{Coeqp}(\{\pi\})$. Следовательно $\alpha g = \alpha' g$ и $ag = (t\alpha)g = t(\alpha g) = t(\alpha' g) = (t\alpha')g = a'g$. Таким образом, $\overline{g}$ определено корректно. По построению $g = \pi\overline{g}$, и так как π B-точен, то $\overline{g}$ — морфизм, откуда следует, что π — регулярный эпиморфизм.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\alpha'"'] & a, a' \in A \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[dr, "g"] & b \in B \arrow[d, dashed, "\overline{g}"] \\ & t \in G \arrow[u, shift left, "x"] \arrow[u, shift right, "x'"'] & C \end{tikzcd}$$

■

4.6 HPF-роды структур и бикатегории

Пусть дана HPF-катеория C. Всякий морфизм f в ней представим в виде $f = \pi_f\xi_f\mu_f$. Где π_f — B-точный эпиморфизм, μ_f — B-точный мономорфизм, а ξ_f — изоморфизм. Обозначим $\mathsf{Epi_B}\, C$ [$\mathsf{Mon_B}\, C$] класс всех B-точных эпиморфизмов [мономорфизмов]. На самом деле π_f и μ_f всегда выбираются „каноническим“ образом. Обозначим $\mathsf{Epi_{BC}}\, C$ [$\mathsf{Mon_{BC}}\, C$] класс всех B-точных канонических проекций [инъекций], т.е. в точности класс бурбаковских факторобъектов [подобъектов].

Утверждение 4.15. *Если C — HPF-катеория с EKM морфизмами, то $(C, \mathsf{Epi_B}\, C, \mathsf{Mon_B}\, C)$ — бикатегория, причем $\mathsf{Epi_B}\, C = (\mathsf{Epi_{BC}}\, C)(\mathsf{Iso}\, C)$ и $\mathsf{Mon_B}\, C = (\mathsf{Iso}\, C)(\mathsf{Mon_{BC}}\, C)$.*

Доказательство.

Пусть $f \in \mathsf{Ar}\, C$, $f = (\pi_f\xi_f)\mu_f : X \to Y$. Тогда $\pi_f\xi_f$ — B-точный эпиморфизм (т.к. B-точность сохраняется изоморфизмами), а μ_f — B-точный мономорфизм.

Пусть нам дано разложение $f = \psi\varphi$, где $\psi : X \to T$ — B-точный эпиморфизм и $\varphi : T \to Y$ — B-точный мономорфизм. Согласно предложению 4.9 (с. 20), факторобъект, содержащий ψ своим представителем, содержит в качестве представителя и каноническую проекцию. Т.о. существует изоморфизм $\imath : T \to X/(\psi\imath)$, такой что $\psi\imath : X \to X/(\psi\imath)$ — каноническая проекция. B-точность сохраняется изоморфизмами поэтому $\imath^{-1}\varphi : X/(\psi\imath) \to Y$ — B-точен и, следовательно, имеет представителем каноническую инъекцию. Т.о. существует изоморфизм $\theta : X/(\psi\imath) \to X/(\psi\imath\theta)$, такой что $\theta^{-1}\imath^{-1}\varphi : X/(\psi\imath\theta) \to Y$ — каноническая проекция.

Теперь

$$f = \psi\varphi = (\psi\imath)(\imath^{-1}\varphi) = (\psi\imath)\theta\theta^{-1}(\imath^{-1}\varphi) = (\psi\imath)\theta(\theta^{-1}\imath^{-1}\varphi)$$

Таким образом, f разложено на каноническую проекцию $(\psi\imath)$ изоморфизм θ и каноническую инъекцию $(\theta^{-1}\imath^{-1}\varphi)$. Такое разложение единственно, следовательно, в частности, $\psi = \pi_f\imath^{-1}$.

Всякий изоморфизм B-точен, следовательно $\mathsf{Iso}\, C \subseteq \mathsf{Epi_B}\, C \cap \mathsf{Mon_B}\, C$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\psi"'] & & Y \\
& T \arrow[ur, "\varphi"'] \arrow[d, "\imath"'] & \\
& X/(\psi\imath) \arrow[d, "\theta"'] & \\
& X/(\psi\imath\theta) &
\end{tikzcd}$$

■

Утверждение 4.16. *В HPF-категории с EKM морфизмами, строгие подобъекты являются бурбаковскими.*

Доказательство.

Следствие предложения 4.15, предложения A.5 и предложения 4.9. ■

Утверждение 4.17. *В уравновешенной HPF-категории [с сюръективными эпиморфизмами, и] с EKM морфизмами, насыщенной свободными объектами, понятия бурбаковского и категорного подобъекта [факторобъекта] совпадают.*

Доказательство.

Следствие предложения 4.15, предложения A.8, предложения 4.11 и предложения 4.9. ■

Глава 5

Произведения и копроизведения

5.1 Бурбаковские начальные структуры и категорные произведения

бурбаковские начальные-финальные структуры, произведения

Напомним (см. определение A.44, с. 114), что в категории C произведением объектов a и b называется конус

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl, "\pi_a"'] \arrow[dr, "\pi_b"] & \\ a & & b \end{tikzcd}$$

такой что, для любого конуса

$$\begin{tikzcd} & d \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ a & & b \end{tikzcd}$$

существует едиственный морфизм $h : d \to c$, такой что коммутативна диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[dr, "h"] \arrow[drr, "\psi"] \arrow[ddr, "\varphi"'] & & \\
& c \arrow[r, "\pi_b"'] \arrow[d, "\pi_a"'] & b \\
& a &
\end{tikzcd}$$

При этом c обозначается $a \times b$, а h — (φ, ψ). Двойственно (см. определение A.45, с. 114) определяется копроизведение:

$$\begin{tikzcd}
& b \arrow[d, "j_b"'] \arrow[ddr, "\psi"] & \\
a \arrow[r, "j_a"] \arrow[drr, "\varphi"'] & a \coprod b \arrow[dr, "{[\varphi, \psi]}"] & \\
& & d
\end{tikzcd}$$

Бурбаковским аналогом категорного произведения является *начальная структура*.

Определение 5.1. *Если в категории рода структуры S_Σ дано семейство объектов $(E_i, \tau_i)_{i \in I}$ и конус морфизмов $f_i : (E, \tau) \to (E_i, \tau_i)$, то τ называется начальной структурой для семейства $(E_i, \tau_i, f_i)_{i \in I}$, если для любого объекта (U, σ) и любого* отображения *$g : U \to E$ эквивалентны следующие соотношения:*

- *g есть морфизм $g : (U, \sigma) \to (E, \tau)$*
- *для всех $i \in I$, gf_i есть морфизм $gf_i : (U, \sigma) \to (E_i, \tau_i)$*

$$\begin{tikzcd}
 & & (E_{i_0}, \tau_{i_0}) \arrow[dd, dash, dotted] \\
(U, \sigma) \arrow[r, "g"] & (E, \tau) \arrow[ur, "f_{i_0}"] \arrow[dr, "f_{i_1}"'] & \\
 & & (E_{i_1}, \tau_{i_1})
\end{tikzcd}$$

Примечание 5.1. *На самом деле, в определении начальной структуры данном в [14] не требуется чтобы f_i были морфизмами, однако, как легко увидеть, выбирая в качестве g отображение $\mathbf{1}_{(E,\tau)} : (E, \tau) \to (E, \tau)$, это условие выполняется автоматически.*

Определение 5.2. *Если в категории рода структуры S_Σ на множестве E можно определить два объекта (E, τ_1) и (E, τ_2), то говорят, τ_1 тоньше (или мельче), чем τ_2, а τ_2 грубее (или крупнее), чем τ_1 (а сами эти структуры называются сравнимыми), если тождественное отображение $\mathbf{1}_E : E \to E$ есть морфизм $\mathbf{1}_E : (E, \tau_1) \to (E, \tau_2)$*

При таком определении очевидно следующее

Утверждение 5.1. *Если (E, τ) начальная структура для семейства $(E_i, \tau_i, f_i)_{i \in I}$, то τ является наиболее грубой структурой при которой все f_i суть морфизмы (и, следовательно, единственна).*

Доказательство.

Прямая подстановка в определения. ■

Примечание 5.2. *Бурбаковские подобъекты являются частным случаем начальной структуры, точнее, (U, σ) есть бурбаковский побобъект (E, τ) если и только σ есть начальная структура для одноэлементного семейства $(E, \tau, j)_{i \in \{\cdot\}}$, где $j : U \hookrightarrow E$ — вложение подмножества.*

Определение 5.3. *Бурбаковским произведением семейства объектов $(E_i, \tau_i)_{i \in I}$ называется структура на декартовом произведении $\prod\limits_{i \in I} E_i$ начальная относительно семейства $(E_i, \tau_i, \pi_i : \prod\limits_{i \in I} E_i \to E_i)$*

Примечание 5.3. *В отличие от категорного произведения, определенного с точностью до изоморфизма, начальные структуры, в общем случае, не образуют класса изоморфных объектов.*

Так в категории рода структуры множества (эквивалентной категории множеств), для всякого конуса $(f_i : E \to E_i)_{i \in I}$, E является начальной структурой для семейства $(E_i, , f_i)_{i \in I}$.

Бурбаковское произведение, наоборот, определено совершенно однозначно.

Двойственно, определяются понятия конечной структуры, бурбаковского копроизведения (бурбаковской суммы).

5.2 $(P_i) - \mathsf{lim}$-предел по семейству функторов

$(P_i) - \mathsf{lim}$-предел это категорная конструкция эквивалентная бурбаковским начальным структурам.

Нашей целью является сравнение бурбаковских и категорных конструкций произведения и копроизведения. Для этого мы построим категорную конструкцию, переходящую в бурбаковскую начальную структуру в категориях родов структур.

Определение 5.4. *Пусть дан функтор $F : D \to C$ и конус функторов $(P_i : C \to C_i | i \in I)$, тогда конус $(\pi_d : q \to dF | d \in \mathsf{Ob}\, D)$ называется (P_i)-пределом функтора F и обозначаться $(P_i) - \mathsf{lim}\, F$, если*

- $(\pi_d : q \to dF | d \in \mathsf{Ob}\, D) \in \mathsf{Ob}\,\mathsf{compat}\, F$
- *для всякого $(\rho_d : p \to dF | d \in \mathsf{Ob}\, D) \in \mathsf{Ob}\,\mathsf{compat}\, F$ такого что $\rho_d P_i = g_i(\pi_d P_i)$ для $g_i : pP_i \to qP_i$ существует единственный $\overline{g} : p \to q$ такой что $\overline{g} P_i = g_i$ и $\rho_d = \overline{g}\pi_d$.*

(P_i)-предел некоторого функтора будет называться его бурбаковским пределом, если это не приводит к недоразумениям.

Примечание 5.4. *Если есть функтор $F : D \to C$ и функтор $P : C \to E$, то по функтору $(\cdot\, P) : \mathsf{Funct}(D, C) \to \mathsf{Funct}(D, E)$ можно построить функтор $\overline{P} : \mathsf{Funct}(D, C)/F \to \mathsf{Funct}(D, E)/FP$ который ограничивается до функтора $\overline{P} : \mathsf{compat}\, F \to \mathsf{compat}\, FP$.*

Тогда определение 5.4 можно переформулировать, сказав, что конус $(\pi_d : q \to dF | d \in \mathsf{Ob}\, D)$ называется $(P_i) - \mathsf{lim}\, F$-пределом функтора F, если все фунторы $\overline{P_i} : \mathsf{compat}\, F \to \mathsf{compat}\, FP_i$ полны и унивалентны на объекте $(\pi_d : q \to dF | d \in \mathsf{Ob}\, D)$ справа.

Утверждение 5.2. *Пусть $J : C_1 \to C_2$ есть вложение полной подкатегории, $F : D \to C_1$ — функтор и $(P_t : C_2 \to C_t)$ — конус функторов.*

Тогда если конус $(\pi_d : q \to dFJ | d \in \mathsf{Ob}\, D)$ с вершиной $q \in \mathsf{Ob}\, C_1$ есть (P_t)-предел функтора FJ, то конус $(\pi_d : q \to dF | d \in \mathsf{Ob}\, D)$ будет (JP_t)-предел функтора F

Доказательство.

Очевидно. ■

Примечание 5.5. *Если $P_i = \Delta^{\alpha_i} : C \to C_i$ для $\alpha_i \in \mathsf{Ob}\, C_i$, то, как легко проверить $(\Delta^{\alpha_i}) - \mathsf{lim}\, F = \mathsf{lim}\, F$, аналогично для $I = \emptyset$ имеем $() - \mathsf{lim}\, F = \mathsf{lim}\, F$, эти соотношения оправдывают название $(P_i) - \mathsf{lim}\, F$* — пределом.

Примечание 5.6. *Очевидно, что для данного семейства* $(P_i : C \to C_i | i \in I)$ *имеется одноэлементное семейство* $((\underset{i \in I}{\times}) P_i : C \to \prod\limits_{i \in I} C_i)$ *такое что* $(P_i) - \lim F = ((\underset{i \in I}{\times}) P_i) - \lim F$ *в том смысле, что левая и правая части этого равенства определены одновременно и равны всегда когда определены.*

Утверждение 5.3. *Если мы рассмотрим категорию рода структуры* S_Σ, *конус функторов* $(P_\Sigma)_i : S_\Sigma \to \mathsf{Set}$ *(см. определение Б.2, с. 129), функтор* $F : D_0 \to S_\Sigma$ *из дискретной категории* D_0 *в* S_Σ *и предел* $((P_\Sigma)_i) - \lim F$ *т.е. конус* $(f_d : (E, \tau) \to (E_d, \tau_d) | d \in \mathsf{Ob}\, D_0)$, *то* (E, τ) *есть начальная структура относительно семейства* (E_d, τ_d, f_d).

Доказательство.

Очевидно. ∎

Примечание 5.7. *Тем самым, бурбаковское произведение (см. определение 5.3, с. 31) может быть охарактеризовано, как конус* $(\pi_i : a \to a_i)$, *такой что* $(\pi_i : a \to a_i) = ((P_\Sigma)_j) - \lim F$ *и* $(\pi_i (P_\Sigma)_j) = \lim F (P_\Sigma)_i$.

Теорема 5.4. *Если существует предел* $\lim F$ *функтора* $F : D \to C$ *и функторы* $(P_i : C \to C_i | i \in I)$ *перестановочны с пределом функтора* F *(т.е. если* $(\lim F) P_i = \lim (F P_i)$*) то* $\lim F = (P_i) - \lim F$. *(Т.е., можно сказать, что в этом случае, функторы* $(P_i : C \to C_i | i \in I)$ *„задают бурбаковские пределы в* C, *через категорные пределы“.)*

Доказательство.

Имеем

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Lim}\,F \arrow[r, "\pi_d"] & dF \\
y \arrow[u, "\overline{g}"] \arrow[ur, "\rho_d"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[d, "P_i"'] \\
C_i
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\mathsf{Lim}\,F)P_i \arrow[r, "\pi_d P_i"] & dFP_i \\
yP_i \arrow[u, "g_i"] \arrow[ur, "\rho_d P_i"'] &
\end{tikzcd}$$

где $\overline{g}$ — морфизм существующий по определению предела и такой что $\overline{g}\pi_d = \rho_d$. Тогда,

$$(\overline{g}P_i)(\pi_d P_i) = \rho_d P_i = g_i(\pi_d P_i)$$

Так как $(\mathsf{lim}\,F)P_i = \mathsf{lim}(FP_i)$, то $(\pi_d P_i)$ — моноконус и, следовательно, $\overline{g}P_i = g_i$. ∎

Следствие 5.5. *Если забывающие функторы $(P_\Sigma)_i : S_\Sigma \to \mathsf{Set}$ сохраняют категорные произведения (т.е., если множества-носители категорного произведения объектов есть декартовы произведения множеств-носителей сомножителей произведения), то бурбаковские произведения совпадают с категорными.*

5.3 Одно обобщение понятия строгого мономорфизма

Всякий (P_i)-предельный конус является (P_i)-строгим.

Рассмотрим необходимое условие, выполняющееся для всякого (P_i)-предельного конуса и являющееся обощением доказанного выше условия для бурбаковских подобъектов (см. утверждение 4.10, с. 22).

Определение 5.5. *Пусть даны функторы $F : I \to C$ и $G : J \to C$, тогда конус $(f_i : e \to iF | i \in \mathsf{Ob}\, I)$, допустимый относительно функтора F называется (F, G)-диагонализируемым с коконусом $(\theta_j : jG \to b | j \in \mathsf{Ob}\, J)$, допустимым относительно функтора G, если для всякого конуса $(\beta_i : b \to iF | i \in \mathsf{Ob}\, I)$, допустимого относительно функтора F, и для всякого коконуса $(\alpha_j : jG \to e | j \in \mathsf{Ob}\, J)$, допустимого относительно функтора G, таких, что коммутативны все диаграммы вида*

$$\begin{tikzcd} jG \arrow[r, "\theta_j"] \arrow[d, "\alpha_j"'] & b \arrow[d, "\beta_i"] \\ e \arrow[r, "f_i"'] & iF \end{tikzcd}$$

существует единственный морфизм $\gamma : b \to e$ такой, что $\theta_j \gamma = \alpha_j$ и $\gamma f_i = \beta_i$.

Определение 5.6. *Конус $(f_i : e \to iF | i \in \mathsf{Ob}\, I)$, допустимый относительно функтора F, называется (F, G)-строгим, если он диагонализируем с любым эпикоконусом, допустимым относительно функтора G.*

Конус $(f_i : e \to iF | i \in \mathsf{Ob}\, I)$, допустимый относительно функтора F, называется F-строгим, если он $(F, \Delta^a_{D_0})$-строг для любого постоянного фунтора $\Delta^a_{D_0} : D_0 \to C$ из одноэлементной категории D_0 с одним морфизмом.

Примечание 5.8. *Очевидно, что, чтобы получить обычное определение диагонализируемости и строгости (см. определение A.61, с. 119), достаточно взять в качестве F и G постоянные функторы $\Delta^a_{D_0}$ и $\Delta^d_{D_0}$.*

Теорема 5.6. *Если дан функтор $F : I \to C$ и конус унивалентных функторов $(P_t : C \to C_t | t \in T)$, переводящих эпиморфизмы в эпиморфизмы обратимые слева, то $(P_t) - \mathsf{lim}\, F$-предел $(f_i : e \to iF | i \in \mathsf{Ob}\, I)$ такой, что $f_i P_t$ — моноконус является F-строгим.*

Доказательство.

Действительно, имеем коммутативный квадрат:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, two heads, "\theta"] \arrow[d, "\alpha"'] & b \arrow[dl, "\gamma"'] \arrow[d, "\beta_i"] \\ e \arrow[r, "f_i"'] & iF \end{tikzcd}$$

Т.е., $\theta\beta_i = \alpha f_i$. Так как θ эпиморфизм, а P_t переводит эпиморфизмы в эпиморфизмы обратимые слева, то существует $\sigma : bP_t \to aP_t$ такой, что $\sigma(\theta P_t) = \mathbf{1}_{bP_t}$:

$$\begin{tikzcd} aP_t \arrow[r, two heads, shift left, "\theta P_t"] \arrow[d, "\alpha P_t"'] & bP_t \arrow[l, shift left, "\sigma"] \arrow[d, "\beta_i P_t"] \\ eP_t \arrow[r, "f_i P_t"'] & (iF)P_t \end{tikzcd}$$

Рассмотрим морфизм $\tau = \sigma(\alpha P_t) : bP_t \to eP_t$ в C_t.

$$\tau(f_iP_t) = \sigma(\alpha P_t)(f_iP_t) = \sigma(\theta P_t)(\beta_iP_t) = (\beta_iP_t)$$

Так как (f_i) есть (P_t)-предел F, то существует единственный морфизм $\gamma : b \to e$ такой, что $\gamma P_t = \sigma(\alpha P_t)$ и $\beta_i = \gamma f_i$.

Кроме того,

$$(\theta P_t)(\gamma P_t)(f_iP_t) = (\theta\gamma)P_t(f_iP_t) = (\theta P_t)\sigma(\alpha P_t)(f_iP_t) = \\ (\theta P_t)\sigma(\theta P_t)(\beta_iP_t) = (\theta P_t)(\beta_iP_t) = (\alpha P_t)(f_iP_t)$$

так как (f_iP_t) есть моноконус по условию, то

$$(\theta P_t)(\gamma P_t) = (\alpha P_t),$$

а так как P_t унивалентен, то

$$\theta\gamma = \alpha,$$

т.е., (f_i) — F-строг. ∎

На самом деле можно доказать и обратное в духе утверждения 4.11.

Утверждение 5.7. *Если дан функтор $F : I \to C$, конус унивалентных функторов $(P_t : C \to C_t | t \in T)$, имеющих сопряженные слева фунторы $F_t : C_t \to C$, а категории C_t имеют образующие объекты, то F-строгий моноконус $(f_i : e \to F_i | i \in \mathsf{Ob}\, I)$ является (P_t)-пределом F.*

Доказательство.

Итак, пусть имеется конус $(\xi_i : b \to iF)$, допустимый относительно F такой, что

$$\begin{tikzcd}
cP_t \arrow[r, "f_iP_t"] & iFP_t \\
bP_t \arrow[u, "g_t"] \arrow[ur, "\xi_iP_t"'] &
\end{tikzcd}$$

По свойствам сопряженных функторов имеем морфизмы $\overline{\mathbf{1}} : bP_tF_t \to b$ и $\overline{g_t} : bP_tF_t \to c$ такие, что коммутативны следующие диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
bP_tF_tP_t \arrow[r, "\overline{\mathbf{1}}P_t"] & bP_t \\
bP_t \arrow[u, "j"] \arrow[ur, "\mathbf{1}_{bP_t}"'] &
\end{tikzcd}$$

и

$$\begin{tikzcd} bP_tF_tP_t \arrow[r, "\overline{g_t}P_t"] & cP_t \\ bP_t \arrow[u, "j"] \arrow[ur, "g_t"] & \end{tikzcd}$$

где $j : bP_t \to bP_tF_tP_t$ есть соответствующая компонента единицы сопряжения $F_t \dashv P_t$:

$$\begin{tikzcd} bP_tF_tP_t \arrow[r, shift left, "\overline{\mathbf{1}}P_t"] \arrow[d, "\overline{g_t}P_t"'] & bP_t \arrow[l, shift left, "j"] \arrow[d, "\xi_iP_t"] \\ cP_t \arrow[r, "f_iP_t"] & iFP_t \end{tikzcd}$$

Тогда

$$j(\overline{g_t}P_t)(f_iP_t) = g_t(f_iP_t) = \xi_iP_t = j(\overline{\mathbf{1}}P_t)(\xi_iP_t)$$

Следовательно, $\overline{g_t}f_i = \overline{\mathbf{1}}\xi_i$ так как они имеют одинаковое сужение на „семейство образующих“. Кроме того, так как $j(\overline{\mathbf{1}}P_t) = \mathbf{1}_{bP_t}$, то $\overline{\mathbf{1}}P_t$ есть эпиморфизм, а так как P_t унивалентен и, следовательно, отражает эпиморфизмы, то и $\overline{\mathbf{1}}$ тоже эпиморфизм. Таким образом, имеем коммутативный квадрат:

$$\begin{tikzcd} bP_tF_t \arrow[r, two heads, "\overline{\mathbf{1}}"] \arrow[d, "\overline{g_t}"'] & b \arrow[dl, "\gamma_t"'] \arrow[d, "\xi_i"] \\ c \arrow[r, "f_i"] & iF \end{tikzcd}$$

Так как (f_i) — F-строг, то существует единственный $\gamma_t : b \to c$ такой, что $\overline{\mathbf{1}}\gamma_t = \overline{g_t}$ и $\gamma_tf_i = \xi_i$. Так как (f_i) — моноконус, то из последнего равенства вытекает, что $\gamma_{t_1} = \gamma_{t_2} = \gamma$. Остается заметить, что

$$(\gamma P_t)(f_iP_t) = \xi_iP_t = g_t(f_iP_t),$$

а так как в силу утверждения 4.4 P_t сохраняет мономорфизмы, то f_iP_t есть моноконус и

$$\gamma P_t = g_t$$

Т.е. (f_i) есть (P_t)-предел F. ■

В качестве простого следствия получаем:

Следствие 5.8. *В категории рода структуры S_Σ с сюръективными эпиморфизмами, и насыщенной свободными объектами, моноконус является бурбаковским пределом функтора $F : D \to S_\Sigma$, если и только он F-строг.*

При этом категорный предел является также и бурбаковским.

Доказательство.

Действительно, функторы $(P_\Sigma)_t : S_\Sigma \to \mathsf{Set}$ унивалентны по определению, и по утверждению 4.4, если (f_i) моноконус, то и $(f_i)(P_\Sigma)_t$ тоже моноконус, так как в Set, очевидно, всякое непустое множество является образующим.

Вторая часть немедленно следует из теоремы 5.4 так как по условию $(P_\Sigma)_t$ имеют левые сопряженные, а, значит, перестановочны с пределами. ■

Примечание 5.9. *Очевидным образом можно построить определения и утверждения двойственные к построениям этого раздела и связать бурбаковское понятие о „финальной структуре“ со строгостью эпиконусов и наличием косвободных объектов.*

5.4 Начальные структуры в категориях функторов

В категориях функторов всякий моноконус является бурбаковским пределом.

В примечании 5.3 было указано, что в отличие от категорных пределов, бурбаковские пределы функтора не обязательно изоморфны друг другу. Оказывается, что такая ситуация не является экзотической и характерна для достаточно широкого класса категорий.

Теорема 5.9. *Пусть D и C суть категории. Определим конус функторов $(\mathsf{ev}_t : \mathsf{Funct}(D, C) \to C | t \in \mathsf{Ob}\, D)$ соотношениями:*

$$\Lambda : D \to C, \quad \Lambda\, \mathsf{ev}_t = t\Lambda$$

$$\xi : \Lambda \to N, \quad \xi\, \mathsf{ev}_t = \xi_t$$

Тогда, для всякого функтора $F : E \to \mathsf{Funct}(D, C)$, всякий допустимый для F конус $(\pi_i : q \to iF)$ такой, что для всякого фиксированного объекта $t \in \mathsf{Ob}\, D$ компоненты $((\pi_i)_t : tq \to t(iF))$ образует моноконус, является (ev_t)-пределом F.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Имеем $q : D \to C$, $p : D \to C$, $iF : D \to C$

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Funct}(D, C) \arrow[d, "\mathsf{ev}_t"'] \\ C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} q \arrow[r, "\pi_i"] & iF \\ p \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "\rho_i"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} tq \arrow[r, "(\pi_i)_t"] & t(iF) \\ tp \arrow[u, "g_t"] \arrow[ur, "(\rho_i)_t"] \end{tikzcd}$$

Надо проверить, что (g_t) суть компоненты естественного преобразования $g : p \to q$. В диаграмме

$$\begin{tikzcd}
t_1 \arrow[d, "f"] & t_1 p \arrow[r, "g_{t_1}"] \arrow[d, "fp"] & t_1 q \arrow[r, "(\pi_i)_{t_1}"] \arrow[d, "fq"] & t_1(iF) \arrow[d, "f(iF)"] \\
t_2 & t_2 p \arrow[r, "g_{t_2}"] & t_2 q \arrow[r, "(\pi_i)_{t_2}"] & t_2(iF)
\end{tikzcd}$$

объемлющий и правый квадраты коммутативны. Следовательно и левый квадрат коммутативен, так как горизонтальные стрелки правого квадрата образуют моноконус. ■

Примечание 5.10. *Если в категории C произвольный морфизм имеет ядерную пару, то всякий моноконус $(\pi_i : q \to iF)$ удовлетворяет условию теоремы, таким образом в таких категориях всякий допустимый моноконус является бурбаковским пределом.*

Пример 5.1. *Категории* Set, MapSet, EndSet, AutSet *все могут быть представлены как категории* $\mathsf{Funct}(D, \mathsf{Set})$ *для подходящей категории D поэтому в этих категориях всякий допустимый моноконус является бурбаковским пределом.*

Кроме того, в силу утверждения 5.2 полные подкатегории этих категорий, например, EqSet *и* SubSet *также обладают этим свойством.*

5.5 Начальные структуры в категориях с EKM-морфизмами

В EKM-категориях структура, полученной обратным переносом вдоль некоторого моноконуса, является начальной относительно этого моноконуса.

В примечании 5.1 отмечалось, что начальная относительно конуса $(f_i : (E, \tau) \to (E_i, \tau_i))$ структура является самой грубой при которой все f_i еще являются морфизмами (ср. с определением тихоновского произведения топ. пространств). Хотя в общем случае, это условие не является достаточным, это действительно почти так для достаточно широкого класса категорий.

Теорема 5.10. *В EKM-категории S_Σ со „схемой конструкции“ $\Gamma_\Sigma : \mathsf{Set} \times \mathsf{Set} \times \cdots \times \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ для всякого конуса $(f_i : (E, \tau) \to (E_i, \tau_i))$ такого, что $\tau(f_i\Gamma_\Sigma) = \tau_i$ и $(f_i : E \to E_i)$ есть моноконус отображений, (E, τ) есть начальная структура относительно этого моноконуса.*

Доказательство.

Пусть у нас есть объект (D, σ) и отображение $g : D \to E$, такие что gf_i суть морфизмы: $gf_i : (D, \sigma) \to (E_i, \tau_i)$. Тогда

$$\sigma(g\Gamma_\Sigma)(f_i\Gamma_\Sigma) \subseteq \tau_i$$

по условию $\tau(f_i\Gamma_\Sigma) = \tau_i$, значит

$$\sigma(g\Gamma_\Sigma)(f_i\Gamma_\Sigma) \subseteq \tau(f_i\Gamma_\Sigma).$$

Пусть существует $x \in \sigma(g\Gamma_\Sigma)$ такой что $x \notin \tau$, но $x(f_i\Gamma_\Sigma) \in \tau(f_i\Gamma_\Sigma)$ поэтому существует такой $\tau_0 \in \tau$, что $x(f_i\Gamma_\Sigma) = \tau_0(f_i\Gamma_\Sigma)$, при этом $x \neq \tau_0$ так как $\tau_0 \in \tau$ и $x \notin \tau$, но это противоречит условию о том что (f_i) есть моноконус отображений.

Следовательно,

$$\sigma(g\Gamma_\Sigma) \subseteq \tau,$$

а значит, g есть морфизм $g : (D, \sigma) \to (E, \tau)$. ∎

Примечание 5.11. *Отметим, что в категории топологических пространств необходимое условие того, чтобы структура (E, τ) была грубейшей при которой все морфизмы (f_i) непрерывны, является и достаточным см. [11] лемма 2.5.1 стр. 265.*

Глава 6

Управляемые системы

6.1 Категории для динамических систем

Категории гладких многообразий и векторных полей.

6.1.1 Гладкие многообразия

Примечание 6.1. *В этом разделе под „r-гладкими функциями“ будут пониматься функции из класса C^r.*

Рассмотрим некоторые категории гладких многообразий:

- $\mathsf{Manifold}^r_n$ — категория всех хаусдорфовых n-мерных многообразий гладкости r со счетной базой.
- $\mathsf{Manifold}_n$ — категория всех гладких хаусдорфовых n-мерных многообразий со счетной базой.
- $\mathsf{Manifold}^r$ — категория всех хаусдорфовых многообразий гладкости r со счетной базой.
- $\mathsf{Manifold}$ — категория всех гладких конечномерных хаусдорфовых многообразий со счетной базой.

- $\mathsf{Manifold}_n^\infty$ — категория всех бесконечно гладких хаусдорфовых n-мерных многообразий со счетной базой.
- $\mathsf{Manifold}_n^\omega$ — категория всех аналитических хаусдорфовых n-мерных многообразий со счетной базой.
- $\mathsf{Manifold}^\infty$ — категория всех бесконечно гладких хаусдорфовых многообразий со счетной базой.
- $\mathsf{Manifold}^\omega$ — категория всех аналитических хаусдорфовых многообразий со счетной базой.
- $\mathsf{Manifold}$ — категория всех хаусдорфовых многообразий со счетной базой.

Заметим, что в эти категории не включается „патологический“ случай $\emptyset$. Для пустого многообразия $\emptyset$ нельзя однозначно определить размерность.

С другой стороны, для одноточечного многообразия $\mathbf{R}^0 = \{\cdot\}$, положим, что его касательное расслоение это оно само: $T\mathbf{R}^0 \cong \mathbf{R}^0$, тогда для произвольного гладкого отображения $f : \mathbf{R}^0 \to X$ определим касательное отображение $f^* : \mathbf{R}^0 \to TX$:

$$f^* : \cdot \longmapsto (f(\cdot), 0).$$

Примечание 6.2. *Надо отметить, что в контексте теории категорий под „категорией (гладких) многообразий“ иногда понимается несколько другая категория, включающая в себя „инфинитезимальные“ объекты. Эта категория обладает более богатой структурой и, в частности, является топосом. (См. [10]).*

Имеются очевидные функторы включения $P_r : \mathsf{Manifold}^{r+1} \to \mathsf{Manifold}^r$ тождественные на объектах и морфизмах, а также функторы $P_r^\infty : \mathsf{Manifold}^\infty \to \mathsf{Manifold}^r$ и $P_r^\omega : \mathsf{Manifold}^\omega \to \mathsf{Manifold}^r$.

Рассмотрим также функторы $T_r : \mathsf{Manifold}^{r+1} \to \mathsf{Manifold}^r$, сопоставляющие многообразию X его касательное расслоение TX, снабженное структурой многообразия гладкости r, а гладкому отображению

$f : X \to Y$, его дифференциал $f^* : TX \to TY$. Проекции $\pi_X : TX \to X$, образуют естественное преобразование $\pi : T_r \to P_r$:

$$\begin{tikzcd} TX \arrow[r, "\pi_X"] \arrow[d, "f^*"] & X \arrow[d, "f"] \\ TY \arrow[r, "\pi_Y"] & Y \end{tikzcd},$$

В категории $\mathsf{Manifold}^r$ существует конечные произведения $\alpha \times \beta$, а также конечные копроизведения многообразий одинаковой размерности $\alpha \sqcup \beta$, где $\mathsf{dim}\,\alpha = \mathsf{dim}\,\beta$.

Исследуем, как выглядят эпиморфизмы в категории $\mathsf{Manifold}^r$.

Утверждение 6.1. *r-Гладкое отображение $f : \alpha \to \beta$ является эпиморфизмом категории $\mathsf{Manifold}^r$ тогда и только тогда, когда его образ всюду плотен:* $\mathsf{Closure}\,\alpha f = \beta$.

Доказательство.

Достаточность ($\Leftarrow$) Забывающий функтор $U : \mathsf{Manifold}^r \to \mathsf{Top}$ в категорию топологических пространств и непрерывных отображений очевидно унивалентен и, следовательно, отражает эпиморфизмы. Таким образом, если fU — эпиморфизм, то и f тоже эпиморфизм. Но эпиморфизм в Top это в точности непрерывное отображение со всюду плотным образом.

Необходимость ($\Rightarrow$) Пусть образ f не всюду плотен. Тогда существует точка $y \in \beta$ и ее открытая окрестность U_y такие, что $U_y \cap \alpha f = \emptyset$.

Рассмотрим цилиндр $\beta \times (0,1)$, где $(0,1) \subset \mathbf{R}^1$ — интервал. Пусть $g : \beta \to \beta \times (0,1)$ — вложение: $g : a \longmapsto (a, 0)$ и $\psi : \mathbf{R}^1_+ \to \mathbf{R}^1$ заведомо существующая r-гладкая (или аналитическая) функция, такая что $t\psi \in [0,1]$, $0\psi = 1$, $1\psi = 0$, ψ есть монотонная биекция на отрезке $[0,1]$ и $t\psi = 0$ для $t > 1$.

Так как β есть многообразие, то у точки y есть окрестность B_1^n гомеоморфная единичному шару такая, что $y \in B_1^n \subseteq U_y$. Построим тогда отображение $h : \beta \to \beta \times (0,1)$ следующим образом: $h|_{\beta - B_1^n} = g|_{\beta - B_1^n}$. Для $t \in B_1^n$ пусть $th = (t, (||t||)\psi)$. Очевидно, что h есть произведение двух гладких отображений $\mathbf{1}_\beta : \beta \to \beta$ и $\bar{\psi} : \beta \to (0,1)$ и, поэтому, само является гладким. Кроме того,

$$yh = (y, (||y||)\psi) = (y, 0\psi) = (y, 1) \neq (y, 0) = yg$$

Таким образом, $g \neq h$, но $fg = fh$, так как g и h по определению совпадают на образе f. Следовательно, f не эпиморфизм.

■

Функторы T_r сохраняют произведения ($T(X \times Y) \cong TX \times TY$), копроизведения ($T(X \sqcup Y) \cong TX \sqcup TY$) и отражают мономорфизмы и эпиморфизмы, в силу своей унивалентности. (Если $f^* : TX \to TY$ мономорфизм, то $f : X \to Y$ это инъективная иммерсия, называемая иногда вложением, если f^* эпиморфизм, — то f это сюръективная субмерсия.)

Объект $\mathbf{R}^0$, есть очевидно, терминальный объект всех этих категорий.

Более того, $\mathbf{R}^0$ свободный объект над одноэлементным множеством, относительно забывающего функтора $U : \mathsf{Manifold} \to \mathsf{Set}$. Тогда, по лемме 4.4, U сохраняет мономорфизмы, а так как он унивалентен, то он их и отражает. Таким образом

Утверждение 6.2. *Мономорфизмы в категориях многообразий это в точности инъективные гладкие отображения.*

С другой стороны, по утверждению 6.1, эпиморфизм вовсе не обязан быть сюръекцией, значит функтор U не сохраняет эпиморфизмов, а значит, нет многообразия, косвободного над множеством кообразующих мощности больше одного. В частности, не существует многообразия, Ω с выделенным подмножеством $V_0 \subseteq \Omega$, которое можно было бы назвать „классифицирующим“, такого, что для любого многообразия α и любого подмножества $V \subseteq \alpha$ существует и единственно гладкое отображение $f_V : \alpha \to \Omega$, такое что $f_V(V) = V_0$.

6.1.2 Обыкновенные дифференциальные уравнения

Автономную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \alpha,$$

где α — гладкое многообразие можно отождествить с векторным полем

$$\begin{tikzcd} \alpha T \\ \alpha P \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd} ,$$

где αT — касательное расслоение α. Конкретнее, если α — многообразие гладкости r, $r > 0$, то αT можно в общем случае снабдить структурой многообразия гладкости $r-1$, и f есть отображение гладкости $r-1$. В частности, если $r = 1$, то αT есть непрерывное многообразие, и f есть непрерывное отображение. При этом $f\pi = \mathbf{1}_M$, где $\pi : \alpha T \to \alpha$ — проекция. Так как $f\pi = \mathbf{1}_M$, то f — мономофизм, т.е., представитель некоторого подобъекта объекта αT.

Таким образом получается категория Ode, объектами которой являются векторные поля $\xi : \alpha P \to \alpha T$, а морфизмы из $\xi : \alpha P \to \alpha T$ в $\eta : \beta P \to \beta T$ это подстановки, т.е. морфизмы $f : \alpha \to \beta$, такие, что коммутативна диаграмма:

$$\begin{tikzcd} \alpha T \arrow[r, "f^*"] & \beta T \\ \alpha P \arrow[u, "\xi"'] \arrow[r, "fP"] & \beta P \arrow[u, "\eta"'] \end{tikzcd} .$$

Действительно, рассмотрим системы уравнений

$$\dot{x} = \xi(x), \quad x \in \alpha$$

и

$$\dot{y} = \eta(y), \quad y \in \beta,$$

и подстановку $y = f(x)$, такую, что вышеприведенная диаграмма коммутативна. Тогда эта подстановка переводит решения в решения. Действительно, пусть $x(t)$ — решение, тогда

$$\frac{d}{dt} f(x(t)) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \xi(x(t)) = f^*(\xi(x(t))) = \eta(f(x(t))),$$

т.е., $f(x(t))$ решение второй системы.

Конечным объектом в Ode является поле $\mathbf{1}_{\mathbf{R}^0} : \mathbf{R}^0 \to \mathbf{R}^0$.

Особую роль играет поле $\partial : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1 T$, $\partial : t \longmapsto (t, 1)$, соответствующее уравнению

$$\dot{x} = 1, \quad x \in \mathbf{R}^1.$$

Морфизмы $s : \partial \to \beta$ в точности соответствуют решениям β, определенным на всей оси $\mathbf{R}^1$. Тем самым, можно, в частности, построить функтор $\mathsf{Sol} = h^\partial : \mathsf{Ode} \to \mathsf{Set}$, сопоставляющий системе β множество ее решений.

Двойственно, можно рассмотреть поле σ:

$$\sigma : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1 T$$

$$\sigma : t \longmapsto (t, 0),$$

соответствующее уравнению

$$\dot{x} = 0, \quad x \in \mathbf{R}^1.$$

Морфизм $\theta : f \to \sigma$, где $f : \alpha \to \alpha T$ — векторное поле, это гладкое отображение $\theta : \alpha \to \mathbf{R}^1$ такое, что коммутативна диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
\alpha T \arrow[r, "\theta^*"] & \mathbf{R}^2 \\
\alpha \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\theta"] & \mathbf{R}^1 \arrow[u, "\sigma"']
\end{tikzcd} .$$

Проследим по этой диаграмме путь какой-нибудь точки $x \in \alpha$:

$$
\begin{tikzcd}
(x, f(x)) \arrow[r, "\theta^*"] & (\theta(x), \frac{d\theta}{dx}(x) f(x)) \\
x \arrow[u, mapsto, "f"] \arrow[r, mapsto, "\theta"] & \theta(x) \arrow[u, mapsto, "\sigma"']
\end{tikzcd} .
$$

Так как диаграмма должна быть коммутативна, то по определению σ получаем $\frac{d\theta}{dx}(x)f(x) = 0$, или расписав по координатам,

$$\sum_j \frac{\partial\theta}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) f^j(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Таким образом, морфизмы $\theta : \alpha \to \sigma$ это в точности инварианты векторного поля α и имеется функтор

$$h_\sigma : \mathsf{Ode}^* \to \mathsf{Set}$$

сопоставляющий системе диф. уравнений множество ее инвариантов.

6.1.3 Динамические системы

Рассматриваются динамические системы следующего вида:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \alpha, \quad u \in U_x,$$

где α — гладкое многообразие, U_x — замкнутые множества. Решением такой системы является пара отображений $x : \mathbf{R}^1 \to \alpha$, $u : \mathbf{R}^1 \to \bigsqcup\limits_{x \in \alpha} U_x$, обращающие систему в тождество таких, что $u(t) \in U_{x(t)}$.

Множества U_x, „прикрепленные“ к точкая x многообразия α, образуют расслоение ([21]). Точнее, расслоением с базой B, называется объект категории $\mathsf{Manifold}/B$:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, two heads, "p"'] \\ B \end{tikzcd} \quad ,$$

такой что $p : E \to B$ — сюръективный морфизм. Здесь $U_x = p^{-1}(x)$. Можно рассмотреть более общую ситуацию, когда p — произвольный морфизм. При этом, возможно что некоторые $U_x = \emptyset$, однако, это не приводит к более общей ситуации, т.к., согласно определению, решения не могут заходить в область с пустым множеством допустимых управлений. В любом случае, *множество* E можно представить как $E = \bigsqcup\limits_{x \in B} p^{-1}(x)$, что позволяет (однозначно) представить любую точку $x \in E$ в виде $(p(x), u)$, где $u \in U_x$.

Теперь, для данного многообразия α из $\mathsf{Manifold}^r$ динамическую систему можно отождествить с коммутативной диаграммой:

$$\begin{tikzcd} & \beta \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "f"] & \\ \alpha P & & \alpha T \arrow[ll, two heads, "\pi"] \end{tikzcd} \quad ,$$

здесь $U_x = p^{-1}(x)$ (замкнутое, как прообраз при непрерывном отображении замкнутой в хаусдорфовом пространстве точки). β — многообразие, а p и f — отображения гладкости $r - 1$.

Морфизмами из динамической системы

$$\begin{tikzcd} & \beta \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "f"] & \\ \alpha P & & \alpha T \arrow[ll, two heads, "\pi"] \end{tikzcd} \quad ,$$

в систему

$$
\begin{tikzcd}
 & \beta' \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "g"] & \\
\alpha' P & & \alpha' T \arrow[ll, two heads, "\rho"]
\end{tikzcd}
\quad ,
$$

являются пары морфизмов $\xi : \alpha \to \alpha'$ и $\eta : \beta \to \beta'$, такие, что коммутативна диаграмма:

$$
\begin{tikzcd}
\beta \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "p"'] & & \beta' \arrow[dr, "g"] \arrow[dd, "r"] & \\
 & \alpha T \arrow[rr, "\xi^*"] \arrow[dl, "\pi"] & & \alpha' T \arrow[dl, "\rho"] \\
\alpha P \arrow[rr, "\xi P"'] & & \alpha' P &
\end{tikzcd}
$$

Эти данные определяют категорию Ds^r динамических систем на многообразиях гладкости r.

Эту категорию можно получить и другим способом, как комма-категорию (см. см. определение 14, с. 135) по некоторой паре функторов.

Пусть даны категории C_1, C_2, C_3, D и функторы $S : C_3 \to C_2$, $\Lambda : D \to \mathsf{Funct}(C_1, C_2)$, тогда функтору Λ можно сопоставить функтор $D \times C_1 \longrightarrow C_2$, а ему, в свою очередь, функтор $\bar{\Lambda} : C_1 \to \mathsf{Funct}(D, C_2)$. Кроме того, всегда имеется функтор вложения $\Delta_D : C_2 \to \mathsf{Funct}(D, C_2)$, сопоставляющий объекту $c \in \mathsf{Ob}\, C_2$ константный функтор $\Delta_D^c : D \to C_2$. Тогда есть пара функторов $\bar{\Lambda} : C_1 \to$

$\mathsf{Funct}(D, C_2)$ и $S\Delta_D : C_3 \to \mathsf{Funct}(D, C_2)$ и можно рассмотреть их комма-категорию $(S\Delta_D \downarrow \bar{\Lambda})$. Нетрудно проверить, что выбирая $C_1 = \mathsf{Manifold}^r$, $C_2 = C_3 = \mathsf{Manifold}^{r-1}$, $S = \mathbf{1}_{C_2}$, $D = T_2$ — категория с двумя объектами 0 и 1 и одним нетождественным морфизмом $t : 0 \to 1$ и $0\Lambda = T_{r-1} : \mathsf{Manifold}^r \to \mathsf{Manifold}^{r-1}$, $1\Lambda = P_{r-1} : \mathsf{Manifold}^r \to \mathsf{Manifold}^{r-1}$ и $t\Lambda = \pi : T_{r-1} \to P_{r-1}$ мы получаем $(S\Delta_D \downarrow \bar{\Lambda}) \cong \mathsf{Ds}^r$

Эту же категорию Ds^r можно получить, заметив, что достаточно задать $r-1$-гладкое отображение $f : \beta \to \alpha T$, тогда можно *определить* расслоение β над базой αP при помощи отображения $p = f\pi : \beta \to \alpha P$. В этом случае, объектами категории Ds^r являются морфизмы

$$\begin{tikzcd} \alpha T \\ \beta \arrow[u, "f"] \end{tikzcd} ,$$

а морфизм из $f : \beta \to \alpha T$ в $g : \beta' \to \alpha' T$ это коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \beta \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "f"'] & \beta' \arrow[d, "g"] \\ \alpha T \arrow[r, "\xi^*"'] & \alpha' T \end{tikzcd}$$

Нетрудно проверить, что это определение эвивалентно предыдущему. Теперь мы имеем, что $\mathsf{Ds}^r \cong (\mathbf{1}_{\mathsf{Manifold}^r} \downarrow T_r)$. Кроме того, категория дифференциальных уравнений, Ode^r естественным образом вкладывается в Ds^r.

Морфизм из системы

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \alpha, \quad u \in U_x,$$

в систему

$$\dot{y} = g(y, v), \quad y \in \alpha', \quad v \in V_y$$

это постановка

$$y = \xi(x)$$
$$v = \eta(u),$$

переводящая решения в решения. Действительно, пусть $(x(t), u(t))$ — решение. Тогда из коммутативности диаграммы следует, что $g(\xi(x), \eta(u)) = \frac{\partial\xi}{\partial x} f(x, u) = \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt}$, т.е. $(\xi(x(t)), \eta(u(t)))$ — тоже решение.

Конечным объектом в Ds^r является система $\top_{\mathsf{Ds}^r} = \mathbf{1}_{\mathbf{R}^0} : \mathbf{R}^0 \to \mathbf{R}^0$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{R}^0 \arrow[r, "\mathbf{1}_{\mathbf{R}^0}"] \arrow[d, twoheadrightarrow, "\mathbf{1}_{\mathbf{R}^0}"'] & \mathbf{R}^0 T \\
\mathbf{R}^0 &
\end{tikzcd}$$

Так же как и в категории Ode, в Ds есть объект $\partial = (\mathbf{1}_{\mathbf{R}^1} : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1, \partial : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}T)$, такой, что морфизмы $\varphi : \partial \to \beta$ есть решения системы β. Это объект

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{R}^1 \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, twoheadrightarrow, "\mathbf{1}_{\mathbf{R}^1}"'] & \mathbf{R}^1 T \\
\mathbf{R}^1 &
\end{tikzcd}$$

Действительно, пусть дан морфизм

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{R}^1 \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, two heads, "\mathbf{1}_{\mathbf{R}^1}"'] \arrow[dr, "\eta"'] & \mathbf{R}^1 T \arrow[dr, "\xi^*"] & \\
\mathbf{R}^1 \arrow[dr, "\xi"'] & \beta \arrow[r, "f"'] \arrow[d, two heads, "p"] & \alpha T \\
& \alpha &
\end{tikzcd}$$

где $\partial : x \longmapsto (x, 1)$. Имеем $\eta(t) = (\xi(t), u(t))$, $\partial(t) = (t, 1)$, $\xi^*(t, 1) = (\xi(t), \frac{d\xi}{dt}(t))$ и, окончательно, $\frac{d\xi}{dt}(t) = f(\xi(t), u(t))$ т.е., $(\xi(t), u(t))$ — решение.

Этот объект обозначается так же, как и аналогичный объект в Ode^r, однако, это не приводит к путанице, так как при указаном выше вложении Ode^r как подкатегории в Ds^r эти объекты отождествялются.

Так же как и в категории Ode, в Ds есть объект σ, такой что морфизмы $\theta : \alpha \to \sigma$ есть инварианты α. Точнее σ это диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{R}^1 \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, two heads, "\mathbf{1}_{\mathbf{R}^1}"'] & \mathbf{R}^1 T \\
\mathbf{R}^1 &
\end{tikzcd}$$

Лемма 6.3. *Морфизмы $t : \partial \to \sigma$ суть в точности константные отображения $\mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$:*

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{Ds}^r}(\partial, \sigma) \cong \mathbf{R}^1.$$

Доказательство.

Прямая проверка: морфизм $\partial \to \sigma$ это гладкое отображение $t : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$, такое что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1 \arrow[r, "f^*"] & \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1 \\
\mathbf{R}^1 \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "f"] & \mathbf{R}^1 \arrow[u, "\sigma"]
\end{tikzcd},$$

Отсюда, для всякой точки $x \in \mathbf{R}^1$ имеем

$$\frac{dt}{dx}(x) = 0,$$

а так как t гладкое отображение, то $t(x) = x_0$ для всех $x \in \mathbf{R}^1$. ∎

Пусть теперь $s : \partial \to \alpha$ — решение системы α, а $\theta : \alpha \to \sigma$ — некоторый морфизм, тогда $s\theta : \partial \to \sigma$ есть по лемме константное отображение, т.е. θ постоянен на решениях α, т.е. $\theta(x, u)$ есть инвариант α.

Обогащение категории Ds^r

Множество всех гладких отображений из многообразия α в многообразие β есть подпространство пространства $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Top}}(\alpha, \beta)$, снабженного компактно-открытой топологией. Таким образом мы получаем на категории $\mathsf{Manifold}^r$ η-структуру и функтор $\eta_{\mathsf{Manifold}^r} : \mathsf{Manifold}^{r*} \times \mathsf{Manifold}^r \to \mathsf{Top}$, и при этом выполняются условия $H1$–$H6$ главы 7.

Примечание 6.3. *Представляется правдоподобным, что при такой η-структуре на $\mathsf{Manifold}^r$, функтор $T_{r-1} : \mathsf{Manifold}^r \to \mathsf{Manifold}^{r-1}$ не является η-совместимым.*

Приведем набросок доказательства. Пусть $f : \alpha \to \beta$ морфизм категории $\mathsf{Manifold}^r$. Можно наложить на f „мелкое дрожание“ и получить отображение f', которое

- *будет иметь такую же гладкость, что и f,*
- *будет близко к f в компактно-открытой топологии (т.е., за счет того, что дрожание мелкое, будет переводить компактные множества примерно в те же множества, что и f),*
- *его дифференциал f'^* будет сильно отличаться от дифференциала f (так как даже мелкое дрожание может сильно влиять на производную).*

Таким образом, отображение $\varphi^{T_{r-1}} : \eta_{\mathsf{Manifold}^r}(\alpha, \beta) \to \eta_{\mathsf{Manifold}^{r-1}}(\alpha T, \beta T)$ переводит близкие отображения в далекие и, следовательно, не непрерывно.

Аналогично, множество всех подстановок между из динамической системы $f : \beta \to \alpha T$ в систему $g : \beta' \to \alpha' T$ есть подпространство пространства-произведения $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Top}}(\beta, \beta') \times \mathsf{Hom}_{\mathsf{Top}}(\alpha, \alpha')$, где каждый сомножитель — множество всех непрерывных отображений, снабженное компактно-открытой топологией. Таким образом мы получаем на категории Ds^r η-структуру и функтор $\eta_{\mathsf{Ds}^r} : \mathsf{Ds}^{r*} \times \mathsf{Ds}^r \to \mathsf{Top}$, и при этом выполняются условия $H1$–$H6$ главы 7.

Более того, при этом каждый основной функтор $\eta^f : \mathsf{Ds}^r \to \mathsf{Top}$ η-совместим, так как в качестве компоненты

$$\varphi^{\eta^f}_{(p,q)} : \eta(p, q) \to \eta_{\mathsf{Top}}(\eta(f, p), \eta(f, q))$$

можно взять отображение эспоненциально присоединенное (в декартовой замкнутой категории Top) к непрерывному „отображению композиции“:

$$\eta(f, p) \times \eta(p, q) \to \eta(f, q).$$

Таким образом, по лемме Йонеда для η-категорий (см. лемму 7.6, с. 91) получаем, что для любых динамических систем f и g

$$\eta\, \mathsf{Nat}(\eta^f, \eta^g) \cong f\, \eta^g = \eta_{\mathsf{Ds}^r}(g, f).$$

Тем самым, имеется полное вложение $\Upsilon : \mathsf{Ds}^r \to \mathsf{Funct}(\mathsf{Ds}^{r*}, \mathsf{Top})$ категории динамических систем в категорию контравариантных функторов из нее в Top (На самом деле это даже полное вложение в полную подкатегорию, состоящую из всех η-совместимых функторов.).

В частности, при переходе к η-категории, функтор $\mathsf{Sol} = h^\partial$ естественным образом заменяется на функтор $\Lambda\upsilon\sigma = \eta^\partial : \mathsf{Ds}^r \to \mathsf{Top}$. Т.е. совокупность решений данной динамической системы можно считать топологическим пространством (причем, хаусдорфовым и регулярным как подпространство хаусдорфового и регулярного пространства всех непрерывных отображений, снабженного компактно-открытой топологией).

Аналогично, есть функтор $\eta_\sigma : \mathsf{Ds}^{r*} \to \mathsf{Top}$, сопоставляющий динамической системе пространство ее инвариантов.

Лемма 6.4.

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{Ds}^r}(\partial, \partial) = \mathsf{End}_{\mathsf{Ds}^r}(\partial) \cong \mathbf{R}^1.$$

Доказательство.

Морфизм $\partial \to \partial$ это пара отображений $\xi, \eta : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$, где η имеет гладкость r, а ξ — гдадкость $r-1$, таких что коммутативна диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{R}^2 \arrow[r, "\eta^*"] & \mathbf{R}^2 \\
\mathbf{R}^1 \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "\xi"] & \mathbf{R}^1 \arrow[u, "\partial"]
\end{tikzcd},$$

Возьмем элемент $x \in \mathbf{R}^1$ и проследим его путь по диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
(x,1) \arrow[r, mapsto, "\eta^*"] & (\eta(x), \frac{d\eta}{dx}(x)) \\
x \arrow[u, mapsto, "\partial"] \arrow[r, mapsto, "\xi"] & \xi(x) \arrow[u, mapsto, "\partial"]
\end{tikzcd},$$

т.е. получаем, что $(\eta(x), \frac{d\eta}{dx}(x)) = (\xi(x), 1)$, т.е. $\eta(x) = \xi(x)$ и $\frac{d\eta}{dx} = 1$, откуда,

$$\eta(x) = \xi(x) = x + x_0,$$

для некоторой константы $x_0 \in \mathbf{R}^1$.

Обратно, очевидно, что всякая функция такого вида является эндоморфизмом ∂.

Требуемый изоморфизм можно явно задать формулой $(\xi, \eta) \longmapsto \xi(0)$, кроме того, из построения очевидно, что всякая такая подстановка обратима, т.е. всякий эндоморфизм ∂ есть автоморфизм:

$$\mathsf{End}_{\mathsf{Ds}^r}(\partial) \cong \mathsf{Aut}_{\mathsf{Ds}^r}(\partial) \cong \mathbf{R}^1,$$

при этом обратный элемент в $\mathsf{Aut}_{\mathsf{Ds}^r}(\partial)$ одновременно и обратный в аддитивной группе $\mathbf{R}^1$. ∎

Примечание 6.4. *Таким образом мы доказали, что все подстановки, переводящие решения тривиального уравнения*

$$\dot{x} = 1, \quad x \in \mathbf{R}^1, \quad u \in \{\cdot\}$$

в них самих, это в точности сдвиги $x \longmapsto x + x_0$.

Из доказательства видно, что $\mathsf{End}_{\mathsf{Ds}^r}(\partial)$ изоморфно $\mathbf{R}^1$ как множество и как группа. Более того, они также изоморфны как топологические пространства (а значит, и как топологические группы).

Утверждение 6.5. *В категории* Top *имеется изоморфизм*

$$\eta_{\mathsf{Ds}^r}(\partial, \partial) \cong \mathbf{R}^1,$$

где $\mathbf{R}^1$ *снабжено стандартной топологией.*

Доказательство.

Итак, имеется отображение

$$I = (x_0 \longmapsto (\xi = \eta = x + x_0)) : \mathbf{R}^1 \to \eta_{\mathsf{Ds}^r}(\partial, \partial)$$

1. Докажем, что I непрерывно в точке $x_0 \in \mathbf{R}^1$.

   Пусть U произвольная открытая окрестность точки $x_0 I = (f_1, f_2) \in U \subseteq \mathsf{Hom}_{\mathsf{Top}}(\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^1) \times \mathsf{Hom}_{\mathsf{Top}}(\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^1)$. Так как произведения открытых множеств образуют базу в каждой точке пространства-произведения, то существуют такие открытые множества $U_1, U_2 \subseteq \mathsf{Hom}_{\mathsf{Top}}(\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^1)$, что

   $$x_0 I \in U_1 \times U_2 \subseteq U \subseteq \eta_{\mathsf{Ds}^r}(\partial, \partial) \subseteq \mathsf{Hom}_{\mathsf{Top}}(\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^1) \times \mathsf{Hom}_{\mathsf{Top}}(\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^1).$$

   Каждое U_i открыто в компактно-открытой топологии, поэтому в него можно вписать открытое множество из базы компактно-открытой топологии в точке, то есть, пересечение конечного множества открытых множеств из предбазы:

   $$f_i \in \bigcap_{j=1}^{n_i} W(K_i^j, O_i^j) \subseteq U_i,$$

   где K_i^j компактны в $\mathbf{R}^1$, O_i^j открыты в $\mathbf{R}^1$, а $W(K_i^j, O_i^j)$ это множество всех отображений f из $\eta_{\mathsf{Ds}^r}(\partial, \partial)$ таких, что $K_i^j f \subseteq O_i^j$.

   Каждый компакт K_i^j может быть покрыт конечной совокупностью замкнутых отрезков: $K_i^j = \bigcap_{k=1}^{m_{ij}} [l_i^{jk}, r_i^{ik}]$.

   Так как $x_0 I \in U$, то:

   $$l_i^{jk} \leq x \leq r_i^{ik} \quad \Rightarrow \quad x + x_0 \in O_i^j,$$

   в частности,

   $$l_i^{jk} + x_0 \in O_i^j \qquad r_i^{ik} + x_0 \in O_i^j.$$

   Так как O_i^j открыто, то существет такое $\epsilon_i^{jk} > 0$, такой что $B(l_i^{jk}, \epsilon_i^{jk}) \subseteq O_i^j$ и $B(r_i^{jk}, \epsilon_i^{jk}) \subseteq O_i^j$, где $B(x, r)$ — открытый шар с центром x и радиусом r.

   Возьмем $\epsilon = \min \epsilon_i^{jk} > 0$. Пусть $x_1 \in B(x_0, \epsilon)$, тогда $x_1 I = (f_1, f_2 : x \longmapsto x + x_1)$. Имеем

   $$l_i^{jk} \leq x \leq r_i^{ik} \quad \Rightarrow \quad l_i^{jk} + x_0 - \epsilon \leq x + x_1 \leq r_i^{ik} + x_0 + \epsilon,$$

   т.е.,

   $$l_i^{jk} \leq x \leq r_i^{ik} \quad \Rightarrow \quad x + x_1 \in O_i^j.$$

Тем самым, $f_i \in W([l_i^{jk}, r_i^{ik}], O_i^j)$, значит $f_i \in W(K_i^j, O_i^j)$, значит, $f_i \in \bigcap_{j=1}^{n_i} W(K_i^j, O_i^j) \subseteq U_i$, т.е.,

$$x_1 I = (f_1, f_2) \in U_1 \times U_2 \subseteq U,$$

т.е., $B(x_0, \epsilon)I \subseteq U$, т.е. I — непрерывна в x_0.

2. Докажем теперь, что I^{-1} непрерывно в точке $(\xi = \eta : x \longmapsto x + x_0) : \partial \to \partial$.

   Пусть V некоторая открытая окрестность точки $x_0 = (\xi, \eta)I^{-1}$. Тогда имеется шар $x_0 \in B(x_0, \epsilon) \subseteq V$.

   Рассмотрим множество $U = W([0,1], (x_0 - \epsilon, 1 + x_0 + \epsilon)) \subseteq \eta_{\mathsf{Ds}^r}(\partial, \partial)$. Так как $[0,1]$ компактно, а $(x_0 - \epsilon, 1 + x_0 + \epsilon)$ — открыто, то U открыто как элемент предбазы компактно-открытой топологии. С другой стороны, если $(f, g) \in U$ и $f = g : x \longmapsto x + x_1$, то $x_0 - \epsilon \leq x_1$ и $x_1 \leq x_0 + \epsilon$, таким образом $x_1 \in B(x_0, \epsilon)$, т.е. $UI^{-1} \subseteq B(x_0, \epsilon) \subseteq V$, т.е., I^{-1} непрерывно в (ξ, η)

■

Таким образом, для каждой управляемой системы α получается обычное действие аддитивной группы $\mathbf{R}^1$ (группы эндоморфизмов объекта ∂) на топ. пространстве решений системы:

$$\mathbf{R}^1 \times \eta_{Ds^r}(\partial, \alpha) \cong \eta_{Ds^r}(\partial, \partial) \times \eta_{Ds^r}(\partial, \alpha) \to \eta_{Ds^r}(\partial, \alpha).$$

Рассмотрим забывающий функтор $U : \mathsf{Ds}^r \to \mathsf{Top}$, сопоставляющий динамической системе $f : e \to \alpha T$ расслоенное пространство e и очевидным образом действующий на морфизмах. Немедленно видно, что U η-совместим. Отсюда, по лемме Йонеда, сразу получаем, что

$$\eta\, \mathsf{Nat}(\eta^\partial, U) \cong \partial U = \mathbf{R}^1,$$

как топологические пространства. Кроме того, прямой проверкой можно убедиться, что естественное преобразование $\xi^{x_0} : \eta^\partial \to U$, соответствующее числу $x_0 \in \mathbf{R}^1$, состоит из компонент $\xi_\alpha^{x_0} : \eta(\partial, \alpha) \to \alpha U$, сопоставляющих каждому решению $p : \partial \to \alpha$, $p : \mathbf{R}^1 \to \alpha$, его значение в точке x_0:

$$p\xi_\alpha^{x_0} = x_0 p$$

Вернемся теперь к функтору $\eta_\sigma : \mathsf{Ds}^{r*} \to \mathsf{Top}$. Нетрудно видеть, что для всяких $n \geq 0$,$m \geq 0$ имеем $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Ds}^r}(\sigma^n, \sigma^m) \cong \mathsf{Hom}_{\mathsf{Manifold}^r}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$.

Действительно, морфизм $t : \sigma^n \to \sigma^m$ это гладкое отображение $t : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, такое что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{R}^{2n} \arrow[r, "t^*"] & \mathbf{R}^{2m} \\
\mathbf{R}^n \arrow[u, "\sigma^n"] \arrow[r, "t"] & \mathbf{R}^m \arrow[u, "\sigma^m"]
\end{tikzcd},$$

но эта диаграмма коммутирует автоматически так как

$$\sigma^n : (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0).$$

В частности, есть морфизмы $\mathsf{add}, \mathsf{mul} : \sigma \times \sigma \to \sigma$, соответствующие (гладким) операциям сложения и умножения $\mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$.

Описанный выше изоморфизм $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Ds}^r}(\sigma^n, \sigma^m) \cong \mathsf{Hom}_{\mathsf{Manifold}^r}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ очевидно согласован с композицией морфизмов (т.к., композиция в Ds^r и композиция в $\mathsf{Manifold}^r$ совпадают). Следовательно, все диаграммы в $\mathsf{Manifold}^r$, в вершинах которых расположены $\mathbf{R}^n$ будут коммутировать и в Ds^r если $\mathbf{R}^n$ заменить на σ^n.

Следовательно, σ будет, например, коммутативно-кольцевым объектом в Ds^r. т.к. будут коммутативными диаграммы вида

$$\begin{tikzcd}
\sigma \times \sigma \times \sigma \arrow[r, "\mathsf{add} \times \mathbf{1}_\sigma"] \arrow[d, "\mathbf{1}_\sigma \times \mathsf{add}"'] & \sigma \times \sigma \arrow[d, "\mathsf{add}"] \\
\sigma \times \sigma \arrow[r, "\mathsf{add}"'] & \sigma
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\sigma \times \sigma \times \sigma \arrow[r, "\mathsf{mul} \times \mathbf{1}_\sigma"] \arrow[d, "\mathbf{1}_\sigma \times \mathsf{mul}"'] & \sigma \times \sigma \arrow[d, "\mathsf{mul}"] \\
\sigma \times \sigma \arrow[r, "\mathsf{mul}"'] & \sigma
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\top_{\mathsf{Ds}^r} \times \sigma \arrow[r, "{[0] \times \mathbf{1}_\sigma}"] \arrow[dr, "\mathbf{1}_\sigma"'] & \sigma \times \sigma \arrow[d, "\mathsf{add}"'] & \sigma \times \top_{\mathsf{Ds}^r} \arrow[l, "{\mathbf{1}_\sigma \times [0]}"'] \arrow[dl, "\mathbf{1}_\sigma"] \\
& \sigma &
\end{tikzcd}$$

и т.п., где $\top_{\mathsf{Ds}^r} = \sigma^0 = \mathbf{1}_{\mathbf{R}^0} : \mathbf{R}^0 \to \mathbf{R}^0$, и $[0] : \mathbf{R}^0 \to \mathbf{R}^1$ — вложение 0 в $\mathbf{R}^1$. Эти диаграммы выражают алгебраические свойства операций, задаваемых морфизмами add и mul, такие как ассоциативность, существование нейтральных элементов и т.д.

Как известно, в этом случае для всякого объекта $\alpha \in \mathsf{Ob}\,\mathsf{Ds}^r$, множество $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Ds}^r}(\alpha, \sigma)$ можно снабдить той же алгебраической структурой, что и σ. То же самое справедливо и для обогащенных hom-множеств $\eta_{\mathsf{Ds}^r}(\alpha, \sigma)$. В частности, каждое топологическое пространство $\eta_{\mathsf{Ds}^r}(\alpha, \sigma)$ можно снабдить структурой унитарного модуля над $\mathbf{R}^1$, так как этой структурой обладает σ. Так как $\mathbf{R}^1$ поле, то каждое пространство инвариантов $\eta_{\mathsf{Ds}^r}(\alpha, \sigma)$ является топологическим векторным пространством над $\mathbf{R}^1$. В частности, среди инвариантов всегда можно выбрать базис (всегда одной и той же мощности).

6.2 EKM-рода структур для динамических систем

Строятся рода структур для (гладких) многообразий и обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых традиционные морфизмы соответствующих категорий совпадают с EKM-морфизмами.

6.2.1 Гладкие многообразия

Для данных натуральных чисел n (размерность) и r (гладкость) построим род структуры с EKM-морфизмами для категории $\mathsf{Manifold}_n^r$:

$$(X, \sigma_1 \subseteq \beta(X) \times X, \sigma_2 \subseteq \beta(\mathbf{R}^n \times X), A_n^r(X, \sigma_1, \sigma_2)),$$

где $A_n^r(X, \sigma_1, \sigma_2)$ — аксиома состоящая из конъюнкции следующих соотношений:

1. $X \neq \emptyset$
2. σ_1 определяет топологию (см. пункт B.2 с. 138);
3. пусть, $f \in \sigma_2$, тогда, $f \in \beta(\mathbf{R}^n \times X)$, тогда $f \subseteq \mathbf{R}^n \times X$. Требуется, чтобы терм f был графиком отображения $f : \mathbf{R}^n \to X$;
4. всякое $f : \mathbf{R}^n \to X$ из σ_2 непрерывно относительно топологии σ_1 и стандартной топологии на $\mathbf{R}^n$;
5. в σ_2 содержится максимальный согласованный атлас, т.е. семейство непрерывных отображений $(\varphi_i : \mathbf{R}^n \to X)_{i \in I}$ являющихся гомеоморфизмами на свои образы, такое что их образы образуют покрытие X и выполняются известные условия согласованности и максимальности;
6. отображение $f : \mathbf{R}^n \to X$ принадлежит σ_2 тогда и только тогда, когда оно r-гладко относительно атласа $(\varphi_i)_{i \in I}$ и стандартной структуры гладкого многообразия на $\mathbf{R}^n$.

Из последнего пункта следует, что σ_2 может содержать только один максимальный атлас.

Очевидно, что каждому объекту $\mathsf{Manifold}^r_n$, т.е. паре (X, σ_1, σ_2) можно сопоставить обычное многообразие размерности n и гладкости r и наоборот. При этом топология, вводимая при помощи атласа (в которой открыты в точности все объединения образов отображений из атласа) автоматически совпадает с исходной топологией σ_1.

Рассмотрим EKM-морфизмы в $\mathsf{Manifold}^r_n$. Пусть даны два объекта (X, σ_1, σ_2) и (Y, τ_1, τ_2) и морфизм

$$f : (X, \sigma_1, \sigma_2) \to (Y, \tau_1, \tau_2)$$

т.е. отображение $f : X \to Y$, такое что

$$\sigma_1(\beta(f) \times f) \subseteq \tau_1$$

и

$$\sigma_2(\beta(\mathbf{1}_{\mathbf{R}^n} \times f)) \subseteq \tau_2$$

из первого условия следует, что f непрерывно относительно топологии σ_1. Второе условие означает, что для любого гладкого отображение $\varphi : \mathbf{R}^n \to X$ отображение $\varphi f : \mathbf{R}^n \to Y$ также будет гладким. Выбирая к качестве φ отображение $\varphi_i : \mathbf{R}^n \to X$ из атласа на X, получаем, что $\varphi_i f : \mathbf{R}^n \to Y$ гладкое, а так как стандартную гладкую структуру на $\mathbf{R}^n$ можно задать при помощи одной карты с тождественным отображением, то гладкость $\varphi_i f$ значит, что все возможные отображения $\varphi_i f \psi_j^{-1} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, где $\psi_j : \mathbf{R}^n \to Y$ отображение из атласа Y, — гладкие, а это в точности эквивалентно тому, что f само гладкое. Таким образом, EKM-морфизмы в $\mathsf{Manifold}^r_n$ совпадают с гладкими отображениями.

Аналогично можно построить категории $\mathsf{Manifold}^\infty_n$, $\mathsf{Manifold}^\omega_n$ бесконечно гладких и аналитических многообразий соответственно.

Добавляя в аксиому условия о существовании соответствующего числа r можно построить категорию $\mathsf{Manifold}_n$ — n-мерных многообразий,

Покажем как построить род структуры с EKM-морфизмами для категории $\mathsf{Manifold}^r$, $\mathsf{Manifold}^\infty$ и $\mathsf{Manifold}^\omega$ — многообразий гладкости r, бесконечно гладких и аналитических многообразий соответственно:

$$(X, \sigma_1 \subseteq \beta(X) \times X, \sigma_2 \subseteq \beta(\beta(\mathbf{N} \times \mathbf{R}) \times X), A'^r(X, \sigma_1, \sigma_2)),$$

где $A'^{r}(X, \sigma_1, \sigma_2)$ это аксиома состоящая из конъюнкции следующих соотношений:

1. пусть $t \in \sigma_2$, тогда $t \in \beta(\beta(\mathbf{N} \times \mathbf{R}) \times X)$, значит $t \subseteq \beta(\mathbf{N} \times \mathbf{R}) \times X$. Требуется, чтобы существовало такое число n, не зависящее от t, что t есть график отображения из множества графиков отображений из множества $\{1, \dots, n\}$ в множество $\mathbf{R}$ (всякий такой график есть подмножество $\mathbf{N} \times \mathbf{R}$, т.е. принадлежит $\beta(\mathbf{N} \times \mathbf{R})$) в множество X. Таким образом, t есть график отображения из $\mathbf{R}^n$ в X.

2. $A_n^r(X, \sigma_1, \sigma_2)$

Примечание 6.5. *Способ, которым был построен выше род структуры для гладких многообразий можно обобщить следующим образом.*

Предположим, что у нас есть категория C, снабженная „забывающим“ функтором $P : C \to Set$. Требуется найти в категории C объект Ω, с тем свойством, что для любого отображения $F : aP \to bP$ морфизм $f : a \to b$, такой что $F = fP$ существует только тогда, когда отображение $(\cdot\, F) : \mathsf{Hom}_{Set}(\Omega P, aP) \to \mathsf{Hom}_{Set}(\Omega P, bP)$ сужается до отображения $(\cdot\, F) : \mathsf{Hom}(\Omega, a) \to \mathsf{Hom}_{Set}(\Omega, b)$, т.е, для любого морфизма $\varphi : \Omega \to a$, отображение $\varphi F : \Omega \to b$ также морфизм.

К примеру, в категории метрических пространств Metr (или более обще, топологических пространств, топология которых полностью описывается последовательностями), в качестве Ω можно выбрать множество $\{1/n | n \in \mathbf{N}\} \cup \{0\}$ с топологией, подпространства действительной прямой. Действительно, непрерывное отображение $f : \Omega \to (X, \rho)$ есть в точности последовательность $a_n = f(1/n)$, сходящаяся к $f(0)$. Таким образом, множество $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Metr}}(\Omega, (X, \rho))$ есть множество всех сходящихся последовательностей в (X, ρ). Однако, по определению, непрерыное отображение $\xi : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ это отображение множеств, сохраняющее сходимость всех последовательностей.

Полезной оказывается также двойственная конструкция, когда в категории C выбирается объект Ω^*, такой что отображение множеств $f : a \to b$ является морфизмом тогда и только тогда, когда для всяко-

го морфизма $\varphi : b \to \Omega^*$ существует морфизм $\psi : a \to \Omega^*$, такой что $\psi = f\varphi$.

Например, в категории топологических пространств и непрерывных отображений можно в качестве Ω^* пространство Серпинского S_2:

$$(\{\alpha, \beta\}, \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\alpha, \beta\}\}).$$

Непрерывное отображение $f : X \to S_2$, можно отождествить с открытым множеством $U = f^{-1}(\alpha)$. Тем самым $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Top}}(X, S_2)$ есть совокупность открытых множеств в X, т.е., топология на X, остается отметить, что непрерывными являются в точности отображения, при которых прообразы открытых множеств открыты.

Такой же структурой обладают и морфизмы построенных выше категорий Ode^r и Ds^r. В них за Ω можно взять ∂, множества $\mathsf{Hom}(\partial, \alpha)$ это множества решений уравнения (или динамической системы) α. В то же время морфизм $f : \alpha \to \beta$ это по определению в точности отображение, переводящее решения в решения.

6.2.2 Дифференциальные уравнения

Категории Ode^r_n дифференциальных уравнений размерности n и гладкости r можно сопоставить следующий род структуры:

$$(X, \sigma_1 \subseteq \beta(X) \times X, \sigma_2 \subseteq \beta(\mathbf{R}^n \times X), \sigma_3 \subseteq X \times X \times \beta(\mathbf{R}^n \times X) \times \mathbf{R}^n, A^r_n(X, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)),$$

где аксиома $A^r_n(X, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ утверждает, что:

1. (X, σ_1, σ_2) есть объект категории $\mathsf{Manifold}^r_n$, т.е., σ_1 задает топологию, а σ_2 — гладкую структуру на X;

2. σ_3 есть график отображения $\sigma_3 : X \to X \times \beta(\mathbf{R}^n \times X) \times \mathbf{R}^n$;

3. если $\sigma_3(x) = (y, G, h)$, где $y \in X$, $G \subseteq \mathbf{R}^n \times X$ и $h \in \mathbf{R}^n$, то при этом

   - $x = y$;

- G есть график отображения $\varphi : \mathbf{R}^n \to X$;
- φ есть гомеоморфизм $\varphi : \mathbf{R}^n \to U$ из атласа X;
- $x \in U$.

Таким образом, $\sigma_3(x) = (x, \varphi : \mathbf{R}^n \to U, h)$.

4. Если $A_X \subseteq \beta(\mathbf{R}^n \times X)$ — атлас многообразия X, то множество TX можно построить как фактор-множество подмножества Q_X множества $X \times A_X \times \mathbf{R}^n$, состоящего из всех троек $(x, \varphi : \mathbf{R}^n \to U, h)$, где $x \in U$. Очевидно, что образ $\sigma_3(X)$ лежит в Q_X, поэтому можно построить композицию $\sigma_3\pi : X \to TX$, где $\pi : Q_X \to TX$ — проекция на фактор-множество. Требуется, чтобы $\sigma_3\pi$ было гладким отображением относительно гладкой структуры, заданной при помощи σ_2 и, восстанавливаемой по ней гладкой структуры на TX.

Очевидно, что всякому объекту $(X, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ можно сопоставить векторное поле $\sigma_3\pi : X \to TX$ и наоборот.

Так же как и в случае рода структуры гладких многообразий, можно построить рода структуры для категорий Ode^r, Ode_n, Ode^∞, Ode^ω и Ode.

EKM-морфизмы категории Ode_n^r — это подстановки, переводящие решения в решения.

$f : (X, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \to (Y, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ это отображение $f : X \to Y$, такое что:

$$\sigma_1(\beta(f) \times f) \subseteq \tau_1,$$
$$\sigma_2(\beta(\mathbf{1}_{\mathbf{R}^n} \times f)) \subseteq \tau_2$$

и

$$\sigma_3(f \times f \times \beta(\mathbf{1}_{\mathbf{R}^n} \times f) \times \mathbf{1}_{\mathbf{R}^n}) \subseteq \tau_3.$$

Из первого условия следует, что f непрерывное отображние, из второго, что f — гладкое. Если объекту $(X, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ соответствует поле $\xi : X \to TM$, объекту $(X, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ — поле $\eta : Y \to TY$ и $x\xi = (x, \varphi : \mathbf{R}^n \to U, h)$, то из третьего условия следует, что $xf\eta = (xf, \varphi f : \mathbf{R}^n \to V, h)$.

Так как по построению τ_3 отображение φf принадлежит атласу, то f есть локальный гомеоморфизм в каждой точке.

Рассмотрим действие касательного отображения $f^* : TX \to TY$ в точке $(x, \varphi : \mathbf{R}^n \to U, h)$. В качестве карты атласа Y в точке xf возьмем φf, тогда имеем:

$$\begin{aligned}(x, \varphi : \mathbf{R}^n \to U, h)f^* = (xf, \varphi f : \mathbf{R}^n \to V, \frac{\partial}{\partial x}(\varphi f(\varphi f)^{-1})h) = \\ = (xf, \varphi f : \mathbf{R}^n \to V, h) = xf\eta.\end{aligned}$$

Таким образом, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} TX \arrow[r, "f^*"] & TY \\ X \arrow[u, "\xi"] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[u, "\eta"] \end{tikzcd},$$

и f есть подстановка.

Очевидно, что и наоборот, всякая постановка, являющаяся гомеоморфизмом на областях U из σ_3 есть морфизм этого рода структуры.

В том же духе, можно посторить альтернативный род структуры для категории векторных полей, воспользовавшись другим определением для касательного расслоения:

$$(X, \sigma_1 \subseteq \beta(X) \times X, \sigma_2 \subseteq \beta(\mathbf{R}^n \times X), \sigma_3 \subseteq X \times X \times \beta(\mathbf{R} \times X), A_n^r(X, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)),$$

со следующей аксиомой $A_n^r(X, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$:

1. (X, σ_1, σ_2) есть объект категории $\mathsf{Manifold}_n^r$, т.е., σ_1 задает топологию, а σ_2 — гладкую структуру на X;

2. σ_3 есть график отображения $\sigma_3 : X \to X \times \beta(\mathbf{R} \times X)$;

3. если $\sigma_3(x) = (y, G)$, где $y \in X$, $G \subseteq \mathbf{R} \times X$, то при этом

- $x = y$;
- G есть график отображения $\gamma : \mathbf{R} \to X$;
- $\gamma(0) = x$;
- $\gamma : \mathbf{R} \to X$ есть непрерывное отображение;

Таким образом, $\sigma_3(x) = (x, \gamma : \mathbf{R} \to X)$.

4. Множество TX можно построить как фактор-множество подмножества S_X множества $X \times \beta(\mathbf{R} \times X)$, состоящего из всех троек $(x, \gamma : \mathbf{R} \to X)$, где $x = \gamma(0)$. Очевидно, что образ $\sigma_3(X)$ лежит в S_X, поэтому можно построить композицию $\sigma_3\pi : X \to TX$, где $\pi : S_X \to TX$ — проекция на фактор-множество. Требуется, чтобы $\sigma_3\pi$ было гладким отображением относительно гладкой структуры, заданной при помощи σ_2 и, восстанавливаемой по ней гладкой структуры на TX.

В этом роде структуры EKM-морфизм $f : (X, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \to (Y, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ это отображение $f : X \to Y$ такое, что:

$$\sigma_1(\beta(f) \times f) \subseteq \tau_1,$$

$$\sigma_2(\beta(\mathbf{1}_{\mathbf{R}^n} \times f)) \subseteq \tau_2$$

и

$$\sigma_3(f \times f \times \beta(\mathbf{1}_{\mathbf{R}} \times f)) \subseteq \tau_3.$$

Из первых двух условий следует, что f это непрерывное и гладкое отображение, а из последнего, что если $\sigma_3(x) = (x, \gamma : \mathbf{R} \to X)$, то $\tau_3(f(x)) = (f(x), \gamma f : \mathbf{R} \to Y) = f^*(\sigma_3(x))$, таким образом, f это подстановка.

Обратно, всякая подстановка может быть представлена таким образом.

6.2.3 Динамические системы

Род структуры с EKM-морфизмами для категории Ds^r можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned}(X, E, \quad & \sigma_1^X \subseteq \beta(X) \times X, \sigma_2^X \subseteq \beta(\beta(\mathbf{N} \times \mathbf{R}) \times X), \\ & \sigma_1^E \subseteq \beta(E) \times E, \sigma_2^E \subseteq \beta(\beta(\mathbf{N} \times \mathbf{R}) \times E), \\ & p \subseteq E \times X, f \subseteq E \times X \times \beta(\mathbf{R}^1 \times X), A_n^r(X, E, \sigma_1^X, \sigma_2^X, \sigma_1^E, \sigma_2^E))\end{aligned}$$

аксиома:

1. $(X, \sigma_1^X, \sigma_2^X)$ — объект категории $\mathsf{Manifold}^r$;
2. $(E, \sigma_1^E, \sigma_2^E)$ — объект категории $\mathsf{Manifold}^{r-1}$;
3. p — график $(r-1)$-гладкого отображения $p : E \to XP_{r-1}$;
4. также как и в роде структуры обыкновенного дифференциального уравнения, f можно продолжить до $(r-1)$-гладкого отображения $f : E \to XT_{r-1}$;
5. $f\pi = p : E \to XP_{r-1}$

EKM-морфизм из $(X, E, \sigma_1^X, \sigma_2^X, \sigma_1^E, \sigma_2^E, p, f)$ в $(Y, F, \tau_1^Y, \tau_2^Y, \tau_1^F, \tau_2^F, r, g)$ это пара отображений $\xi : X \to Y$ и $\eta : E \to F$.

Как и раньше получаем, что ξ — непрерывное и r-гладкое, а η — непрерывное и $(r-1)$-гладкое. Кроме того, имеем: $p(\eta \times \xi) \subseteq r$, т.е., если $(e, p(e)) \in p$, то $(\eta(e), \xi(p(e))) \in r$. Таким образом, коммутативна диаграмма:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "p"'] & F \arrow[d, "r"] \\ XP_{r-1} \arrow[r, "\xi P_{r-1}"'] & YP_{r-1} \end{tikzcd}$$

Наконец, $f(\eta\times\xi\times\beta(\mathbf{1}_{\mathbf{R}^1}\times\xi))\subseteq g$, т.е., если $(e,(p(e),\gamma:\mathbf{R}^1\to X))\in f$, то $(\eta(e),(\xi(p(e)),\gamma\xi:\mathbf{R}^1\to Y))\in g$. Таким образом, если $f(e)=(p(e),\gamma)$, то $g(\eta(e))=(\xi(p(e)),\gamma\xi)=\xi^*(f(e))$. Таким образом, коммутативна диаграмма:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "f"'] & F \arrow[d, "g"] \\ XT_{r-1} \arrow[r, "\xi^*"'] & YT_{r-1} \end{tikzcd}$$

Т.е. пара (ξ,η) является морфизмом-подстановкой категории Ds^r.

Глава 7

η-категории

Allez en avant et la foi vous viendra

Даламбер

7.1 Определения и мотивировка

7.1.1 Введение

Стандартное определение категории требует, чтобы морфизмы между каждой парой объектов образовывали множество (см. определение A.1, с. 101). Между тем, эти морфизмы часто можно естественным образом снабдить какой-либо структурой. Например, множество гомоморфизмов между абелевыми группами само „является“ абелевой группой, множество всех непрерывных отображений между двумя топологическими пространствами можно снабдить топологией (причем не одним способом), класс морфизмов (т.е. функторов) между двумя категориями снабжается структурой категории и т.д. Во всех приведенных примерах, морфизмы имеют ту же структуру, что и сами объекты. Это условие, как мы увидим, не является обязательным, хотя при его выполнении мы получаем более полную информацию о структуре изучаемой категории.

Категории, морфизмы которых снабжены некоторой дополнительной структурой называются „обогащенными“ (надо отличать эту ситуацию от случая, когда дополнительной структурой обладают *объекты* категории).

Из существующих подходов к определению и изучению обогащенных категорий и некоторых частных случаев отметим (не претендуя на полноту):

- (пред-)аддитивные и (пред-)абелевы(е) категории ([17], с. 432)
- моноидальные замкнутые категории ([17], с. 446)
- декартовые замкнутые категории ([17], с. 446)
- относительные C-категории ([17], с. 447)
- 2-категории ([17], с. 450)
- бивариантные теории ([4])

7.1.2 Определения

Известно, что каждая категория C снабжена основным функтором: $h_C : C^* \times C \to \mathsf{Set}$:

$$(x, y)h_C = \mathsf{Hom}(x, y),$$

$$f : y \to x, g : x' \to y', (f, g)h_C : \mathsf{Hom}(x, x') \to \mathsf{Hom}(y, y')$$

для всякого $\xi : x \to x'$, $\xi((f, g)h_C) = f\xi g : y \to y'$. Допуская вольность речи, h_c будет обозначаться как h, всегда когда это не вызывает недоразумений.

Зафиксируем теперь некую категорию M, и унивалентный функтор $P : M \to \mathsf{Set}$, который будет называться „*забывающим*“.

Определение 7.1. *η-категорией называется пара (C, η_C), где C — категория, а η_C — функтор $\eta_C : C^* \times C \to M$, такой что*

$$h_C \cong \eta_C\, P \qquad (H1)$$

Примечание 7.1. *Допуская вольность речи, η-категорией будет называться и сама категория C всегда когда это не вызывает недоразумений.*

Примечание 7.2. *В пределах этого раздела без дальнейших комментариев будут отождествляться функторы $F : C_1 \to C_2$ и $F : C_1^* \to C_2^*$, а также, (в силу известного изоморфиза), функторы $F : C_1 \times C_2 \to C_3$ и $F : C_1 \to \mathsf{Funct}(C_2, C_3)$.*

Примечание 7.3. *Обозначение η призвано отражать аналогию между η-функтором и основным функтором. В частности, $(x, y)\,\eta_C$ будет записываться как $\eta_C(x, y)$ для объектов x и y, а индекс у η_C будет опускаться всегда когда это возможно.*

Примечание 7.4. *Так как функтор $P : M \to \mathsf{Set}$ унивалентен, то коммутативность диаграммы*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\delta"'] & b \arrow[d, "\beta"] \\ d \arrow[r, "\gamma"'] & c \end{tikzcd}$$

эквивалентна коммутативности ее образа по P:

$$\begin{tikzcd} aP \arrow[r, "\alpha P"] \arrow[d, "\delta P"'] & bP \arrow[d, "\beta P"] \\ dP \arrow[r, "\gamma P"'] & cP \end{tikzcd}$$

Если образ диаграммы коммутативен, то будем говорить, что коммутативность самой диаграммы доказывается ее проецированием (или проектированием) по P.

Определение 7.2. *Для $f : \alpha \to \beta$ обозначим*

$$(\cdot\, f)_x = (\mathbf{1}_x, f)\,\eta : \eta(x, \alpha) \to \eta(x, \beta),$$

а также,

$$(f\,\cdot)^x = (f, \mathbf{1}_x)\,\eta : \eta(\beta, x) \to \eta(\alpha, x).$$

Обозначения объясняются тем, что в случае основного функтора, аналогичным образом построенные морфизмы (отображения множеств), действительно являются левым и правым умножением на морфизм f. Ввиду этого морфизмы вида $(\cdot\, f)_x$ и $(f\,\cdot)^x$ будут называться морфизмами правого и левого умножения соответственно.

Примечание 7.5. *Индексы у $(\cdot\, f)_x$ и $(f\,\cdot)^x$ будут опускаться всегда когда их можно восстановить по контексту, в частности, в диаграммах.*

Таким образом, факт коммутивности диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\eta(x, y) \arrow[r, "(\cdot\, f)_x"] \arrow[d, "(g\,\cdot)^y"'] & \eta(x, y') \arrow[d, "(g\,\cdot)^{y'}"] \\
\eta(x', y) \arrow[r, "(\cdot\, f)_{x'}"'] & \eta(x', y')
\end{tikzcd}$$

будет записываться соотношением $(\cdot\, f)(g\,\cdot) = (g\,\cdot)(\cdot\, f)$.

Утверждение 7.1. *$(\cdot\, f)(g\,\cdot) = (g\,\cdot)(\cdot\, f)$, $(\cdot\, f)(\cdot\, g) = (\cdot\, fg)$ и $(f\,\cdot)(g\,\cdot) = (gf\,\cdot)$.*

Доказательство.

Напрямую следует из определения. ∎

Определение 7.3. *Для $\eta : C^* \to \mathsf{Funct}(C, M)$, и $x \in \mathsf{Ob}\, C$ обозначим через $\eta^x = x\,\eta : C \to M$. Двойственно, рассматривая $\eta' : C \to \mathsf{Funct}(C^*, M)$, обозначим через $\eta_x = x\,\eta' : C^* \to M$.*

Имеем, $y\,\eta^x = \eta(x,y)$, $f\,\eta^x = (\cdot\, f)$. Более того, для $f : \alpha \to \beta$, $f\,\eta : \eta^\beta \to \eta^\alpha$ — естественное преобразование, причем $(f\,\eta)_x = (f\,\cdot)^x : \eta(\beta, x) \to \eta(\alpha, x)$. Допуская вольность речи, $f\,\eta$ будет обозначаться как $(f\,\cdot)$ там где это не вызывает недоразумений.

В η-категории (C, η_C), $\eta(x,y)$ естественно интерпретируется как совокупность морфизмов из x в y, рассматриваемая как объект категории M, при этом требуется, чтобы левое и правое умножение на фиксированный морфизм „поднималось“ до морфизма категории C.

7.1.3 Примеры

Пример 7.1. *$M = \mathsf{Set}$, $P = \mathbf{1}_{\mathsf{Set}} : \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$. Это „классический“ случай. Имеем $\eta_C = h_C$. Все вводимые далее определения и конструкции должны в этом случае переходить в свои стандартные аналоги.*

Пример 7.2. *$M = \mathsf{Set}_n$ — категория непустых множеств и их отображений $P : \mathsf{Set}_n \to \mathsf{Set}$ — функтор вложения. В этом случае η-категории суть связные категории.*

Пример 7.3. *$M = \mathsf{Set}_p$ — категория множеств с отмеченной точкой и отображений, переводящих отмеченную точку в отмеченную точку. $P : \mathsf{Set}_p \to \mathsf{Set}$ — функтор вложения. В этом случае η-категории суть категории с нулевыми морфизмами.*

Пример 7.4. *$M = \mathsf{POrdSet}$ — категория частично упорядоченных множеств, и монотонных отображений. $P : \mathsf{POrdSet} \to \mathsf{Set}$ — функтор вложения. В этом случае η-категории суть O-категории ([17] стр. 441).*

Пример 7.5. *$M = \mathsf{AGrp}$ — категория абелевых групп, и гомоморфизмов. $P : \mathsf{AGrp} \to \mathsf{Set}$ — пренебрегающий функтор. В этом случае η-категории суть предаддитивные категории.*

7.2 Категории функторов

Введем дополнительное условие на категорию M:

$$\text{категория } M \text{ полна и функтор } P \text{ сохраняет пределы} \qquad (H2)$$

Примечание 7.6. *Здесь требуется несколько более сильное определение предела, чем обычно, а именно, имеются в виду и пределы функторов из больших категорий. Действительно, в дальнейших построениях, для произвольной категории C будут рассмотриваться пределы из $\mathsf{Ar}\, C$, рассматриваемой как дискретная категория.*

Первый очевидный способ разрешения этой проблемы — ограничиться в дальнейшем рассмотрением только малых категорий, что однако, видимо исключит из рассмотрения большинство содержательных примеров.

Второй подход, стандартный при изучении больших категорий, состоит в определении „универсума Гротендика“. Излишняя педантичность в этом вопросе, однако, не требуется, так как изложение в любом случае не является полностью формальным.

Примечание 7.7. *При выполнении условия $H2$, η-функтор сохраняет пределы (т.е. копределы по первому аргументу и пределы по второму). Действительно, пусть дан функтор $F : D \to C^* \times C$, тогда*

$$(\mathsf{lim}\, F\, \eta)P = \mathsf{lim}(F\, \eta\, P) = \mathsf{lim}(Fh) = (\mathsf{lim}\, F)h = (\mathsf{lim}\, F)\, \eta\, P$$

А так как P — унивалентен, то

$$(\mathsf{lim}\, F\, \eta) = (\mathsf{lim}\, F)\, \eta$$

Теорема 7.2. *При выполнении условий $H1$ и $H2$, для η-категории C_2, категорию $\mathsf{Funct}(C_1, C_2)$ для произвольной категории C_1 можно снабдить структурой η-категории.*

Доказательство.

Утверждение теоремы будет доказано прямым построением функтора

$$\eta_{\mathsf{Funct}(C_1,C_2)} = \eta\,\mathsf{Nat}(C_1,C_2) : \mathsf{Funct}(C_1,C_2)^* \times \mathsf{Funct}(C_1,C_2) \to M.$$

Имеем: $\eta_{C_2} : C_2^* \times C_2 \to M$.

Зафиксируем функтор $F : C_1 \to C_2$ и займемся определением функтора $\eta^F : \mathsf{Funct}(C_1,C_2) \to M$. Для произвольного $G : C_1 \to C_2$, обозначим (см. диаграмму)

$$\Omega_G^F = \Omega_G = \prod_{t \in \mathsf{Ob}\, C_1} \eta_{C_2}(tF, tG)$$

с проекциями $\pi_x : \Omega_G \to \eta_{C_2}(xF, xG)$. Для всякого $f : x \to y$ из C_1, рассмотрим $\varphi_f = \pi_x(\cdot\, fG)$ и $\psi_f = \pi_y(fF\,\cdot)$, $\varphi_f, \psi_f : \Omega_G \to \eta_{C_2}(xF, yG)$. Пусть $\tau_f = \mathsf{ker}(\varphi_f, \psi_f) : T_f \rightarrowtail \Omega_G$.

Таким образом имеем коконус $(\tau_f : T_f \rightarrowtail \Omega_G)$, рассмотрим его универсальный конус, обозначив его вершину $\eta\,\mathsf{Nat}(F,G)$:

$$(j_f : \eta\,\mathsf{Nat}(F,G) \rightarrowtail T_f) = \mathsf{coun}(\tau_f)$$

j_f являются мономорфизмами, так как все τ_f — мономорфизмы. Имеем: $j_f\tau_f = j_g\tau_g : \eta\,\mathsf{Nat}(F,G) \rightarrowtail \Omega_G$.

$$\begin{tikzcd}
\eta\,\mathsf{Nat}(F,G) \arrow[dd, tail, "j"'] \arrow[dr, "j_f"] & \\
& T_f \arrow[dl, "\tau_f"] \\
\Omega_G \arrow[d, shift right, "\pi_x(\cdot\, fG)"'] \arrow[d, shift left, "\pi_y(fF\,\cdot)"] & \\
\eta_{C_2}(xF, yG) &
\end{tikzcd}$$

Примем $G\,\eta^F = \eta\,\mathsf{Nat}(F,G)$.

Пусть $\lambda : G \to G'$ (см. диаграмму), тогда $\lambda_y : yG \to yG'$, $(\cdot\,\lambda_y) : \eta_{C_2}(xF,yG) \to \eta_{C_2}(xF,yG')$ и

$$\xi = \prod_t(\cdot\,\lambda_t) = (\underset{t}{\times})(\pi_t(\cdot\,\lambda_t)) : \Omega_G \to \Omega_{G'}.$$

Имеем: $\xi\pi'_x = \pi_x(\cdot\,\lambda_x)$ и

$$\xi\pi'_x(\cdot\,fG') = \pi_x(\cdot\,\lambda_x)(\cdot\,fG') = \pi_x(\cdot\,\lambda_x fG') = \pi_x(\cdot\,fG\lambda_y) = \pi_x(\cdot\,fG)(\cdot\,\lambda_y)$$

так как λ — естественное преобразование,

$$\xi\pi'_y(fF\,\cdot) = \pi_y(\cdot\,\lambda_y)(fF\,\cdot) = \pi_y(fF\,\cdot)(\cdot\,\lambda_y).$$

Рассмотрим морфизмы вида $\tau_f\xi : T_f \to \Omega_{G'}$.

$$\tau_f\xi\pi'_x(\cdot\,fG') = \tau_f\pi_x(\cdot\,fG)(\cdot\,\lambda_y) = \tau_f\pi_y(fF\,\cdot)(\cdot\,\lambda_y) = \tau_f\xi\pi'_y(fF\,\cdot),$$

т.е. все они уравнивают $\pi'_x(\cdot\,fG')$ и $\pi'_y(fF\,\cdot)$ и, следовательно, пропускаются через $\tau'_f : T'_f \to \Omega'_G$. Таким образом, существуют (единственные)$\mu_f : T_f \to T'_f$, такие что $\tau_f\xi = \mu_f\tau'_f$.

Рассмотрим конус $(j_f\mu_f : \eta\,\mathsf{Nat}(F,G) \to T'_f)$.

$$j_f\mu_f\tau'_f = j_f\tau_f\xi = j\xi = j_g\tau_g\xi = j_g\mu_g\tau'_g,$$

следовательно, должен существовать единственный $\Lambda : \eta\,\mathsf{Nat}(F,G) \to \eta\,\mathsf{Nat}(F,G')$, такой что $j_f\mu_f = \Lambda j'_f : \eta\,\mathsf{Nat}(F,G) \to T'_f$.

$$\begin{tikzcd}
\eta\,\mathsf{Nat}(F,G) \arrow[r, "\Lambda"] \arrow[d, tail, "j_f"] & \eta\,\mathsf{Nat}(F,G') \arrow[d, tail, "j'_f"] \\
T_f \arrow[r, "\mu_f"] \arrow[d, tail, "\tau_f"] & T'_f \arrow[d, tail, "\tau'_f"] \\
\Omega_G \arrow[r, "\xi = \prod_t(\cdot\,\lambda_t)"'] \arrow[d, shift right, "\pi_x(\cdot\, fG)"'] \arrow[d, shift left, "\pi_y(fF\,\cdot)"] & \Omega_{G'} \arrow[d, shift right, "\pi'_x(\cdot\, fG')"'] \arrow[d, shift left, "\pi'_y(fF\,\cdot)"] \\
\eta_{C_2}(xF,yG) \arrow[r, "(\cdot\,\lambda_y)"'] & \eta_{C_2}(xF,yG')
\end{tikzcd}$$

Положим $\lambda\,\eta^F = \Lambda : G\,\eta^F \to G'\,\eta^F$.

Докажем, что η^F действительно функтор.

- Если $\alpha : G \to G'$, то $\alpha\,\eta^F : G\,\eta^F \to G'\,\eta^F$ по построению,
- прямой проверкой доказывается что $\mathbf{1}_G\,\eta^F = \mathbf{1}_{G\,\eta^F}$:

$$(\mathbf{1}_G)_x = \mathbf{1}_{xG} : xG \to xG$$

$$(\cdot\,\mathbf{1}_{xG}) = \mathbf{1}_{\eta_{C_2}(xF,xG)} : \eta_{C_2}(xF,xG) \to \eta_{C_2}(xF,xG)$$

$$\prod_t(\cdot\,\mathbf{1}_{tG}) = \mathbf{1}_{\Omega_G} : \Omega_G \to \Omega_G$$

$$\mu_f = \mathbf{1}_{T_f} : T_f \to T_f$$

$$\Lambda = \mathbf{1}_{\eta\,\mathsf{Nat}(F,G)} : \eta\,\mathsf{Nat}(F,G) \to \eta\,\mathsf{Nat}(F,G)$$

- Тот факт, что для $\lambda : G \to G'$ и $\xi : G' \to G''$ $(\lambda\xi)\,\eta^F = (\lambda\,\eta^F)(\xi\,\eta^F)$, доказывается несложным диаграммным поиском по

$$\begin{tikzcd}
\eta\,\mathsf{Nat}(F,G) \arrow[r, "\lambda\,\eta^F"] \arrow[d, tail, "j_f"] & \eta\,\mathsf{Nat}(F,G') \arrow[r, "\xi\,\eta^F"] \arrow[d, tail, "j'_f"] & \eta\,\mathsf{Nat}(F,G'') \arrow[d, tail, "j''_f"] \\
T_f \arrow[r, "\mu_f"] \arrow[d, tail, "\tau_f"] & T'_f \arrow[r, "\mu'_f"] \arrow[d, tail, "\tau'_f"] & T''_f \arrow[d, tail, "\tau''_f"] \\
\Omega_G \arrow[r, "\prod\limits_t(\cdot\,\lambda_t)"'] \arrow[d, shift right, "\pi_x(\cdot\,fG)"'] \arrow[d, shift left, "\pi_y(fF\,\cdot)"] & \Omega_{G'} \arrow[r, "\prod\limits_t(\cdot\,\xi_t)"'] \arrow[d, shift right, "\pi'_x(\cdot\,fG')"'] \arrow[d, shift left, "\pi'_y(fF\,\cdot)"] & \Omega_{G''} \arrow[d, shift right, "\pi''_x(\cdot\,fG'')"'] \arrow[d, shift left, "\pi''_y(fF\,\cdot)"] \\
\eta_{C_2}(xF,yG) \arrow[r, "(\cdot\,\lambda_y)"'] & \eta_{C_2}(xF,yG') \arrow[r, "(\cdot\,\xi_y)"'] & \eta_{C_2}(xF,yG'')
\end{tikzcd}$$

с учетом того, что

$$\prod_t(\cdot\,\lambda_t\xi_t) = \prod_t(\cdot\,\lambda_t)(\cdot\,\xi_t) = \prod_t(\cdot\,\lambda_t)\prod_t(\cdot\,\xi_t)$$

Таким образом, для каждого $F : C_1 \to C_2$, имеется функтор $\eta^F : \mathsf{Funct}(C_1,C_2) \to M$.

Теперь определим функтор $\eta : \mathsf{Funct}(C_1,C_2)^* \to \mathsf{Funct}(\mathsf{Funct}(C_1,C_2),M)$, такой что $F\,\eta = \eta^F$. Для естественного преобразования $\xi : T \to F$ преобразование $\xi\,\eta : \eta^F \to \eta^T$ строится „поточечно“, заданием для каждого $G : C_1 \to C_2$ $(\xi\,\eta)_G : \eta(F,G) \to \eta(T,G)$ при помощи построений, аналогичных предыдущим:

$$
\begin{tikzcd}
\eta\,\mathsf{Nat}(F,G) \arrow[r, "\Xi"] \arrow[d, tail, "j_f"] & \eta\,\mathsf{Nat}(T,G) \arrow[d, tail, "j'_f"] \\
T_f \arrow[r, "\nu_f"] \arrow[d, tail, "\tau_f"] & T'_f \arrow[d, tail, "\tau'_f"] \\
\Omega^F_G \arrow[r, "\prod\limits_t(\xi_t\,\cdot)"'] \arrow[d, shift right, "\pi_x(\cdot\, fG)"'] \arrow[d, shift left, "\pi_y(fF\,\cdot)"] & \Omega^T_G \arrow[d, shift right, "\pi'_x(\cdot\, fG)"'] \arrow[d, shift left, "\pi'_y(fT\,\cdot)"] \\
\eta_{C_2}(xF,yG) \arrow[r, "(\xi_y\,\cdot)"'] & \eta_{C_2}(xT,yG)
\end{tikzcd}
$$

Заметим, что так как $\xi : T \to F$, то $\xi_x : xT \to xF$ и $(\xi_x\,\cdot) : \eta_{C_2}(xF, yG) \to \eta_{C_2}(xT, yG)$. Повторяя рассуждения из начала доказательства, положим $(\xi\,\eta)_G = \Xi : \eta(F,G) \to \eta(T,G)$.

То что таким образом действительно определяется естественное преобразование проверяется диаграммным поиском по

$$
\begin{tikzcd}
& \eta(F,T) \arrow[rr, "\lambda\,\eta^F"] \arrow[dl, "(\xi\,\eta)_T"'] \arrow[dd, tail] & & \eta(F,T') \arrow[dl, "(\xi\,\eta)_{T'}"] \arrow[dd, tail] \\
\eta(G,T) \arrow[rr, "\lambda\,\eta^G"] \arrow[dd, tail] & & \eta(G,T') \arrow[dd, tail] & \\
& T_f^{FT} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd, tail] & & T_f^{FT'} \arrow[dl] \arrow[dd, tail] \\
T_f^{GT} \arrow[rr] \arrow[dd, tail] & & T_f^{GT'} \arrow[dd, tail] & \\
& \Omega_T^F \arrow[rr, "\prod_t(\cdot\,\lambda_t)"] \arrow[dl, "\prod_t(\xi_t\,\cdot)"'] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & \Omega_{T'}^F \arrow[dl, "\prod_t(\xi_t\,\cdot)"] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \\
\Omega_T^G \arrow[rr, "\prod_t(\cdot\,\lambda_t)"] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & \Omega_{T'}^G \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & \\
& \eta_{C_2}(xF,yT) \arrow[rr, "(\cdot\,\lambda_y)"] \arrow[dl, "(\xi_x\,\cdot)"'] & & \eta_{C_2}(xF,yT') \arrow[dl, "(\xi_x\,\cdot)"] \\
\eta_{C_2}(xG,yT) \arrow[rr, "(\cdot\,\lambda_y)"] & & \eta_{C_2}(xF,yT') &
\end{tikzcd}
$$

Действительно, коммутативность нижнего куба следует из предложения 7.1 и элементарных свойств произведения. Коммутативность среднего и верхнего куба проще всего доказать пользуясь тем, что их вертикальные ребра — мономорфизмы.

Доказательство того что η действительно функтор, проведем „поточечно“:

- то что для $\lambda : F \to G$ $\lambda\eta : F\,\eta = \eta^F \to G\,\eta = \eta^G$ непосредственно следует из построения.

- пусть $\mathbf{1}_F : F \to F$, то что для каждого $G : C_1 \to C_2$ $(\mathbf{1}_F\,\eta)_G = \mathbf{1}_{\eta(F,G)} : \eta(F,G) \to \eta(F,G)$ доказывается так же как и аналогичный факт для функтора η^F, следовательно, $\mathbf{1}_F\,\eta = \mathbf{1}_{F\,\eta}$
- если $\lambda : F \to G$ и $\xi : G \to T$, то как и в случае функтора η^F показывается, что для всякого $U : C_1 \to C_2$ $((\lambda\xi)\,\eta)_U = (\lambda\,\eta)_U(\xi\,\eta)_U$ то есть, $(\lambda\xi)\,\eta = (\lambda\,\eta)(\xi\,\eta)$.

Таким образом, мы имеем функтор

$$\eta : \mathsf{Funct}(C_1, C_2)^* \to \mathsf{Funct}(\mathsf{Funct}(C_1, C_2), M),$$

или, что то же самое $\eta : \mathsf{Funct}(C_1, C_2)^* \times \mathsf{Funct}(C_1, C_2) \to M$.

Рассмотрим теперь функтор $\eta\,P : \mathsf{Funct}(C_1, C_2)^* \times \mathsf{Funct}(C_1, C_2) \to \mathsf{Set}$. Так как P сохраняет пределы (и, в частности, произведения), то

$$\Omega^F_G P = \prod_{t \in \mathsf{Ob}\, C_1} \eta_{C_2}(tF, tG)P$$

Из $H1$ для C_2 отсюда следует что

$$\Omega^F_G P \cong \prod_{t \in \mathsf{Ob}\, C_1} \mathsf{Hom}_{C_2}(tF, tG)$$

Т.е. $\Omega^F_G P$ изоморфно классу отображений f из класса $\mathsf{Ob}\, C_1$ в класс $\mathsf{Ar}\, C_2$, таких что $xf : xF \to xG$ (оговоримся еще раз, что мы не обращаем внимания на возникающие при этом теоретико-множественные трудности).

Морфизмы $\varphi_f = \pi_x(\cdot\, fG)$ и $\psi_f = \pi_y(fF\,\cdot)$ для $f : x \to y$ переходят в отображения $\rho_x(\cdot\, fG)', \rho_y(fF\,\cdot)' : \Omega^F_G P \to \mathsf{Hom}_{C_2}(xF, yG)$, где $\rho_x : \Omega^F_G P \to \mathsf{Hom}_{C_2}(xF, xG)$ — проекция произведения множеств на сомножитель, а $(fF\,\cdot)'$ $(\cdot\, fG)'$ это $(fF, \mathbf{1}_{xG})h_{C_2}$ и $(\mathbf{1}_{xF}, fG)h_{C_2}$ соответственно.

Очевидно, что ядро отображений

$$\rho_x(\cdot\, fG)', \rho_y(fF\,\cdot)' : \Omega^F_G P \to \mathsf{Hom}_{C_2}(xF, yG),$$

это подмножество $T_f P \subseteq \Omega_G^F P$, состоящее из таких отображений ξ, что коммутативна диаграмма:

$$\begin{tikzcd} xF \arrow[r, "x\xi"] \arrow[d, "fF"'] & xG \arrow[d, "fG"] \\ yF \arrow[r, "y\xi"'] & yG \end{tikzcd}$$

Тогда $\eta(F,G)P$ есть расслоенное произведение $T_f P$ над $\Omega_G^F P$, т.е. пересечение подобъектов $T_f P$ и состоит из отображений ξ для которых все возможные диаграммы такого вида коммутативны, что дает в точности определение естественного преобразования.

Таким образом, для всяких $F, G : C_1 \to C_2$ имеется изоморфизм $i_{F,G} : \eta(F,G)P \cong \mathsf{Nat}(F,G)$. Естественность этого изоморфизма тривиальна, что дает нам

$$i : \eta\, P \cong h$$

■

Примечание 7.8. *Отметим, что нам не пришлось использовать условие $H1$ для категории C_1. Это является следствием того общего факта, что определение естественного преобразования между функторами из C_1 в C_2 никак не использует закон композиции в C_1. Действительно, мы можем даже расширить понятие естественного преобразования, определив его для* гомоморфизмов *из графа Γ в нижележащий граф категории C.*

На самом деле, также можно доказать и несколько другой результат:

Утверждение 7.3. *При выполнении условий $H1$ и $H2$, для η-категории C_2, категорию $\mathsf{Funct}(C_1, C_2)$ для произвольной категории C_1 можно снабдить структурой η-категории с обогащенным hom-фунтором* $\mathsf{enat} : \mathsf{Funct}(C_1, C_2)^* \times \mathsf{Funct}(C_1, C_2) \to \mathsf{Funct}(D, M)$, *где D — некоторая категория, зависящая только от C_1. При этом* $\mathsf{enat}\ \mathsf{Lim} = \eta\, \mathsf{Nat}$, *где*

$\mathsf{Lim} : \mathsf{Funct}(D, M) \to M$ есть фунтор предела (M полна по условию), а $\eta\,\mathsf{Nat}$ — функтор, построенный в предыдущем доказательстве.

Доказательство.

Возьмем $\mathsf{Ob}\,D = \mathsf{Ob}\,C_1 \amalg (\mathsf{Ob}\,C_1 \times \mathsf{Ob}\,C_1)$. Имеются следующие морфизмы:

$$r_{(x,y)} : x \to (x, y)$$

$$l_{(x,y)} : y \to (x, y)$$

и больше нетождественных морфизмов в D нет. Этими данными категорная структура определена полностью.

Для двух функторов $F, G : C_1 \to C_2$ определим функтор $\Lambda : D \to M$:

$$x\Lambda = \eta_{C_2}(xF, xG)$$

$$(x, y)\Lambda = \prod_{f:x\to y} \eta_{C_2}(xF, yG)$$

В частности, если $\mathsf{Hom}_{C_1}(x, y) = \emptyset$, то $(x, y)\Lambda = \top_M$

$$r_{(x,y)}\Lambda = \underset{f:x\to y}{(\times)} (\cdot\, fG)$$

$$l_{(x,y)}\Lambda = \underset{f:x\to y}{(\times)} (fF\, \cdot)$$

Если $\mathsf{Hom}_{C_1}(x, y) = \emptyset$, то $r_{(x,y)}\Lambda = !_x$ и $r_{(x,y)}\Lambda = !_y$.

$$\begin{tikzcd}
\eta_{C_2}(xF, xG) \arrow[dr, "\underset{f:x\to y}{(\times)} (\cdot\, fG)"] & \\
& \prod_{f:x\to y} \eta_{C_2}(xF, yG) \\
\eta_{C_2}(yF, yG) \arrow[ur, "\underset{f:x\to y}{(\times)} (fF\, \cdot)"'] &
\end{tikzcd}$$

Тем самым на объектах категории $\mathsf{Funct}(C_1, C_2)^* \times \mathsf{Funct}(C_1, C_2)$ определен функтор $\mathsf{enat} : \mathsf{Funct}(C_1, C_2)^* \times \mathsf{Funct}(C_1, C_2) \to \mathsf{Funct}(D, M)$: $(F, G) \longmapsto \Lambda$. Его действие на морфизмах $\xi : F' \to F$ и $\mu : G \to G'$ опеределяется очевидным образом, после чего для завершения доказательства достаточно прямой проверки, того что $\mathsf{Lim}\,\Lambda = \eta\,\mathsf{Nat}(F, G)$. ■

Утверждение 7.4. *Всякая полная подкатегория D η-категории C может быть снабжена структурой η-категории.*

Доказательство.

В качестве $\eta_D : D^* \times D \to M$ возьмем

$$(J \times J)\,\eta_C : D^* \times D \xrightarrow{J \times J} C^* \times C \xrightarrow{\eta_C} M$$

где $J : D \to C$ — функтор вложения. Для доказательства достаточно отметить, что $h_D = (J \times J)h_C$. ■

Утверждение 7.5. *Для η-категорий C и D произведение (как объектов в Cat) $C \times D$ также является η-категорией.*

Доказательство.

Так как $h_{C\times D} \cong (h_C \times h_D)$, то можно взять $\eta_{C\times D} = \eta_C \times \eta_D$. ■

7.3 Лемма Йонеды

Одним из фундаментальных результатов о функторах $F : C \to \mathsf{Set}$ является лемма Йонеда (см. лемму А.2, с. 109). Целью данного раздела является построение аналога этого результата для η-категорий.

Определение 7.4. *Для функтора $F : C_1 \to C_2$ построим функтор $F \times F : C_1^* \times C_1 \to C_2^* \times C_2$. Тогда $h_{C_1}, (F \times F)h_{C_2} : C_1^* \times C_1 \to \mathsf{Set}$ и можно определить естественное преобразование $f^F : h_{C_1} \to (F \times F)h_{C_2}$*

так что для любых $x, y \in \mathsf{Ob}\, C_1$ $f^F_{(x,y)} : \mathsf{Hom}_{C_1}(x, y) \to \mathsf{Hom}_{C_2}(xF, yF)$ и для всякого $\gamma : x \to y$ $\gamma f^F_{(x,y)} = \gamma F : xF \to yF$. Тот факт что это действительно естественное преобразование, т.е., что коммутативна диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{Hom}_{C_1}(x, y) \arrow[r, "f^F_{(x,y)}"] \arrow[d, "(\alpha\,\cdot)(\cdot\,\beta)"'] & \mathsf{Hom}_{C_2}(xF, yF) \arrow[d, "(\alpha\,\cdot)(\cdot\,\beta)"] \\
\mathsf{Hom}_{C_1}(x', y') \arrow[r, "f^F_{(x',y')}"'] & \mathsf{Hom}_{C_2}(x'F, y'F)
\end{tikzcd}
$$

для любых $\alpha : x' \to x$ и $\beta : y \to y'$ эквивалентен функторности F. (Заметим, что в этой диаграмме морфизмы правого и левого умножения в вертикальных ребрах взяты в разных категориях.)

Определение 7.5. *Функтор $F : C_1 \to C_2$ из η-категории C_1 в η-категорию C_2 назовем η-совместимым если существует естественное преобразование $\varphi^F : \eta_{C_1} \to (F \times F)\,\eta_{C_2}$ между функторами $\eta_{C_1}, (F \times F)\,\eta_{C_2} : C_1^* \times C_1 \to M$ такое что $\varphi^F P = f^F : h_{C_1} \to (F \times F)h_{C_2}$.*

Так как P унивалентен, то этим определением φ^F определяется однозначно (если оно существует).

Пример 7.6. *Обращаясь к доказательству теоремы 7.2 немедленно получаем, что все функторы $\mathsf{ev}_x : \mathsf{Funct}(C_1, C_2) \to C_2$, определенные соотношениями*

$$
\begin{aligned}
F\,\mathsf{ev}_x &= xF, &\qquad &\text{для } F : C_1 \to C_2,\\
\lambda\,\mathsf{ev}_x &= \lambda_x, &\qquad &\text{для } \lambda : F \to G,
\end{aligned}
$$

где C_2 — η-категория, являются η-совместимыми.

Заметим, что функтор $F : C_1 \to C_2$ тогда и только тогда унивалентен [полон], когда для всех $x, y \in \mathsf{Ob}\, C_1$ $f^F_{(x,y)}$ — мономорфизм [эпиморфизм] (инъекция [сюръекция]) или, что то же самое для категории с ядерными парами, каковой является Set, когда f^F — мономорфизм [эпиморфизм] категории $\mathsf{Funct}(C_1^* \times C_1, \mathsf{Set})$.

Так как P унивалентен, и, следовательно, отражает мономорфизмы и эпиморфизмы, то η-совместимый функтор $F : C_1 \to C_2$ унивалентен [полон] тогда и только тогда, когда для всех $x, y \in \mathsf{Ob}\, C_1$ $\varphi^F_{(x,y)}$ — мономорфизм [эпиморфизм] или, что то же самое при выполнении условия $H2$ [существовании коядерных пар в M], когда φ^F — мономорфизм [эпиморфизм] категории $\mathsf{Funct}(C_1^* \times C_1, M)$.

Определение 7.6. *η-категории и η-совместимые функторы образуют категорию $\eta\,\mathsf{Cat}$, снабженную забывающим функтором $P_\eta : \eta\,\mathsf{Cat} \to \mathsf{Cat}$.*

Это определение корректно, так как тождественный функтор η-совместим, и композиция двух η-совместимых функторов η-совместима.

Требуется доказать, что если $F : C \to M$ — η-допустимый функтор, то $\eta\,\mathsf{Nat}(\eta^x, F)$ изоморфно xF, как объект категории M. Для этого потребуем чтобы,

- категория M сама была снабжена η-функтором:

$$\eta_M : M^* \times M \to M \tag{$H3$}$$

- для каждого $x \in \mathsf{Ob}\, M$, функтор $\eta_M^x : M \to M$ сопряжен справа к функтору $(\cdot) \times x : M \to M$ умножения на x:

$$y((\cdot) \times x) = y \times x$$

  и для $f : y \to y'$

$$f((\cdot) \times x) = f \times \mathbf{1}_x$$

  т.е.

$$\text{категория } M \text{ является декартово замкнутой, с } \eta_M \text{ в качестве } hom\text{-функтора} \tag{$H4$}$$

- для всякой η-категории C и для всякого $x \in \mathsf{Ob}\, C$ существует

$$\epsilon_x : \top_M \to \eta_C(x,x), \qquad \text{такой что } \epsilon_x P : \top_{\mathsf{Set}} \to \mathsf{Hom}_C(x,x)$$

$$\text{— помечает единичный морфизм } \mathbf{1}_x : x \to x \qquad (H5)$$

- функтор P сохраняет экспоненциалы, точнее если $\lambda : \alpha \to \eta_M(\beta,\gamma)$ и $[\lambda] : \alpha \times \beta \to \gamma$ — пара экспоненциально присоединенных стрелок, то

$$\lambda P(f^P_{(\beta,\gamma)}) : \alpha P \xrightarrow{\lambda P} \mathsf{Hom}_M(\beta,\gamma) \xrightarrow{f^P_{(\beta,\gamma)}} \mathsf{Hom}_{\mathsf{Set}}(\beta P, \gamma P)$$

и

$$[\lambda]P : \alpha P \times \beta P \to \gamma P$$

— тоже экспоненциально присоединены. Для этого необходимо и достаточно, чтобы для для любых $x, t \in \mathsf{Ob}\, M$ выполнялось

$$\overline{\mathsf{ev}}^t_x P = [f^P] : \mathsf{Hom}_M(x,t) \times (xP) \to tP \qquad (H6)$$

где $\overline{\mathsf{ev}}^t_x : \eta_M(x,t) \times x \to t$ — коединица экспоненциального сопряжения, а $[f^P]$ — отображение, экспоненциально присоединенное (в категории Set) к отображению $f^P_{(x,t)} : \mathsf{Hom}_M(x,t) \to \mathsf{Hom}_{\mathsf{Set}}(xP, tP)$. Действительно, это эквивалентно тому, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hom}_M(x,t) \times (xP) \arrow[r, "\overline{\mathsf{ev}}^t_x P"] \arrow[d, "f^P_{(x,t)} \times \mathbf{1}_{xP}"'] & tP \\
\mathsf{Hom}_{\mathsf{Set}}(xP, tP) \times (xP) \arrow[ur, "\overline{\mathsf{ev}}^{tP}_{xP}"'] &
\end{tikzcd}$$

и стрелка экспоненциально присоединенная к $\lambda P f^P_{(\beta,\gamma)}$ есть

$$[\lambda P f^P_{(\beta,\gamma)}] : \alpha P \times \beta P \xrightarrow{(\lambda P(f^P_{(\beta,\gamma)}) \times \mathbf{1}_{\beta P})} \mathsf{Hom}_{\mathsf{Set}}(\beta P, \gamma P) \times (\beta P) \xrightarrow{\overline{\mathsf{ev}^{\gamma P}_{\beta P}}} \gamma P$$

то есть

$$\begin{tikzcd}
\alpha P \times \beta P \arrow[r, "(\lambda P \times \mathbf{1}_{\beta P})"] \arrow[d, "{[\lambda P f^P_{(\beta,\gamma)}]}"'] & \mathsf{Hom}_M(\beta,\gamma) \times (\beta P) \arrow[d, "(f^P_{(\beta,\gamma)} \times \mathbf{1}_{\beta P})"'] \\
\gamma P & \mathsf{Hom}_{\mathsf{Set}}(\beta P, \gamma P) \times (\beta P) \arrow[l, "\overline{\mathsf{ev}^{\gamma P}_{\beta P}}"']
\end{tikzcd}$$

то есть по $H6$, $[\lambda P f^P_{(\beta,\gamma)}] = (\lambda P \times \mathbf{1}_{\beta P})\overline{\mathsf{ev}^{\gamma}_{\beta}}P = \overline{\lambda}P$

Также будет использоваться известный факт (см, например, [17], стр. 446) о том что изоморфизм экспоненциального сопряжения

$$\theta_{(\alpha,\beta,\gamma)} : \mathsf{Hom}_M(\alpha, \eta_M(\beta,\gamma)) \cong \mathsf{Hom}_M(\alpha \times \beta, \gamma)$$

естественнен не только по α и γ, но и по β.

Теорема 7.6. (Лемма Йонеда). *Для всякого η-совместимого функтора $F : C \to M$ из η-категории C в категорию M, удовлетворяющую условиям $H1$–$H6$, существует изоморфизм $\Upsilon : \eta\,\mathsf{Nat}(\eta^x_C, F) \cong xF$*

Доказательство.

Итак, имеется следующая ситуация:

$$\begin{tikzcd}
\eta\,\mathsf{Nat}(\eta^x,F) \arrow[dd, tail, "j"'] \arrow[dr, "j_f"] & xF \\
& T_f \arrow[dl, "\tau_f"] \\
\Omega_F^{\eta^x} = \prod_i \eta_M(\eta_C(x,i),iF) \arrow[d, shift right, "\pi_t(\cdot fF)"'] \arrow[d, shift left, "\pi_u((\cdot f)\cdot)"] & \\
\eta_M(\eta_C(x,t),uF) &
\end{tikzcd}$$

для каждого $f : u \to t$. Тогда определен морфизм ξ:

$$\begin{tikzcd}
\eta\,\mathsf{Nat}(\eta^x,F) \arrow[rr, "(\mathbf{1}_{\eta\,\mathsf{Nat}(\eta^x,F)},\,!_{\eta\,\mathsf{Nat}(\eta^x,F)})"] \arrow[d, "\xi"'] & & \eta\,\mathsf{Nat}(\eta^x,F)\times\top_M \arrow[d, tail, "\mathbf{1}_{\eta\,\mathsf{Nat}(\eta^x,F)}\times\epsilon_x"'] \\
xF & & \eta\,\mathsf{Nat}(\eta^x,F)\times\eta_C(x,x) \arrow[ll, "{[j\pi_x]}"']
\end{tikzcd}$$

где $[j\pi_x]$ — морфизм экспоненциально присоединенный к морфизму

$$\eta\,\mathsf{Nat}(\eta^x,F) \xrightarrow{j} (\Omega_F^{\eta^x} = \prod_i \eta_M(\eta_C(x,i),iF)) \xrightarrow{\pi_x} \eta_M(\eta_C(x,x),xF)$$

Рассмотрим теперь для каждого $a \in \mathsf{Ob}\,C$ морфизм $[\mu_a] : (xF \times \eta_C(x,a)) \to aF$, экспоненциально присоединенный к морфизму $\varphi^F_{(x,a)} : \eta_C(x,a) \to \eta_M(xF,aF)$ (определенному так как по условию, F — η-совместимый функтор). Построим морфизм, экспоненциально присоединенный к $[\mu_a]$, по другому сомножителю: $\mu_a : xF \to \eta_M(\eta_C(x,a),aF)$.

Тогда $\mu = (\underset{a}{\times})\, \mu_a : xF \to \Omega_F^{\eta_C^x}$. Вычислим теперь для каждого $f : u \to t$ $\mu\pi_t((\cdot\, f)\,\cdot)$ и $\mu\pi_u(\cdot\, fF)$.

В силу упомянутой выше естественности изоморфизма экспоненциального сопряжения по второму аргументу, имеем: $[\mu\pi_t((\cdot\, f)\,\cdot)] = [\mu_t((\cdot\, f)\,\cdot)] = ((\cdot\, f) \times \mathbf{1}_{xF})[\mu_t] : \eta_C(x,u) \times (xF) \to tF$, а $[\mu\pi_u(\cdot\, fF)] = [\mu_u(\cdot\, fF)] = [\mu_u](fF) : \eta_C(x,u) \times (xF) \to tF$ в силу обычной естественности изоморфизма экспоненциального сопряжения. Рассмотрим теперь морфизм $\lambda = \varphi^F_{(x,u)}(\cdot\, fF) : \eta_C(x,u) \to \eta_M(xF, tF)$. Его экспоненциально присоединенная стрелка

$$[\lambda] = (\varphi^F_{(x,u)}(\cdot\, fF) \times \mathbf{1}_{xF})\overline{\mathsf{ev}}^{tF}_{xF} = ((\cdot\, f)\varphi^F_{(x,t)} \times \mathbf{1}_{xF})\overline{\mathsf{ev}}^{tF}_{xF} =$$
$$= ((\cdot\, f) \times \mathbf{1}_{xF})(\varphi^F_{(x,t)} \times \mathbf{1}_{xF})\overline{\mathsf{ev}}^{tF}_{xF} = ((\cdot\, f) \times \mathbf{1}_{xF})[\varphi^F_{(x,t)}] = [\mu\pi_t((\cdot\, f)\,\cdot)]$$

с дргой стороны, очевидно что

$$[\lambda] = [\varphi^F_{(x,u)}(\cdot\, fF)] = [\varphi^F_{(x,u)}](fF) = [\mu\pi_u(\cdot\, fF)]$$

Отсюда, $[\mu\pi_u(\cdot\, fF)] = [\mu\pi_t((\cdot\, f)\,\cdot)]$, а значит, и $\mu\pi_u(\cdot\, fF) = \mu\pi_t((\cdot\, f)\,\cdot)$.

Из построения $\eta\,\mathsf{Nat}(C, M)$ (см. теорему 7.2, с. 77) следует, что существует конус $(\xi_f : xF \to T_f)$, такой что $\mu = \xi_f\tau_f = \xi_g\tau_g$, следовательно, существует (единственный) морфизм $\lambda : xF \to \eta\,\mathsf{Nat}(\eta_C^x, F)$, такой что $\xi_f = \lambda j_f$.

Итак, имеются $\xi : \eta\,\mathsf{Nat}(\eta^x, F) \to xF$ и $\lambda : xF \to \eta\,\mathsf{Nat}(\eta_C^x, F)$. Рассмотрим их образы по P: $\xi P : \mathsf{Nat}(\eta^x, F) \to xFP$ и $\lambda P : xFP \to \mathsf{Nat}(\eta_C^x, F)$.

Имеем $\xi P : \mathsf{Nat}(\eta^x, F) \xrightarrow{(\mathbf{1}_{\mathsf{Nat}(\eta^x,F)},\,!\varepsilon_x)} \mathsf{Nat}(\eta^x, F) \times \mathsf{Hom}_C(x,x) \xrightarrow{[((j\pi_x)P)f^P]} xFP$
Где $[((j\pi_x)P)f^P]$ экспоненциально присоединен к $(j\pi_x)P : \mathsf{Nat}(\eta^x, F) \to \mathsf{Hom}_M(\eta_C(x,x), xF)$ (см. условие $H6$).

Обозначим

$$\omega_F^{\eta^x} = \Omega_F^{\eta^x} P = \prod_a \mathsf{Hom}_{\mathsf{Set}}(\eta_C(x,a), aF)$$

тогда

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Nat}(\eta^x, F) \arrow[r, "jP"] \arrow[d, "((j\pi_x)P)f^P"] & \omega_F^{\eta^x} \arrow[d, "\pi_x P"] \\
\mathsf{Hom}_{\mathsf{Set}}(\mathsf{Hom}_C(x,x), xFP) & \mathsf{Hom}_M(\eta_C(x,x), xF) \arrow[l, "f^P_{(\eta_C(x,x),xF)}"']
\end{tikzcd}$$

Учитывая, что jP это вложение, а $\pi_x P$ — проекция произведения множеств на сомножитель, а $\varepsilon_x : \top_{\mathsf{Set}} \to \mathsf{Hom}_C(x,x)$ отображает $\top_{\mathsf{Set}}$ в $\mathbf{1}_x$ (по условию $H5$) непосредственно получаем, что для всякого $o : \eta^x \to F$, $o\xi P = \mathbf{1}_x(oP)_x$, где $oP : h^x \to FP$.

Вспоминая построение $\lambda : xF \to \eta\,\mathsf{Nat}(\eta^x_C, F)$, рассмотрим $\mu_a P : xFP \to \mathsf{Hom}_M(\eta_C(x,a), aF)$. Морфизм $[\mu_a] : xF \times \eta_C(x,a) \to aF$, экспоненциально присоединен с морфизму $\varphi^F_{(x,a)} : \eta_C(x,a) \to \eta_M(xF, aF)$, поэтому по свойству $H6$, $[\mu_a]P : xFP \times \mathsf{Hom}_C(x,a) \to aFP$, будет экспоненциально присоединен к $(\varphi^F_{(x,a)}P)(f^P_{(xF,aF)}) : \mathsf{Hom}_C(x,a) \to \mathsf{Hom}_{\mathsf{Set}}(xFP, aFP)$, но $\varphi^F_{(x,a)}P = f^F_{(x,a)}$ по определению, поэтому $(\varphi^F_{(x,a)}P)(f^P_{(xF,aF)}) = f^F_{(x,a)}f^P_{(xF,aF)} = f^{FP}_{(x,a)}$. Отсюда получаем, что для $\alpha \in xFP$ и $\kappa : x \to a$, $(\alpha, \kappa)[\mu_a]P = \alpha(\kappa FP) \in aFP$.

К $[\mu_a]P$ экспоненциально присоединен

$$(\mu_a P)(f^P_{(x,a)}) : xFP \to \mathsf{Hom}_{\mathsf{Set}}(\mathsf{Hom}_C(x,a), aFP),$$

который, таким образом, сопоставляет каждому $\alpha \in xFP$, отображение $\omega_\alpha : \mathsf{Hom}_C(x,a) \to aFP$, действующее по правилу: для каждого $\varepsilon : x \to a$, $\varepsilon\omega_\alpha = \alpha(\varepsilon FP)$.

Таким образом,

$$(\underset{a}{\times})((\mu_a P)(f^P_{(x,a)})) = (\underset{a}{\times})(\mu_a P)(\prod_a f^P_{(x,a)}) = \mu P(\prod_a f^P_{(x,a)})$$

Рассмотрим теперь функтор $P : M \to \mathsf{Set}$, как морфизм категории Cat. Тогда можно построить функтор $(\cdot P) : \mathsf{Funct}(C, M) \to \mathsf{Funct}(C, \mathsf{Set})$ (назывемый в [22] „накрывающим“) и рассмотреть естественное преобразование $f^{(\cdot P)}$ и в частности, его компоненту $(f^{(\cdot P)})_{(\eta^x,F)} : \mathsf{Nat}(\eta^x, F) \to \mathsf{Nat}(h^x, FP)$.

Очевидно, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Nat}(\eta^x, F) \arrow[r, "jP"] \arrow[d, "f^{(\cdot P)}"'] & \Omega_F^{\eta^x} = \prod\limits_{\alpha} \mathsf{Hom}_M(\eta_C(x,\alpha), \alpha F) \arrow[d, "\prod\limits_{\gamma} f^P_{(x,\gamma)}"] \\
\mathsf{Nat}(h^x, FP) \arrow[r, "i"'] & \prod\limits_{\beta} \mathsf{Hom}_{\mathsf{Set}}(\mathsf{Hom}_C(x,\beta), \beta FP)
\end{tikzcd}$$

где i — вложение подмножества, является коммутативной (а на самом деле — декартовым квадратом). Таким образом,

$$(\lambda P)(jP)(\prod_{\gamma} f^P_{(x,\gamma)}) = (\mu P)(\prod_{\gamma} f^P_{(x,\gamma)}) = (\lambda P)(f^{(\cdot P)})i$$

Вспоминая доказательство обычной леммы Йонеда и конструкцию получаемого там изоморфизма $\varphi : xFP \cong \mathsf{Nat}(h^x, FP)$, (совпадающего с $(\mu P)(\prod\limits_a f^P_{(x,a)})$), а также учитывая, что $i : \mathsf{Nat}(h^x, FP) \to \prod\limits_{\beta} \mathsf{Hom}_{\mathsf{Set}}(\mathsf{Hom}_C(x,\beta), \beta FP)$ — вложение, имеем, очевидно $(\lambda P) f^{(\cdot P)} = \varphi$, а также $f^{(\cdot P)}\varphi^{-1} = \xi P$.

Так как P унивалентен, то и $(\cdot P)$ тоже унивалентен (доказывается прямой проверкой), а следовательно, каждая компонента $f^{(\cdot P)}$ — мономорфизм, а следовательно из предыдущих уравнений получаем что $(\xi P)(\lambda P) = \mathbf{1}_{\mathsf{Nat}(\eta^x,F)}$ и $(\lambda P)(\xi P) = \mathbf{1}_{xFP}$.

Так как P унивалентный функтор, то отсюда следует, что

$$\xi\lambda = \mathbf{1}_{\eta\,\mathsf{Nat}(\eta^x,F)}$$

и

$$\lambda\xi = \mathbf{1}_{xF}$$

Естественность этого изоморфизма по x, т.е. коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\eta(\eta^x, F) \arrow[r, "\xi_x"] \arrow[d, "((f\cdot)\cdot)"'] & xF \arrow[d, "fF"] \\
\eta(\eta^y, F) \arrow[r, "\xi_y"'] & yF
\end{tikzcd}$$

доказывается проектированием по P и следует из рассмотрения диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Nat}(\eta^x, F) \arrow[rr, "\xi_x P"] \arrow[dd, "((f\cdot)\cdot)"'] \arrow[dr, "f^{(\cdot P)}"] & & xFP \arrow[dd, "fFP"] \\
& \mathsf{Nat}(h^x, FP) \arrow[ur, "\varphi_x^{-1}"'] \arrow[dd, "((f\cdot)\cdot)"] & \\
\mathsf{Nat}(\eta^y, F) \arrow[rr, "\xi_y P"] \arrow[dr, "f^{(\cdot P)}"] & & yFP \\
& \mathsf{Nat}(h^y, FP) \arrow[ur, "\varphi_y^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Верхняя и нижняя грани коммутативны по построению ξ, правая грань — по обычной лемме Йонеда, левая — по определению $f^{(\cdot P)}$, а так как φ_y — изоморфизм, то и задняя грань — коммутативна. Что и требовалось доказать. ∎

Утверждение 7.7. *При выполнении для η-категории C условий $H1$,$H2$ и $H5$ для всякого $a \in \mathsf{Ob}\, C$ слой C/a есть η-категория.*

Доказательство.

Для произвольных $f : x \to a$ и $g : y \to a$ из C/a, рассмотрим пару параллельных морфизмов

$$\begin{tikzcd}
\eta_C(x,y) \arrow[rrr, "(\cdot\, g)"] \arrow[dr, "!_{\eta_C(x,y)}"'] & & & \eta_C(x,a) \\
& \top \arrow[r, "\epsilon_x"'] & \eta_C(x,x) \arrow[ur, "(\cdot\, f)"'] &
\end{tikzcd}$$

Определим

$$\eta_{C/a}(f,g) = \mathsf{Ker}((\cdot\, g), !\epsilon_x(\cdot\, f) : \eta_C(x,y) \to \eta_C(x,a))$$

Если $f' : x' \to a$ и $g' : y' \to a$, и даны морфизмы $\alpha : f' \to f$ и $\beta : g \to g'$ то имеем:

$$\begin{tikzcd}
\eta_{C/a}(f,g) \arrow[r, tail, "j"] \arrow[dd, dashed, "\eta_{C/a}(\alpha,\beta)"'] & \eta_C(x,y) \arrow[rrr, "(\cdot\, g)"] \arrow[dd, "(\alpha\,\cdot)(\cdot\,\beta)"'] \arrow[dr, "!_{\eta_C(x,y)}"'] & & & \eta_C(x,a) \\
& & \top \arrow[r, "\epsilon_x"'] & \eta_C(x,x) \arrow[ur, "(\cdot\, f)"'] & \\
\eta_{C/a}(f',g') \arrow[r, tail, "j'"] & \eta_C(x',y') \arrow[rrr, "(\cdot\, g')"] \arrow[dr, "!_{\eta_C(x',y')}"'] & & & \eta_C(x',a) \\
& & \top \arrow[r, "\epsilon_{x'}"'] & \eta_C(x',x') \arrow[ur, "(\cdot\, f')"'] &
\end{tikzcd}$$

Проектированием по P убеждаемся что $(\alpha\,\cdot)(\cdot\,\beta)(\cdot\, g') = (\alpha\,\cdot)(\cdot\,\beta)!\epsilon_{x'}(\cdot\, f')$ откуда по свойству ядра следует существование $\eta_{C/a}(\alpha,\beta) : \eta_{C/a}(f,g) \to \eta_{C/a}(f',g')$. Функторность очевидна, а свойство $H1$ проверяется проектированием по P. ■

Следствие 7.8. *При выполнении для η-категории C условий $H1$,$H2$ и $H5$ для всякого функтора $F : C' \to C$ категория $\mathsf{compat}\, F$ есть η-категория.*

Доказательство.

$\mathsf{compat}\, F$ есть полная подкатегория $\mathsf{Funct}(C', C)/F$, образованная объектами вида $\lambda : \Delta^x_{C'} \to F$. ■

Утверждение 7.9. *Если C есть η-категория, то ее скелет $\mathsf{skel}\, C$ также является η-категорией.*

Доказательство.

Если x и y изоморфны, то $\eta_C(x, \alpha) \cong \eta_C(y, \alpha)$ и $\eta_C(\beta, x) \cong \eta_C(\beta, y)$ для произвольных α и β. Тем самым мы может раз и навсегда зафиксировать конкретного представителя x_0 для каждого класса изоморфных объектов x и положить $\eta_{\mathsf{skel}\, C}(x, y) = \eta_C(x_0, y_0)$. ■

Следствие 7.10. *При выполнении для η-категории C условий $H1$,$H2$ и $H5$ для всякого объекта x категории $\mathsf{Sub}\, x$ и $\mathsf{Quo}\, x$ суть η-категории.*

Доказательство.

$\mathsf{Sub}\, x$ и $\mathsf{Quo}\, x$ суть скелеты полных подкатегорий категорий C/x и $C\backslash x$, образованных всеми мономорфизмами и эпиморфизмами соответственно. ■

Приведем без доказательства (впрочем, весьма прямолинейного) следующий факт:

Утверждение 7.11. *Категория $\eta\,\mathsf{Cat}$ полна и кополна и функтор $P_\eta : \eta\,\mathsf{Cat} \to \mathsf{Cat}$ задает пределы и копределы.*

Отсюда немедленно получаем

Утверждение 7.12. *Для η-категорий C_1, C_2 и C и η-совместимых функторов $F : C_1 \to C$ и $G : C_2 \to C$, комма-категория $(F \downarrow G)$ есть η-категория.*

Доказательство.

Как известно (см. [12]), комма-категория есть предел в Cat следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[dr, "F"'] & & C^{\to} \arrow[dl, "\mathsf{dom}"'] \arrow[dr, "\mathsf{cod}"] & & C_2 \arrow[dl, "G"] \\
& C & & C &
\end{tikzcd},$$

где $C^{\to}$ — категория стрелок для категории C, а $\mathsf{dom}, \mathsf{cod} : C^{\to} \to C$ — функторы, сопоставляющие морфизму его начало и конец. $C^{\to}$ можно отождествить с категорией $\mathsf{Funct}(T_2, C)$, где T_2 категория с двумя объектами 0 и 1 и одним нетривиальным морфизмом $t : 0 \to 1$. При этом $\mathsf{dom} = \mathsf{ev}_0 : \mathsf{Funct}(T_2, C) \to C$ и $\mathsf{cod} = \mathsf{ev}_1 : \mathsf{Funct}(T_2, C) \to C$. Как было отмечено в примере 7.6 на с. 88, ev_0 и ev_1 суть η-совместимые функторы, а F и G η-совместимы по условию. Таким образом, последняя диаграмма целиком лежит в категории $\eta\,\mathsf{Cat}$, а так как забывающий функтор P_η задает пределы, то $(F \downarrow G)$ есть η-категория. ∎

Заметим, что введенное определение η-категории не эквивалентно стандартным „относительным M-категориям“. Например, всякое естественное преобразование $\xi : F \to G$ между η-совместимыми функторами $F, G : C_1 \to C_2$ является η-совместимым в том смысле, что коммутативны все диаграммы

$$\begin{tikzcd}
& \eta_{C_1}(\alpha, \beta) \arrow[dl, "\varphi^F"'] \arrow[dr, "\varphi^G"] & \\
\eta_{C_2}(\alpha F, \beta F) \arrow[dr, "(\cdot\, \xi_\beta)"'] & & \eta_{C_2}(\alpha G, \beta G) \arrow[dl, "(\xi_\alpha\, \cdot)"] \\
& \eta_{C_2}(\alpha F, \beta G) &
\end{tikzcd}$$

что немедленно усматривается после проектирования этой диаграммы по P. В то же время, отнюдь не всякое естественное преобразование M-функторов между относительными M-категориями есть M-преобразование.

С другой стороны, очевидно, что всякая η-категория C, для которой выполняются условия $H1$, $H3$, $H4$ и $H5$, и все основные функторы $\eta^x : C \to M$ η-совместимы, есть относительная M-категория, если в качестве моноидальной структуры на M взять ее декартову структуру.

Действительно, так как $\eta^x : C \to M$ η-совместим, то существует естественное преобразование с компонентами $\varphi^{\eta^x} : \eta_C(p, q) \to \eta_M(\eta_C(a, p), \eta_C(a, q))$ и экспоненциально присоединенным к нему будет естественное преобразование с компонентами $m_x : \eta_C(a, p) \times \eta_C(p, q) \to \eta_C(a, q)$ то есть „композиция морфизмов“.

Приложение A

Основные понятия и конструкции теории категорий

...каждый из этих авторов использует свою терминологию, отличающуюся как от терминологии других авторов, так и от терминологии, принятой в этой книге.

П. Габриэль, М. Цисман „Категории частных и теория гомотопий“

В работах по теории категорий наблюдается значительная неоднородность в обозначениях и определениях, наше изложение терминологически базируется на [22].

A.1 Основные понятия

В удобном для наших целей виде категория может быть определена одним из следующих эквивалентных способов (см. напр., [22]).

Определение A.1. *Класс* объектов, *обозначаемый* $\mathsf{Ob}\, C$, *и класс* морфизмов, *обозначаемый* $\mathsf{Ar}\, C$, *таких, что:*

A1. *Для всякого морфизма* $f \in \mathsf{Ar}\, C$ *определены объекты* $\mathsf{dom}\, f$ *и* $\mathsf{cod}\, f$, *называемые* началом *и* концом *морфизма соответственно.*

Тот факт, что $\mathsf{dom}\, f = a$ *и* $\mathsf{cod}\, f = b$, *записывается в виде* $f : a \to b$ *или* $a \xrightarrow{f} b$.

A2. *Всякий раз, когда для двух морфизмов f и g $\mathsf{cod}\, f = \mathsf{dom}\, g$ определен морфизм, называемый* произведением *или* композицией *f и g, обозначаемый fg, такой что*

$$\mathsf{dom}\, fg = \mathsf{dom}\, f, \qquad \mathsf{cod}\, fg = \mathsf{cod}\, g,$$

т.е. если $f : a \to b$ и $g : b \to c$, то $fg : a \to c$. fg обозначается также gf, $g \circ f$, $g \cdot f$ и $f; g$.

A3. *Всякий раз, когда определена одна из сторон равенства*

$$f(gh) = (fg)h,$$

то другая сторона тоже определена и равна первой.

A4. *Для каждого объекта a определен его* единичный морфизм, *обозначаемый $\mathbf{1}_a$ или id_a, такой, что, $\mathbf{1}_a : a \to a$ и*

$$\mathbf{1}_a f = f, \qquad g\mathbf{1}_a = g$$

всегда, когда имеют смысл левые части этих равенств.

A5. *Для любых объектов a и b все морфизмы $f : a \to b$ образуют множество, обозначаемое $\mathsf{Hom}_C(a, b)$ или $\mathsf{Hom}(a, b)$, если очевидно или несущественно, о какой категории идет речь.*

Примечание А.1. *Заметим, что из этого определения следует*

$$\mathsf{Hom}(a, b) \cap \mathsf{Hom}(a', b') = \emptyset \qquad \textit{при} \qquad (a, b) \neq (a', b').$$

Определение А.2. *Класс морфизмов с частичной бинарной операцией умножения, удовлетворяющей следующим условиям:*

B1. *Для любых трех морфизмов α, β и γ из существования произведений $\alpha\beta$ и $\beta\gamma$ вытекает существование произведений $(\alpha\beta)\gamma$ и $\alpha(\beta\gamma)$ и равенство $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.*

B2. *Для любого морфизма α определены единичные морфизмы ε_1 и ε_2, для которых определены произведения $\varepsilon_1\alpha$ и $\alpha\varepsilon_2$. Морфизм ε называется единичным, если определено произведение $\varepsilon\varepsilon$ и $\varepsilon\varphi = \varphi$ и $\psi\varepsilon = \psi$ всякий раз, когда соответствующие произведения определены.*

B3. *Для всякой пары единичных морфизмов ε_1 и ε_2 совокупность морфизмов α, для которых определены произведения $\varepsilon_1\alpha$ и $\alpha\varepsilon_2$, составляет множество.*

Определение A.3. *Рассмотрим функциональное исчисление первого порядка с равенством и с*

- *двумя сортами переменных: O и A.*
- *тремя функциональными символами:*

$$\mathsf{dom} : A \to O$$

$$\mathsf{cod} : A \to O$$

$$\mathbf{1} : O \to A$$

- *одним символом отношения* comp *определенным для троек из $A \times A \times A$*
- *следующими аксиомами:*

$$\mathsf{dom}(\mathbf{1}(u)) = u \wedge \mathsf{cod}(\mathbf{1}(u)) = u$$

$$(\mathsf{cod}(f) = \mathsf{dom}(g)) \Rightarrow (\exists h)(\mathsf{comp}(f, g, h))$$

$$\mathsf{comp}(f, g, h) \Rightarrow (\mathsf{dom}(f) = \mathsf{dom}(h) \wedge \mathsf{cod}(g) = \mathsf{cod}(h) \wedge \mathsf{cod}(f) = \mathsf{dom}(g))$$

$$(\mathsf{comp}(f, g, h) \wedge \mathsf{comp}(f, g, h') \Rightarrow (h = h')$$

$$\mathsf{comp}(f, \mathbf{1}(\mathsf{cod}(f)), f) \wedge \mathsf{comp}(\mathbf{1}(\mathsf{dom}(f)), f, f)$$

$$(\mathsf{comp}(f, g, f') \wedge \mathsf{comp}(f', h, a_1) \wedge \mathsf{comp}(g, h, h') \wedge \mathsf{comp}(f, h', a_2)) \Rightarrow (a_1 = a_2)$$

Теоретико-множественная модель этого исчисления называется категорией. (А модель этого исчисления в категории C называется „внутренней C-категорией“.)

Определение А.4. *Каждой категории C можно сопоставить двойственную (или дуальную) категорию C^* или C^{op}: $\mathsf{Ob}\, C = \mathsf{Ob}\, C^*$, $\mathsf{Ar}\, C = \mathsf{Ar}\, C^*$, объекты и морфизмы C^* соответствующие объектам и морфизмам a,b,f ... из C будем обозначать a^*,b^*,f^* ...*

Если $f : a \to b$, то:

$$f^* : b^* \to a^*,$$
$$f^* g^* = (gf)^*,$$
$$\mathbf{1}_{a^*} = \mathbf{1}_a^*.$$

Определение А.5. (Принцип двойственности). *Если имеется некоторое утверждение [*высказывание, свойство, определение*] $R(C)$ относительно категории C, то двойственное к нему утверждение [*высказывание, свойство, определение*] $R^*(C)$ получается при интерпретации в C утверждения [*высказывания, свойства, определения*] $R(C^*)$.*

*Утверждение [*высказывание, свойство, определение*] называется самодвойственным, если $R(C)$ совпадает с $R^*(C)$.*

Принцип двойственности (вытекающий из самодвойственности определения категории) утверждает, что если утверждение $R(C)$ справедливо во всех категориях, то и $R^*(C)$ тоже.

В дальнейшем мы часто будем формулировать и доказывать только одно утверждение из двойственной пары.

Определение А.6. *Функтором (ковариантным функтором) F из категории C_1 в категорию C_2 называются такие одноименные отображения $F : \mathsf{Ob}\, C_1 \to \mathsf{Ob}\, C_2$ и $F : \mathsf{Ar}\, C_1 \to \mathsf{Ar}\, C_2$, что:*

$$\begin{aligned}(\forall f \in \mathsf{Ar}\, C_1, f : a \to b) \ &\Rightarrow \ (fF : aF \to bF),\\ (\forall x \in \mathsf{Ob}\, C_1) \Rightarrow \mathbf{1}_x F \ &= \ \mathbf{1}_{xF},\\ (fg)F \ &= \ (fF)(gF).\end{aligned}$$

Обозначение: $F : C_1 \to C_2$.

Определение A.7. *Контравариантным функтором (или* C_2*-предпучком) из категории* C_1 *в категорию* C_2 *называется функтор* $F : C_1^* \to C_2$.

Определение A.8. *Говорят что функтор* $F : C_1 \to C_2$ *сохраняет свойство „*P*“ если из того что объект или морфизм* x *категории* C_1 *обладает свойством „*P*“ следует что и его образ* xF *также обладает этим свойством.*

Говорят что функтор $F : C_1 \to C_2$ *отражает свойство „*P*“ если для любого объекта или морфизма* x *категории* C_1 *из того что его образ* xF *обладает свойством „*P*“ следует что сам он также обладает этим свойством.*

Понятие сохрнения и отражения свойств используют также и по отношению к более сложным конструкциям для которых можно разумным образом определить их „образ“ под действием функтора: конусам (см. определение A.31, с. 111), диаграммам и т.п.

Определение A.9. *Функтор* $F : C_1 \to C_2$ *называется унивалентным если для всякой пары неравных параллельных морфизмов* φ, ψ *их образы также неравны.*

Определение A.10. *Функтор* $F : C_1 \to C_2$ *называется полным если для любых объектов* a*,* b *и для любого морфизма* $\xi : aF \to bF$ *существует морфизм* $\tau : a \to b$*, такой что* $\tau F = \xi$

Утверждение A.1. *Всякий функтор сохраняет единичные морфизмы, эндоморфизмы, автоморфизмы, изоморфизмы.*

Всякий унивалентный функтор отражает мономорфизмы и эпиморфизмы.

Определение A.11. *Категория называется малой, если* $\mathsf{Ob}\, C$ *— множество.*

Примечание А.2. *Из малости категории следует что и* $\mathsf{Ar}\,C$ *тоже множество. Действительно,*

$$\mathsf{Ar}\,C = \bigcup_{\alpha,\beta\in\mathsf{Ob}\,C} \mathsf{Hom}_C(\alpha,\beta)$$

Но согласно нашему определению категории все $\mathsf{Hom}_C(\alpha,\beta)$ *множества, поэтому и их объединение будет множеством.*

Надо отметить что требование о „малости“ $\mathsf{Hom}_C(\alpha,\beta)$ *часто опускают из определения категории и тогда категории, которые ему удовлетворяют называют „локально малыми“, что, в свою очередь, противоречит терминологии [22], где локально малыми называют категории в которых для каждого объекта множеством является класс его подобъектов и факторообъектов.*

Определение А.12. *Каждой категории можно, очевидно, сопоставить граф (имеющий, возможно, классы вершин и ребер). Наоборот, каждому графу* Γ *можно сопоставить категорию* $P\Gamma$ *(категорию путей графа* Γ*) следующим образом:*

- *в качестве* $\mathsf{Ob}\,P\Gamma$ *возьмем множество вершин* Γ
- *в качестве* $\mathsf{Ar}\,P\Gamma$ *возьмем множество (конечных) путей в графе* Γ*, дополнив его для каждой вершины* x *формальным „пустым путем“* e_x *из* x *в* x
- *начало и конец морфизма это начало и конец пути соответственно*
- *тождественные морфизмы это пустые пути*
- *композиция задается конкатенацией путей*

Для графа Γ *и категории* C *диаграммой типа* Γ *в* C *называется гоморфизм* H *графа* Γ *в нижележащий граф категории* C*. Этот гомоморфизм очевидным образом распространяется до функтора* $H' : P\Gamma \to C$*. Диаграмма* H *называется коммутативной если* H' *переводит любую пару параллельных морфизмов* $\varphi,\psi : a \rightrightarrows b$ *в один морфизм* $h : aH \to bH$*.*

Если D и C — категории то под диаграммой типа D в C понимается диаграмма типа нижележащего графа категории D в C, сохраняющая единичные морфизмы.

Определение А.13. *Категория D называется подкатегорией категории C, если $\mathsf{Ob}\, D \subseteq \mathsf{Ob}\, C$, $\mathsf{Ar}\, D \subseteq \mathsf{Ar}\, C$, закон композиции и единичные морфизмы в C и D совпадают всегда, когда они определены одновременно.*

Определение А.14. *Подкатегория D категории C называется полной, если $\mathsf{Hom}_D(a, b) = \mathsf{Hom}_C(a, b)$ всегда, когда они определены одновременно.*

Определение А.15. *Всякой подкатегории D категории C соответствует функтор включения $J : D \to C$ $(J : D \hookrightarrow C)$, тождественный на объектах и морфизмах.*

Определение А.16. *Категория называется дискретной, если все ее морфизмы — единичные.*

Определение А.17. *Говорят, что морфизм $f : a \to b$ пропускается через морфизм $g : c \to b$, если существует морфизм $t : a \to c$, такой, что $f = tg$, т.е. диаграмма*

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "g"] & b \\ a \arrow[u, "t"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Определение А.18. *Всякому объекту a категории C можно сопоставить функтор $h^a : C \to \mathsf{Set}$, называемый основным (ковариантным) функтором, обозначаемый также $\mathsf{Hom}_C(a, -)$ или $C(a, -)$ и определенный соотношениями:*

- *если* $b \in \mathsf{Ob}\, C$, *то* $bh^a = \mathsf{Hom}_C(a, b)$;
- *если* $f : t \to u$, *то*

$$fh^a : (th^a = \mathsf{Hom}_C(a, t)) \to (uh^a = \mathsf{Hom}_C(a, u))$$

действует по правилу: если $\psi : a \to t$ *(т.е.* $\psi \in \mathsf{Hom}_C(a, t)$*), то* $\psi(fh^a) = \psi f : a \to u$ *(т.е.* $\psi(fh^a) = \psi f \in \mathsf{Hom}_C(a, u)$*).*

Определение А.19. *Двойственно всякому объекту* a *категории* C *можно сопоставить функтор* $h_a : C^* \to \mathsf{Set}$, *называемый основным контравариантным функтором, обозначаемый также* $\mathsf{Hom}_C(-, a)$ *или* $C(-, a)$ *и определенный соотношениями:*

- *если* $b \in \mathsf{Ob}\, C$, *то* $bh_a = \mathsf{Hom}_C(b, a)$;
- *если* $f : t \to u$, *то*

$$fh_a : (uh_a = \mathsf{Hom}_C(u, a)) \to (th_a = \mathsf{Hom}_C(t, a))$$

действует по правилу: если $\psi : u \to a$ *(т.е.* $\psi \in \mathsf{Hom}_C(u, a)$*), то* $\psi(fh_a) = f\psi : t \to a$ *(т.е.* $\psi(fh_a) = f\psi \in \mathsf{Hom}_C(t, a)$*).*

Определение А.20. *Если даны два функтора*

$$F : C_1 \to C_2,$$

$$G : C_2 \to C_3,$$

то можно определить функтор $FG : C_1 \to C_3$ *соотношениями:*

$$\text{для} \quad a \in \mathsf{Ob}\, C_1 : \quad a(FG) = (aF)G,$$

$$\text{для} \quad f \in \mathsf{Ar}\, C_1 : \quad f(FG) = (fF)G.$$

Определение А.21. *Таким образом, можно определить „очень большую“ категорию* Cat, *объектами которой являются категории (или, например, только малые категории), а морфизмами — функторы с определенным выше произведением и очевидными тождественными функторами (обозначаемыми* $\mathbf{1}_C$ *для категории* C*) в качестве единичных морфизмов.*

A.2 Естественные преобразования, пределы

Определение A.22. *Если заданы два функтора $F, G : C_1 \to C_2$, то будем говорить, что определено естественное (или натуральное) преобразование $r : F \to G$, если задано отображение $r : \mathsf{Ob}\, C_1 \to \mathsf{Ar}\, C_2$, такое, что $ar : aF \to aG$ и для всякого морфизма $f : a \to b$ коммутативна следующая диаграмма:*

$$\begin{array}{ccc} a & \qquad & aF & \xrightarrow{r_a} & aG \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & {\scriptstyle fF}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle fG} \\ b & & bF & \xrightarrow{r_b} & bG \end{array} \quad ,$$

где через r_a традиционно обозначено ar.

Определение A.23. *Класс всех естественных преобразований из функтора $F : C_1 \to C_2$ в функтор $G : C_1 \to C_2$ обозначается $\mathsf{Nat}(F, G)$. Если категория C_1 малая, то этот класс — множество.*

Определение A.24. *Если заданы два естественных преобразования $r : F \to G$, и $t : G \to H$ то определим их произведение $rt : F \to H$ соотношением: $(rt)_x = (r_x)(t_x)$.*

Определение A.25. *Таким образом, мы можем наделить класс всех функторов из C_1 в C_2 структурой категории, взяв естественные преобразования в качестве морфизмов с определенным выше произведением и очевидными единичными (тождественными) естественными преобразованиями. Эта категория обозначается $\mathsf{Funct}(C_1, C_2)$.*

Лемма A.2. (Йонеда). *Для любой малой категории C и произвольного $F \in \mathsf{Funct}(C, \mathsf{Set})$ множество $\mathsf{Nat}(h^a, F)$ естественно (по обеим переменным) изоморфно (см. определение A.49, с. 115) aF.*

Эта лемма содержит фактически два утверждения:

1. *для фиксированного* $F : C \to \mathsf{Set}$, *объекты* $\mathsf{Nat}(h^{(\cdot)}, F) : C \to \mathsf{Set}$ *и* $F : C \to \mathsf{Set}$ *категории* $\mathsf{Funct}(C, \mathsf{Set})$ *— изоморфны;*

2. *для фиксированного* $x \in \mathsf{Ob}\, C$, *объекты* $\mathsf{Nat}(h^x, (\cdot)) : \mathsf{Funct}(C, \mathsf{Set}) \to \mathsf{Set}$ *и* $\mathsf{ev}_x : \mathsf{Funct}(C, \mathsf{Set}) \to \mathsf{Set}$ *категории* $\mathsf{Funct}(\mathsf{Funct}(C, \mathsf{Set}), \mathsf{Set})$ *— изоморфны, где* $\mathsf{ev}_x : \mathsf{Funct}(C, \mathsf{Set}) \to \mathsf{Set}$ *— функтор значения в точке x, такой, что*

$$F\,\mathsf{ev}_x = xF \qquad \text{для } F : C \to \mathsf{Set}$$

и

$$r\,\mathsf{ev}_x = r_x \qquad \text{для } r : F \to G.$$

Определение А.26. *Функтор* $F : C \to \mathsf{Set}$ *называется представимым если существует такой* $x \in \mathsf{Ob}\, C$, *что существует* $i : h^x \cong F$.

Утверждение А.3. *Функтор* $F : C \to \mathsf{Set}$ *представим тогда и только тогда, когда*

$$(\exists x \in \mathsf{Ob}\, C)(\exists \alpha \in xF),$$

такие что

$$(\forall y \in \mathsf{Ob}\, C)(\forall \beta \in yF)(\exists! f : x \to y)(y = x(fF)).$$

Или, что эквивалентно, существует x, *свободный над* $\top_{\mathsf{Set}}$ *относительно* F.

Определение А.27. *Если заданы функторы* $F : A \to B$ *и* $G : B \to A$, *то мы можем построить два функтора* $H_1, H_2 : A^* \times B \to \mathsf{Set}$:

$$(a, t)H_1 = \mathsf{Hom}_A(a, tG),$$

$$(a, t)H_2 = \mathsf{Hom}_B(aF, t),$$

на морфизмах эти функторы определяются аналогично основным функторам. Будем говорить, что F *сопряжен слева к* G *(*G *сопряжен справа к* F*), если* H_1 *изоморфен* H_2 *как объект категории* $\mathsf{Funct}(A, B)$.

Определение A.28. *Для произвольного объекта* $a \in \mathsf{Ob}\, C_2$ *и произвольной категории* C_1 *определим постоянный функтор* $\Delta^a_{C_1} : C_1 \to C_2$ *соотношениями:* $b\Delta^a_{C_1} = a$, $f\Delta^a_{C_1} = \mathbf{1}_a$ *для любых* $b \in \mathsf{Ob}\, C_1$, $f \in \mathsf{Ar}\, C_1$.

Определение A.29. *Эквивалентны следующие определения:*

конусом (с вершиной t*), допустимым относительно функтора* $F : A \to B$*, называется*

- *естественное преобразование* $e : \Delta^t_A \to F$;
- *индексированный классом объектов категории* A *класс морфизмов категории* B *вида:* $e_x : t \to xF$*, таких, что для любого морфизма категории* A $f : x \to y$ $e_y = e_x(fF)$*, т.е. коммутативна диаграмма:*

$$\begin{tikzcd} & xF \arrow[dd, "fF"] \\ t \arrow[ur, "e_x"] \arrow[dr, "e_y"'] & \\ & yF \end{tikzcd}$$

Определение A.30. *Двойственно (т.е., например, как естественное преобразование* $e : F \to \Delta^t_A$*) определяется коконус (с вершиной* t*), допустимый относительно функтора* $F : A \to B$.

Определение A.31. *Эквивалентны следующие определения: конусом (в категории* A*) с вершиной* t *называется*

- *конус с вершиной* t*, допустимый относительно какого-либо функтора из произвольной дискретной категории в категорию* A;
- *класс морфизмов категории* A *вида* $e_i : t \to t_i$.

Определение A.32. *Двойственно (т.е., например, как класс морфизмов категории* A *вида* $e_i : t_i \to t$*) определяется коконус с вершиной* t.

Определение A.33. *Класс всех конусов, допустимых относительно функтора $F : A \to B$, обозначаемый $\mathsf{compat}\, F$, можно снабдить структурой категории одним из следующих эквивалентных способов:*

- *если $e_1, e_2 \in \mathsf{compat}\, F$, т.е. $e_1 : \Delta^a_A \to F$, $e_2 : \Delta^b_A \to F$, то морфизмом $f : e_1 \to e_2$ будем называть морфизм категории B $f : a \to b$, такой, что для всех $x \in \mathsf{Ob}\, A$ $xe_1 = f(xe_2)$;*
- *если $e_{1x} : t \to xF$, $e_{2x} : u \to xF$ — конусы из $\mathsf{compat}\, F$, то морфизмом $f : (e_{1x}) \to (e_{2x})$ будем называть морфизм категории B $f : t \to u$, такой, что $e_{1x} = fe_{2x}$.*

Определение A.34. *Двойственно можно снабдить структурой категории, класс всех коконусов, допустимых относительно функтора $F : A \to B$, обозначаемый $\mathsf{cocompat}\, F$.*

Определение A.35. *Для произвольного объекта $a \in \mathsf{Ob}\, C$ слой C/a над a определяется следующими эквивалентными способами:*

- *$C/a = \mathsf{compat}\, \Delta^a_{\top_{\mathsf{Cat}}}$;*
- *объекты C/a — это морфизмы $f : b \to a$ из C, морфизм из $f : b \to a$ в $g : c \to a$ — это морфизм категории C $t : b \to c$, такой, что $f = tg$, т.е. коммутативна следующая диаграмма:*

$$\begin{tikzcd} b \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, "f"'] & & c \arrow[dl, "g"] \\ & a & \end{tikzcd}$$

Определение A.36. *Двойственно определяется слой $C \backslash a$ под a.*

Определение A.37. *Конечным (финальным, терминальным) объектом (или правым нулем) категории C называется объект $\top$ (или $\top_C$, 0_R, 1), удовлетворяющий одному из следующих эквивалентных условий:*

- *для всякого* $a \in \mathsf{Ob}\, C$ $\mathsf{Card}(\mathsf{Hom}_C(a, 1)) = 1$*;*
- 1 *есть предел некоторого функтора* $F : \emptyset\,\mathsf{Discr} \to C$ *(см. определение A.39, с. 113).*

Определение A.38. *Двойственно определяется начальный (инициальный) объект (или левый нуль)* $\perp$ *(или* $\perp_C$, 0_L, 0*). Т.е., например, для всякого* $a \in \mathsf{Ob}\, C$ $\mathsf{Card}(\mathsf{Hom}_C(0, a)) = 1$.

Определение A.39. *Предел функтора* $F : A \to B$ *из малой категории* A *обозначается* $\mathsf{lim}\, F$ *и определяется следующими эквивалентными способами:*

- *конечный объект (если он существует) категории* $\mathsf{compat}\, F$*;*
- *объект категории* $\mathsf{compat}\, F$, *с вершиной* $\mathsf{Lim}\, F$, *такой, что функтор* $G : A \to \mathsf{Set}$, *сопоставляющий каждому объекту множество всех конусов* $\mathsf{compat}\, F$ *с вершиной в этом объекты, представим:* $i : h^{\mathsf{Lim}\, F} \cong G$*;*
- *объект категории* $\mathsf{compat}\, F$, *с вершиной* $\mathsf{Lim}\, F$ *такой что*
$$(\forall x \in \mathsf{Ob}\, A)(\mathsf{Nat}(\Delta_A^x, F) \cong \mathsf{Hom}_A(x, \mathsf{Lim}\, F));$$
- *конус* $e_x : t \to xF$ *с вершиной* t, *обозначаемой* $\mathsf{Lim}\, F$, *такой, что для всякого морфизма* $f : x \to y$ *из* A $e_y = e_x(fF)$, *и для всякого другого конуса* $d_x : u \to xF$, *обладающего этим же свойством существует единственный морфизм* $h : u \to t$ *из* B *(обозначаемый иногда* $d_x F$*), такой, что* $d_x = h e_x$.

Определение A.40. *Из определения* $\mathsf{Lim}\, F$, *где* $F : C_1 \to C_2$, *следует, что* $\mathsf{compat}\, F \cong \mathsf{compat}\, F / \mathsf{lim}\, F \cong C_2 / \mathsf{Lim}\, F$. *Тем самым определяется функтор* $\mathsf{act}\,(F) : \mathsf{compat}\, F \to C_2 / \mathsf{Lim}\, F$.

Определение A.41. *Двойственно, т.е. как начальный объект категории* $\mathsf{cocompat}\, F$ *определяется копредел функтора* F, *обозначаемый* $\mathsf{colim}\, F$ *(*$\mathsf{Colim}\, F$ *для вершины конуса), а также функтор* $\mathsf{coact}\,(F) :$ $\mathsf{cocompat}\, F \to C_2 \backslash \mathsf{Colim}\, F$.

Определение A.42. *Данному коконусу $e_i : t_i \to t$ в категории C сопоставим минимальную подкатегорию E категории C, включающую этот коконус, т.е. попросту дополним его единичными морфизмами объектов t_i и t. Очевидным образом строится функтор включения $J : E \to C$. Объекты $\mathsf{compat}\, J$ называются конусами, допустимыми относительно коконуса (e_i). $\lim J$ называется универсальным конусом (или расслоенным произведением) относительно коконуса (e_i) и обозначается $\mathsf{coun}\, e_i : t_i \to t$.*

Определение A.43. *Двойственно определяется $\mathsf{cocoun}\, e_i : t \to t_i$ — универсальный коконус (или расслоенное копроизведение) относительно конуса $e_i : t \to t_i$.*

Определение A.44. *Произведением семейства объектов $a_i \in OjbC$, $i \in I$ называется конус $(\pi_i : t \to a_i)$ (π_i называются проекциями), определяемый как предел функтора F включения минимальной (дискретной) подкатегории категории C, содержащей a_i.*

Вершина t этого конуса обозначается

$$\prod_{i \in I} a_i.$$

Морфизмы

$$\pi_i : \prod_{i \in I} a_i \to a_i$$

называются проекциями. Для всякого конуса $f = (f_i : u \to a_i)$ обозначим

$$\bigotimes_{i \in I} f_i = f\, \mathsf{act}(F) : u \to \prod_{i \in I} a_i,$$

так, что $f_i = ((\bigotimes_{i \in I} f_i)\pi_i$. Для конечных множеств I, будем писать $\bigotimes_{i \in I} f_i = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$.

Определение A.45. *Двойственно определяется копроизведение семейства объектов $a_i \in \mathsf{Ob}\, C$, $i \in I$, обозначаемое как*

$$j_i : a_i \to \coprod_{i \in I} a_i$$

(j_i называются вложениями). Для всякого коконуса $f = (f_i : a_i \to u)$ обозначим

$$\bigoplus_{i \in I} f_i = f\,\mathsf{coact}(F) : \coprod_{i \in I} a_i \to u,$$

так, что $f_i = j_i(\bigoplus_{i \in I} f_i)$. Для конечных множеств I, будем писать $\bigoplus_{i \in I} f_i = [f_1, f_2, \ldots, f_n]$.

А.3 Подобъекты и факторобъекты

Определение А.46. *Мономорфизмом называется морфизм $f : a \to b$ категории C, удовлетворяющий следующим эквивалентным условиям:*

- *для любых двух морфизмов $\varphi, \psi : t \to a$ категории C из $\varphi f = \psi f$ следует, что $\varphi = \psi$:*

$$t \overset{\varphi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}} a \xrightarrow{\quad f \quad} b,$$

- *для любого объекта $t \in \mathsf{Ob}\,C$ отображение множеств*

$$f h^t : \mathsf{Hom}_C(t, a) \to \mathsf{Hom}_C(t, b)$$

(см. определение А.18, с. 107) — инъективно.

Определение А.47. *Двойственно определяется эпиморфизм.*

Определение А.48. *Морфизм, являющийся одновременно мономорфизмом и эпиморфизмом называется биморфизмом.*

Определение А.49. *Изоморфизмом называется морфизм $f : a \to b$, такой, что существует морфизм $g : b \to a$, обозначаемый f^{-1}, такой, что*

$$fg = \mathbf{1}_a,$$
$$gf = \mathbf{1}_b.$$

Всякий изоморфизм является биморфизмом, но не наоборот.

Определение А.50. *Категории, в которых всякий биморфизм является изоморфизмом называются уравновешенными или сбалансированными.*

Определение А.51. *Категория называется группоидом, если все ее морфизмы — изоморфизмы.*

Определение А.52. *Для произвольного объекта a категории C рассмотрим $\mathsf{In}(a)$ — полную подкатегорию категории C/a, объектами которой являются все мономорфизмы. Подобъектом a называется любой класс изоморфных объектов $\mathsf{In}(a)$. Каждый элемент этого класса называется представителем подобъекта.*

Запись: представитель $j : t \to a$ ($j : t \rightarrowtail a$), подобъект, содержащий представителя j: $[j]$ ($j \in [j]$). Класс всех подобъектов объекта a обозначается $\mathsf{Sub}(a)$.

На $\mathsf{Sub}(a)$ можно ввести отношение предпорядка следующим образом: будем говорить, что $[j_1] \leq [j_2]$ тогда и только тогда, когда $\mathsf{Hom}_{\mathsf{In}(a)}(j_1, j_2) \neq \emptyset$; легко проверить, что это отношение определено корректно (т.е. не зависит от выбора представителя) и является рефлексивным, транзитивным и антисимметричным.

Определение А.53. *Мы будем в дальнейшем говорить, что некоторое свойство мономорфизма распространяется на подобъект, если его можно корректно определить для подобъектов, сказав, что подобъект обладает этим свойством, если им обладает (хотя бы один, и, значит, все) его представитель. Очевидно, что для того чтобы некоторое свойство распространялось на подобъект, необходимо и достаточно, чтобы оно сохранялось при домножении на изоморфизм слева.*

Определение А.54. *Двойственно определяется факторобъект, множество факторобъектов $\mathsf{Quo}(a)$, отношение порядка на множестве факторобъектов, распространимость свойств эпиморфизмов на факторобъекты.*

Определение A.55. *Пусть дан функтор $G : A \to B$, мономорфизм $\mu : u \to b$ из A назовем структурным относительно функтора G, если μG — мономорфизм и для всякого морфизма $\mu' : b' \to b$, для которого $\mu' G = a(\mu G)$ существует такой морфизм $\overline{a} : b' \to u$, что $\mu' = \overline{a}\mu$:*

$$
\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "\mu"] & b \\
b' \arrow[u, "\overline{a}"] \arrow[ur, "\mu'"] &
\end{tikzcd}
$$

Определение A.56. *Двойственно определяется структурный эпиморфизм.*

Примечание A.3. *Структурность распространяется на подобъекты и факторобъекты.*

Определение A.57. *Пусть дан функтор $P : C_1 \to C_2$. Объект $p \in \mathsf{Ob}\, A$ называется свободным над объектом $g \in \mathsf{Ob}\, B$ относительно функтора G, если существует такой морфизм $j : g \to p$, что любой морфизм $\alpha : g \to qP$, $q \in \mathsf{Ob}\, C_1$ представим в виде $\alpha = j(\overline{\alpha}P)$ для однозначно определенного морфизма $\overline{\alpha} : p \to q$:*

$$
\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[ddd, "P"] & p \arrow[r, "\overline{\alpha}"] & q \\
& pP \arrow[r, "\overline{\alpha}P"] & qP \\
& & \\
C_2 & g \arrow[uu, "j"] \arrow[uur, "\alpha"] &
\end{tikzcd}
$$

Определение A.58. *Для произвольного коконуса $M = f_i : b_i \to a$ построим класс пар морфизмов (φ, ψ), вида $\varphi, \psi : a \to c$ (а одинаково* *для всех морфизмов класса, c может меняться от пары к паре), обладающих тем свойством, что для всякого f_i из M $f_i\varphi = f_i\psi$. Обозначим этот класс $\mathsf{Eqp}(M)$.*

Напротив, если дан P — некоторый класс пар морфизмов, (φ, ψ), вида $\varphi, \psi : a \to c$ (a одинаково для всех морфизмов класса, c может меняться от пары к паре), то можно построить $\mathsf{Eq}(P) = f_i : b_i \to a$ — коконус всех морфизмов f_i, таких, что $f_i\varphi = f_i\psi$ для всех морфизмов из P.

Мономорфизм $f : b \to a$ называется регулярным, если выполняются следующие эквивалентные условия:

- *всякий $g \in \mathsf{Eq}(\mathsf{Eqp}(\{f\}))$ пропускается через f;*
- *для всякого $g : c \to a$, такого, что $g\varphi = g\psi$, всякий раз, когда $f\varphi = f\psi$, существует $h : c \to b$, такой, что $g = hf$:*

$$\begin{tikzcd}
 & b \arrow[r, "f"] & a \arrow[r, shift left, "\varphi"] \arrow[r, shift right, "\psi"'] & d \\
c \arrow[ur, "h"] \arrow[urr, "g"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Определение A.59. *Двойственно определяются $\mathsf{Coeq}(M)$, $\mathsf{Coeqp}(P)$ и регулярный эпиморфизм.*

Примечание A.4. *Регулярность распространяется на подобъекты и факторобъекты.*

Определение A.60. *Будем говорить, что морфизм θ диагонализируется морфизмом μ, и обозначать $\theta \downarrow \mu$, если для всяких g и f, таких, что $f\mu = \theta g$, существует морфизм γ, такой, что $f = \theta\gamma$ и $g = \gamma\mu$, т.е. всякий коммутативный квадрат с параллельными ребрами θ и μ*

разбивается на два коммутативных треугольника:

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "f"'] & b \arrow[d, "g"] \arrow[dl, "\gamma"'] \\
c \arrow[r, "\mu"'] & d
\end{tikzcd}
$$

Определение A.61. *Мономорфизм μ называется строгим, если для всякого эпиморфизма π, $\pi \downarrow \mu$. Класс всех строгих мономорфизмов категории C обозначается $\mathsf{Mon}_s\, C$.*

Определение A.62. *Двойственно определяется строгий эпиморфизм. Класс всех строгих эпиморфизмов категории C обозначается $\mathsf{Epi}_s\, C$.*

Примечание A.5. *Строгость распространяется на подобъекты и факторобъекты.*

A.4 Бикатегории

Определение A.63. *Если заданы A,B — классы морфизмов категории C, то будем обозначать AB класс всевозможных произведений (возможно пустой) морфизмов из A и B.*

Определение A.64. *Говорят, что категория C снабжена структурой бикатегории, если дана тройка: (C, E, M), где $E \subseteq \mathsf{Epi}\, C$ называется классом допустимых эпиморфизмов, $M \subseteq \mathsf{Mon}\, C$ называется классом допустимых мономорфизмов и выполняются следующие условия:*

- *всякий* $f : a \to b$ *из* C *представим в виде* $f = \pi\mu$, *где* $\pi \in E$ *и* $\mu \in M$:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & b \\ & c \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

- *для любого разложения* $f = \varphi\psi$, *такого, что* $\varphi \in E$ *и* $\psi \in M$, $\varphi = i\pi$, *где* i — *изоморфизм,*

- π *[*μ*] обозначается* $\mathsf{coim}\, f$ *[*$\mathsf{im}\, f$*] и называется кообразом* f *[образом* f*]. Соответствующий* $\mathsf{im}\, f$ *[*$\mathsf{coim}\, f$*] подобъект [факторобъект] обозначается* $\mathsf{Im}\, f$ *[*$\mathsf{Coim}\, f$*],*

- $\mathsf{Iso}\, C = E \cap M$

Стандартным является следующий результат (см., например, [22]).

Утверждение A.4. *Тройка* (C, E, M), *где* $E \subseteq \mathsf{Epi}\, C$, $M \subseteq \mathsf{Mon}\, C$, *является бикатегорией тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

- *всякий* $f : a \to b$ *из* C *разлагается в произведение* $f = \pi\mu$, *где* $\pi \in E$ *и* $\mu \in M$,

- *мономорфизм* ψ *принадлежит* M *тогда и только тогда, когда* $\pi \downarrow \psi$ *для любого* π *из* E,

- *эпиморфизм* φ *принадлежит* E *тогда и только тогда, когда* $\varphi \downarrow \mu$ *для любого* μ *из* M.

Из этого результата вытекает ряд важных для нас следствий.

Утверждение A.5. *В любой бикатегории каждый строгий мономорфизм [эпиморфизм] является допустимым.*

Утверждение А.6. *Категория C является бикатегорией тогда и только тогда, когда всякий морфизм разлагается в произведение строгого эпиморфизма и мономорфизма, т.е. когда* $\mathsf{Ar}\, C = (\mathsf{Epi}_s\, C)(\mathsf{Mon}\, C)$.

Утверждение А.7. *Если в категории любой морфизм разлагается в произведение регулярного эпиморфизма и мономорфизма, то регулярные эпиморфизмы совпадают со строгими и* $(C, \mathsf{Epi}_s\, C, \mathsf{Mon}\, C)$ *— бикатегория.*

Утверждение А.8. *Если категория C уравновешена (см. определение А.50, с. 116), то в ней существует не более одной бикатегорной структуры. Эта структура имеет вид* $(C, \mathsf{Epi}\, C, \mathsf{Mon}\, C)$, *причем* $\mathsf{Epi}\, C = \mathsf{Epi}_s\, C$ *и* $\mathsf{Mon}\, C = \mathsf{Mon}_s\, C$.

Приложение Б

Основные понятия и конструкции теории исчисления родов структур Бурбаки

Б.1 Основные факты

> Алфавит, грамматика, термы, соотношения, буквы, формативные конструкции (ппф), теоремы, аксиомы, схемы аксиом, константы, правила вывода, теории, сокращающие правила, дедуктивные критерии.

Теория родов структур (исчисление родов структур) было впервые изложено в [14] и является неотъемлемой частью развиваемого там подхода к формализации математических конструкций. Предлагаемое далее введение в эту область никоим образом не является полным и законченным и является лишь неформальной сводкой некоторых результатов из цитированного выше источника.

С неформальной точки зрения, исчисление родов структур это способ конструирования и описания классов однородных математических объектов (например, но не обязательно, таких как многообразия универсальных алгебр, различные топологические пространства и т.д.), „погружаемых“ в построенную ранее формальную теорию множеств, с краткого описания которой мы и начнем.

Так как [14] претендует на полное описание всех используемых математических конструкций, то построение формальной системы теории множеств начинается с введения таких базовых понятий как буква, алфавит и слово в алфавите. А именно, всякая бурбаковская система строится в алфавите содержащем символы

$$\neg, \quad \vee, \quad \tau, \quad \blacksquare, \quad \in, \quad =$$

а также из некоторого набора *букв*, возможно разного для разных систем.

В множестве всех слов над таким алфавитом выделяется подмножество, образуемое при помощи т.н. „формативных конструкций“ и описываемое следующей грамматикой:

$$\begin{array}{rcl} \texttt{<терм>} & ::= & \texttt{<буква>} | \tau_x \texttt{<соотношение>} \\ \texttt{<соотношение>} & ::= & \in \texttt{<терм><терм>} | \\ & & = \texttt{<терм><терм>} | \\ & & \neg \texttt{<соотношение>} | \\ & & \vee \texttt{<соотношение><соотношение>} \end{array}$$

Соотношения есть по сути правильно построенные формулы ([2]), а термы отождествляются с множествами.

Стандартным образом вводятся понятия аксиомы и схемы аксиом, а также доказательства (единственное правило вывода — modus ponens) и теоремы (доказуемыми считаются и соотношения, содержащие свободные переменные).

После этого вводится ряд „метаматематических“ конструкций из которых самыми важными являются сокращающие правила и дедуктивные критерии.

Сокращающие правила позволяют вводить новые обозначения, опираясь при этом на процедуру переписывания, которая позволяет, в принципе, „раскрыть“ применение сокращающих правил и свести слово к форме, удовлетворяющей вышеуказанной грамматике. Сокращающие правила делятся на две группы:

- безусловные — которые могут быть применены всегда, например, введение $\Rightarrow$ как сокращения для последовательности $\vee\neg$, а также $(A = B)$ как сокращения для $= AB$ относятся к этой группе

- сокращающие правила применимые только при условии, что некоторое соотношение является теоремой. Например, обозначение $\{x|R(x)\}$ имеет смысл если только соотношение R является „коллективизирующим“ по x (т.е. существует множество состоящее в точности из таких x, которые удовлетворяют R). Сокращающие правила такого рода соответствуют обычным математическим определениям.

Для формулировки сокращающих правил используется обозначение $(T|x)R$ для результата замены всех свободных вхождений буквы x в слово R на слово T.

Дедуктивный критерий, это утверждение о том, что некоторое соотношение является теоремой, если некоторые другие соотношения являются теоремами. Пример: если A теорема и $A \Rightarrow B$ теорема, то B теорема.

Центральная бурбаковская формальная система — теория множеств содержит следующие схемы аксиом:

- Схемы аксиом исчисления высказываний

Аксиома 1. (S1). $(A \vee A) \Rightarrow A$

Аксиома 2. (S2). $A \Rightarrow (A \vee B)$

Аксиома 3. (S3). $(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)$

Аксиома 4. (S4). $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((C \vee A) \Rightarrow (C \vee B))$

- Схема аксиом, описывающая поведение кванторов

Аксиома 5. (S5). $(T|x)A \Rightarrow (\exists x)A$

- Схемы аксиом эгалитарных теорий

Аксиома 6. (S6). $(T = U) \Rightarrow ((T|x)A \Leftrightarrow (U|x)A)$

Аксиома 7. (S7). $(\forall x)(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (\tau_x(A) = \tau_x(B))$

- Специфическая „аксиома отбора и объединения“, гарантирующая, в частности, существование объединения и пересечения множеств

Аксиома 8. (S8). *Пусть A — соотношение, x, y — различные буквы, X,Y — различные буквы, отличные от x и y и не встречающиеся в A. Тогда соотношение*

$$(\forall y)(\exists X)(\forall x)(A \Rightarrow (x \in X)) \Rightarrow (\forall Y)Coll_x((\exists y)(y \in Y \wedge A))$$

является аксиомой.

- Аксиомы собственно теории множеств

Аксиома 9. (A1 экстенсиональность).

$$(\forall x)(\forall y)((x \subset y) \wedge (y \subset x) \Rightarrow x = y)$$

Аксиома 10. (A2 пара). $(\forall x)(\forall y)(Coll_z(z = x \vee z = y))$

Аксиома 11. (A3 множество частей). $(\forall X)Coll_Y(Y \subset X)$

Аксиома 12. (A4 бесконечное множество).

$$(\exists X)(\mathsf{Card}(X) + 1 = \mathsf{Card}(X))$$

Аккуратно вводя соответствующие сокращающие правила можно, исходя из этой системы построить все стандартные математические конструкции (подмножество, отношение, функция, семейство, произведение множеств, кардиналы, натуральные числа и т.д.) и передоказать известные их свойства.

Б.2 Рода структур

Шкалы множеств, распространение отображений, типизация, соотношение типизации, переносимость, род структуры, объекты, морфизмы, канонические морфизмы.

Построение исчисления родов структур начинается с введения понятия „схемы конструкции“. Схема конструкции Γ_Σ это функтор Γ_Σ : $\mathsf{Set} \times \mathsf{Set} \times \cdots \times \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ полученный композицией в произвольном порядке нескольких функторов, полученных произведением функторов $\mathbf{1}_{\mathsf{Set}} : \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$, $\beta : \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$, $(\cdot) \times (\cdot) : \mathsf{Set} \times \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$, $\pi_i : \mathsf{Set} \times \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$, $i \in \{1, 2\}$ и $\Delta : \mathsf{Set} \to \mathsf{Set} \times \mathsf{Set}$. Здесь β это функтор, сопоставляющий множеству множество всех его подмножеств и очевидным образом действующий на функциях; $(\cdot) \times (\cdot)$ — функтор, сопоставляющий паре множеств их произведение, π_i — проекция, а Δ — диагональное вложение.

Например, следующие функторы (с очевидным действием на морфизмах) являются схемами конструкции:

$$\mathbf{1}_{\mathsf{Set}} : \qquad X \longmapsto X$$

$$\Delta : \qquad X \longmapsto X \times X$$

$$\beta : \qquad X \longmapsto \beta(X)$$

$$\Delta(\mathbf{1}_{\mathsf{Set}} \times \beta) : \qquad X \longmapsto X \times \beta(X)$$

$$\Delta(\mathbf{1}_{\mathsf{Set}} \times \Delta)\beta : \qquad X \longmapsto \beta(X \times X \times X)$$

$$\beta\beta : \qquad X \longmapsto \beta(\beta(X))$$

$$(\Delta \times \Delta) \cdots ((\cdot) \times (\cdot)) : (X, Y) \longmapsto X \times \beta(Y \times \beta(X \times Y))$$

Род структуры Σ задается фиксацией

1. числа $n > 0$ (числа основных базовых множеств)
2. m множеств $A_1,\ldots,A_m$, называемых вспомогательными базовыми множествами
3. схемы конструкции $\Gamma_\Sigma : \mathsf{Set}^{n+m} \to \mathsf{Set}$
4. соотношения $R(x_1, \ldots, x_n, s)$, называемого аксиомой рода структуры.

Объектом рода структуры Σ называется пара $((X_1, \ldots, X_n), \sigma)$ такая что

1. $\sigma \in (X_1, \ldots, X_n, A_1, \ldots, A_m)\Gamma_\Sigma$
2. $R(X_1, \ldots, X_n, \sigma)$

Множества X_1, $\ldots$, X_n называются исходными или основными базовыми множествами рода структуры, а σ — родовой константой.

При этом требуется, чтобы аксиома рода структуры была биекивно переносима, т.е. для всяких биекций $f_i : X_i \to Y_i$ $(i \in \{1, n\})$

$$R(X_1, \ldots, X_n, \sigma) \Leftrightarrow R(Y_1, \ldots, Y_n, \sigma((f_1, \ldots, f_n, \mathbf{1}_{A_1}, \ldots, \mathbf{1}_{A_m})\Gamma_\Sigma))$$

Примеры родов структур приведены в главе В. В оставшейся части этого раздела мы, для простоты изложения, ограничимся родами структур с одним основным базовым множеством (т.е., с $n = 1$).

Изоморфизмом между объектами (X, σ) и (Y, τ) называется биекция $f : X \to Y$, такая что $\tau = \sigma(f\Gamma_\Sigma)$.

Говорят, что род структуры Σ снабжен морфизмами M если

M1 для двух Σ-объектов (X, σ) и (Y, τ)

$$M((X, \sigma), (Y, \tau)) \subseteq \mathsf{Hom}_{\mathsf{Set}}(X, Y)$$

тот факт что $f \in M((X, \sigma), (Y, \tau))$ будет записываться $f : (X, \sigma) \to (Y, \tau)$ или, допуская вольность речи $f : X \to Y$

M2 если $f:(X,\sigma)\to(Y,\tau)$ и $g:(Y,\tau)\to(Z,\rho)$, то $fg:(X,\sigma)\to(Z,\rho)$

M3 биекция f множества X на X' тогда и только тогда изоморфизм, когда

$$f:(X,\sigma)\to(X',\sigma') \text{ и } f^{-1}:(X',\sigma')\to(X,\sigma)$$

Заметим сразу, что из **M3** и биективной переносимости аксиомы рода структуры немедленно вытекает, что тождественное отображение есть морфизм, а значит

Определение Б.1. *Роду структуры Σ с M-морфизмами можно сопоставить категорию, которую мы будем обозначать S_Σ и называть категорией рода структуры:*

- $\mathsf{Ob}\,(S_\Sigma)$ — *это класс всех объектов рода структуры* Σ
- $\mathsf{Hom}_{S_\Sigma}((X,\sigma),(Y,\tau)) = M((X,\sigma),(Y,\tau))$
- *единичные морфизмы совпадают с единичными морфизмами категории* Set
- *композиция задается композицией в* Set

Очевидно, что изоморфизмы построенной таким образом категории совпадают с определенными выше бурбаковскими изоморфизмами.

Данный род структуры можно снабдить морфизмами несколькими разными способами (кроме того, если $M_1(x,s,y,t)$ и $M_2(x,s,y,t)$ — морфизмы, то $M_1(x,s,y,t)\cap M_2(x,s,y,t)$ тоже задает морфизмы). Существует, однако, некоторый „канонический“ способ снабдить род структуры морфизмами: отображение $f:X\to Y$, является морфизмом из (X,σ) в (Y,τ) если и только

$$\sigma(f\Gamma_\Sigma)\subseteq\tau$$

(проверка того, что так действительно задаются морфизмы, т.е., что выполняются условия **M1**–**M3** — тривиальна). Таким морфизмы называются „естественными каноническими морфизмами“ или EKM-

морфизмами. Допуская вольность речи, мы будем называть род структуры, снабженный EKM-морфизмами, EKM родом или EKM категорией. Стоит отметить, что EKM-морфизмы на родах алгебраических структур (моноиды, группы, тела и т.д.) совпадают с обычными гомоморфизмами.

Определение Б.2. *Итак, мы каждому роду структуры Σ можно сопоставить категорию S_Σ. Всякая такая категория естественным образом снабжается забывающим функтором P или $P_\Sigma : S_\Sigma \to \mathsf{Set}^n$:*

$$((X_1, \ldots, X_n), \sigma)P = (X_1, \ldots, X_n) \tag{Б.1}$$

и для $\varphi : ((X_1, \ldots, X_n), \sigma) \to ((Y_1, \ldots, Y_n), \tau)$

$$\varphi P = \varphi \quad \text{как отображение множеств} \tag{Б.2}$$

Обозначим $(P_\Sigma)_i = P_\Sigma \pi_i : S_\Sigma \to \mathsf{Set}$ композициии P_Σ с естественными проекциями $\pi_i : \mathsf{Set}^n \to \mathsf{Set}$.

Примечание Б.1. *Построенный функтор P_Σ является, очевидно, унивалентным но, в общем случае, не вложением.*

Б.3 Особенности бурбаковскиой системы

„τ-оператор“ наделяет бурбаковские формализмы рядом нестандартных свойств: сильной аксиомой выбора и возможностью „привилегированного“ выбора одного объекта из нескольких.

В данном разделе мы попытается описать некоторые особенности формальных систем, излагаемых в [14], отличающие их от стандатрных изложений формальной теории множеств и функциональных исчислений первого порядка вообще.

Во-первых, если в бурбаковской формальной системе BI доказуемо соотношение $(\exists x)(R)$ то можно явно указать терм t, такой что теоремой будет соотношение $R(t)$. Действительно, $(\exists x)(R)$ по определению есть сокращение для $(\tau_x(R)|x)R$ и, следовательно, в качестве t можно взять $\tau_x(R)$. Как отмечается в [14] „τ-оператор“ обеспечивает „очень сильную форму аксиомы выбора“. В частности, в бурбаковских системах нет чистых доказательств существования: если доказано что существует x, удовлетворяющий соотношению $R(x)$, то этому соотношению будет, в частности, удовлетворять и терм $\tau_x(R)$. Вспоминая порождающую грамматику для термов, мы видим, что τ — это едиственный способ конструирования термов, отличных от букв, следовательно, если мы признаем хоть какие-нибудь термы „конструктивными“, то для любого доказательства существования можно предъявить конструктивное решение.

Определение Б.3. *Назовем формальную систему уравновешенной если она полна и непротиворечива. (Полнота и непротиворчивость понимаются относительно преобразования $A \mapsto (\neg A)$).*

Теорема Б.1. *В бурбаковской формальной системе BI со схемами аксиомам $S1$–$S8$ справедливо одно из следующих утверждений:*

- *все объекты равны, т.е., доказуема теорема*

$$(\forall x)(\forall y)(x = y)$$

- *BI неполна*

- *можно построить два терма p_1 и p_2, не содержащие букв, такие что $p_1 \neq p_2$ и*

$$\vdash \tau_x((x = p_1) \vee (x = p_2)) = p_2$$

Напомним, что интуитивный смысл терма $\tau_x(R)$ это какой-то x, удовлетворяющий соотношению R. Таким образом, смысл теоремы Б.1 в том, что если BI полна и нетривиальна, то поведение τ-оператора противоречит его декларируемому интуитивному смыслу. Более того, предстравляется вероятным что в этом случае BI оказывается противоречивой (хотя доказательство этого неизвестно), т.е. BI либо тривиальна, либо неуравновешена.

Доказательство.

Cn, Tn и Sn обознаяают дедуктивный критерий, теорему и аксиому номер n соответственно. Номера страниц даются по [14].

Допустим, что в BI

$$\vdash (\forall t_1)(\forall t_2)((t_1 \neq t_2) \Rightarrow (\tau_x((x = t_1) \vee (x = t_2)) = t_1)) \tag{Б.3}$$

Тогда то $C3$ (стр. 42)

$$\vdash (\forall t_2)(\forall t_1)((t_2 \neq t_1) \Rightarrow (\tau_x((x = t_2) \vee (x = t_1)) = t_2)) \tag{Б.4}$$

по $C34$ (стр. 57) и $C1$ (стр. 42)

$$\vdash (\forall t_1)(\forall t_2)((t_2 \neq t_1) \Rightarrow (\tau_x((x = t_2) \vee (x = t_1)) = t_2)) \tag{Б.5}$$

по $S3$ (стр. 44), $S7$ (стр. 61), $S6$ (стр. 61) и $C1$

$$\vdash (\forall t_1)(\forall t_2)((t_1 \neq t_2) \Rightarrow (\tau_x((x = t_1) \vee (x = t_2)) = t_2)) \tag{Б.6}$$

по $C32$ (стр. 56) и $C20$ (стр. 43)

$$\begin{aligned} \vdash (\forall t_1)(\forall t_2)((t_1 \neq t_2) \ \Rightarrow \ & ((\tau_x((x = t_1) \vee (x = t_2)) = t_2)) \wedge \\ & ((\tau_x((x = t_1) \vee (x = t_2)) = t_1))) \end{aligned}$$

по $T3$ (стр. 62), $C31$ (стр. 56), $C1$

$$\vdash (\forall t_1)(\forall t_2)((t_1 \neq t_2) \Rightarrow (t_1 = t_2)) \tag{Б.7}$$

откуда

$$\vdash (\forall t_1)(\forall t_2)(t_1 = t_2) \tag{Б.8}$$

т.е. в BI все объекты равны.

Предположим, наоборот, что

$$\nvdash (\forall t_1)(\forall t_2)((t_1 \neq t_2) \Rightarrow (\tau_x((x = t_1) \vee (x = t_2)) = t_1)) \tag{Б.9}$$

Если BI полна, то доказуемо отрицание этого соотношения:

$$\vdash (\exists t_1)(\exists t_2)((t_1 \neq t_2) \wedge (\tau_x((x = t_1) \vee (x = t_2)) \neq t_1)) \tag{Б.10}$$

так как $(t_1 = t_1) \vee (t_1 = t_2)$, то по $S5$

$$\vdash (\exists t)((t = t_1) \vee (t = t_2)) \tag{Б.11}$$

и по определению квантора существования

$$\vdash ((\tau_x((x = t_1) \vee (x = t_2)) = t_1) \vee (\tau_x((x = t_1) \vee (x = t_2)) = t_2)) \tag{Б.12}$$

сопоставляя это с Б.10 получаем

$$\vdash (\exists t_1)(\exists t_2)((t_1 \neq t_2) \wedge (\tau_x((x = t_1) \vee (x = t_2)) = t_1)) \tag{Б.13}$$

и по определению квантора существоания получаем, что

$$p_1 = \tau_{t_1}(\exists t_2)((t_1 \neq t_2) \wedge (\tau_x((x = t_1) \vee (x = t_2)) = t_1)) \tag{Б.14}$$

$$\vdash (\exists t_2)((p_1 \neq t_2) \wedge (\tau_x((x = p_1) \vee (x = t_2)) = t_1)) \tag{Б.15}$$

$$p_2 = \tau_{t_2}((p_1 \neq t_2) \wedge (\tau_x((x = p_1) \vee (x = t_2)) = t_1)) \tag{Б.16}$$

$$\vdash ((p_1 \neq p_2) \wedge (\tau_x((x = p_1) \vee (x = p_2)) = p_1)) \tag{Б.17}$$

т.е. утверждение теоремы. ∎

Примечание Б.2. *Заметим, что несмотря на некоторую формальную аналогию, доказанное утверждение имеет мало общего с известным результатом Геделя о свойствах формальной арифметики. Действительно, в нашем случае рассматривается формальная система с аксиомами $S1$–$S8$ то есть только с „логическими“ аксиомами по терминологии Бурбаки. Обнаруженная проблема относится не к свойствам теории множеств, а к (неудачной) конструкции „τ-оператора“.*

Приложение B

Примеры

Exempla odiōsa sunt

B.1 Категории

Примеры категорий:

1. категория множеств Set: объекты — произвольные множества, морфизмы — отображения множеств, единичные морфизмы — тождественные преобразования, композиция морфизмов — суперпозиция отображений;

2. произвольное многообразие универсальных алгебр (группы, кольца, тела, поля, абелевы группы и т. д.): объекты — алгебры многообразия, морфизмы — гомоморфизмы алгебр;

3. категория непрерывных, дифференцируемых, алгебраических, гладких ... многообразий;

4. категория топологических пространств Top: объекты — топ. пространства морфизмы — непрерывные отображения;

5. категория категорий Cat. Объекты этой категории — малые категории, морфизмы — функторы;

6. рассмотрим функтор $\mathsf{Ob} : \mathsf{Cat} \to \mathsf{Set}$, сопоставляющий каждой малой категории множество его объектов, а функтору — соответствующее ему отображение множеств.

   Нетрудно убедиться, что у этого функтора имеется левый сопряженный $\mathsf{Discr} \dashv \mathsf{Ob}$, $\mathsf{Discr} : \mathsf{Set} \to \mathsf{Cat}$. Этот функтор сопоставляет множеству X дискретную категорию (см. определение A.16, с. 107) $X\,\mathsf{Discr}$ такую что $\mathsf{Ob}\,X\,\mathsf{Discr} = X$ (что определяет ее однозначно). Наличие левого сопряженного есть следствие того общего факта, что функтор из произвольной категории в Set имеет левый сопряженный тогда и только тогда когда он представим;

7. категория $\emptyset\,\mathsf{Discr}$ (т.е. значение функтора $\mathsf{Discr} : \mathsf{Set} \to \mathsf{Cat}$ на множестве $\emptyset$) с пустыми классами морфизмов и объектов;

8. категория $1\,\mathsf{Discr}$ с одним объектом и одним (необходимо единичным) морфизмом. Эта категория является, очевидно, конечным объектом в категории Cat и может, соответственно обозначаться $\top_{\mathsf{Cat}}$;

9. дискретная категория с множеством объектов X.

10. Set_n — полная подкатегория категории Set объектами которой являются все непустые множества.

11. Set_p — категория объектами которой являются пары (X, x_0) такие что $x_0 \in X$. Морфизм $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ это отображение $f : X \to Y$ такое что $x_0 f = y_0$.

    Аналогично строятся категории пунктированных топологических пространств Top_p, пунктированных n-мерных многообразий $\mathsf{Manifold}(n)_p$ и т.д.;

12. каждому моноиду можно сопоставить категорию с одним объектом и элементами моноида в качестве морфизмов, произведение определяется произведением в моноиде;

13. каждому рефлексивному и транзитивному отношению R на множестве X можно сопоставить категорию $\mathsf{pos}_R(X)$ такую что

$$\mathsf{Ob}\ \mathsf{pos}_R(X) = X$$

$$\mathsf{Ar}\ \mathsf{pos}_R(X) = R$$
$$\mathsf{dom}(x, y) = x$$
$$\mathsf{cod}(x, y) = y$$
$$\mathbf{1}_x = (x, x)$$

Ясно, что построенная выше категория $X\,\mathsf{Discr}$ есть $\mathsf{pos}_\Delta(X)$ где $\Delta \subseteq X$ — диагональ.

В категории $\mathsf{pos}_R(X)$ для фиксированных объектов x и y существует не больше одного морфизма $f : x \to y$. Всякой категории, обладающей таким свойством, можно сопоставить рефлексивное и транзитивное отношение на классе ее объектов.

Для всякого натурального n обозначим T_n категорию $\mathsf{pos}_{R_n}(\{1, \dots, n\})$, где $R_n \subseteq \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ — естественное упорядочивание.

Аналогично обозначим

$$T_\omega = \mathsf{pos}_{R_\omega}(\mathbf{N})$$

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n \longrightarrow n+1 \longrightarrow \cdots$$

и

$$T_{\mathbf{Z}} = \mathsf{pos}_{R_{\mathbf{Z}}}(\mathbf{Z})$$

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n \longrightarrow n+1 \longrightarrow \cdots$$

14. для всякой пары функторов $F : C_1 \to C$ и $G : C_2 \to C$ с общим концом, можно построить т.н., „комма-категорию“ $(F \downarrow G)$. Ее объектами являются тройки (α, f, β) где $\alpha \in \mathsf{Ob}\,C_1$, $\beta \in \mathsf{Ob}\,C_2$ и $f : \alpha F \to \beta G$. Морфизмом $\tau : (\alpha, f, \beta) \to (\alpha', f', \beta')$ является пара (ξ, η), где $\xi : \alpha \to \alpha'$ и $\eta : \beta \to \beta'$ такая что коммутативным является квадрат:

$$\begin{tikzcd}
\alpha F \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\xi F"'] & \beta G \arrow[d, "\eta G"] \\
\alpha' F \arrow[r, "f'"'] & \beta' G
\end{tikzcd}$$

В частности слой C/x (см. определение А.35, с. 112) можно определить как $(\mathbf{1}_C \downarrow \Delta^x_{\top_{\mathsf{Cat}}})$.

Категория $(\mathbf{1}_C \downarrow \mathbf{1}_C)$ называется категорией стрелок и обозначается $C^{\to}$. Легко проверить, что эта категория эквивалентна категории $\mathsf{Funct}(T_2, C)$;

15. для функтора $F : C \to \mathsf{Set}$ построим т.н. „конструкцию Гротендика“: категорию C_F и функтор $P : C_F \to C$. Объектами C_F являются пары (α, x), где $\alpha \in \mathsf{Ob}\, C$, $x \in \alpha F$. Морфизм $f : (\alpha, x) \to (\beta, y)$ это морфизм $f : \alpha \to \beta$ такой что $x(fF) = y$.

    Категория C_F определяется, с точностью до эквивалентности соотношением
    $$\mathsf{Funct}(C_F, \mathsf{Set}) \cong \mathsf{Funct}(C, \mathsf{Set})/F$$

В.2 Роды структур

Приведем некоторые примеры родов структур, классифицируя их по числам n и m (см. определение Б.2, с. 127) и указывая при этом значение функтора Γ_Σ на множествах $X_1, \ldots, X_n$.

$(n = 1, m = 0)$, $\Gamma_\Sigma : X \longmapsto \top_{\mathsf{Set}}$ Существует только один такой род структуры без аксиомы и, соответствующая ему категория изоморфна категории Set.

$(n = 1, m = 0)$, $\Gamma_\Sigma : X \longmapsto X$ Объектами такого рода структуры (без аксиомы) являются пары (X, σ) где $\sigma \in X$. Т.е. множества с выделенной точкой. В [19] объясняется как снабжать подобные роды структур „естественными“ (но не каноническими) морфизмами. В частности, в данном случае естественные морфизмы первого рода это отображения, переводящие выделенные точки в выделенные точки, и образующие таким образом категорию изоморфную Set_p.

$(n = 1, m = 0)$, $\Gamma_\Sigma : X \longmapsto \beta(X)$ Объектами такого рода структуры (без аксиомы) являются пары (X, Y) где $Y \subseteq X$. EKM-морфизмы это отображения, переводящие „выделенные подмножетсва“ в „выделенные подмножества“ (ср. с понятием пары Борсука в топологии). Эта категория называется категорией подмножеств множеств SubSet.

$(n = 1, m = 0)$, $\Gamma_\Sigma : X \longmapsto \beta(X \times X)$ Объектами такого рода структуры (без аксиомы) являются пары (X, R) где $R \subseteq X \times X$ т.е. объектами являются бинарные отношения на множестве. EKM-морфизмы $f : (X, R) \to (Y, S)$ это отображения, $f : X \to Y$ такие что если $x_1 R x_2$, то $(x_1 f) S (x_2 f)$.

Добавим аксиому, требующую чтобы отношение R было функциональным, тогда получаем род структуры (и, соответственно, категорию) EndSet эндоморфизмов множеств. Ее объектами являются пары $(X, f : X \to X)$, морфизмы $\psi : (X, f) \to (Y, g)$ это отображения $\psi : X \to Y$, коммутирующие с f и g:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi"'] & X \arrow[d, "\psi"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

(Отметим, что эта категория изоморфна категории $\mathsf{Funct}(M_\omega, \mathsf{Set})$, где M_ω есть категория соответствующая моноиду натуральных чисел как описано в пункте 12 предыдущего раздела. При этом M_ω является свободным объектом с одноэлементным множеством образующих относительно фунтора $\mathsf{EndAr} : \mathsf{Cat} \to \mathsf{Set}$, сопоставляющего малой категории множество ее эндоморфизмов.)

Усилив аксиому, требованием чтобы отображение f было изоморфизмом, получаем род структуры AutSet автоморфизмов множеств. Эта категория изоморфна категории $\mathsf{Funct}(M_{\mathbf{Z}}, \mathsf{Set})$, где $M_{\mathbf{Z}}$ есть категория соответствующая моноиду целых чисел. При этом $M_{\mathbf{Z}}$ является свободным объектом с одноэлементным множеством образующих относительно фунтора $\mathsf{AutAr} : \mathsf{Cat} \to \mathsf{Set}$, сопоставляющего малой категории множество ее автоморфизмов.

Вместо функциональности отношения можно требовать от него такие свойства как (анти-) транзитивность, (анти-) симметричность, (анти-) рефлексивность и т.д., получая таким образом категорию частично упорядоченных множеств $\mathsf{POrdSet}$, направленных множеств, совершенно упорядоченных множеств, вполне упорядоченных множеств, категорию отношений эквивалентности EqSet и т.д.

$(n = 1, m = 0)$, $\Gamma_\Sigma : X \longmapsto \beta(X \times X \times X)$ Если не накладывать никакой аксиомы, то таким образом, очевидно, определяется категория тернарных отношений на множествах. Если же потребовать чтобы эти отношения были функциональны по третьему аргументу и всюду определены по первым двум, то получаем категорию односортных универсальных алгебр с одной бинарной операцией.

Последовательно усиливая аксиому, требуя ассоциативности, существования единицы, существования обратных, коммутативности операции, мы получаем категории моноидов, полугрупп, групп и абелевых групп соответственно.

$(n = 1, m = 0)$, $\Gamma_\Sigma : X \longmapsto \beta(\beta(X))$ Объектами родов структур, заданных таким образом, являются пары $(X, (U_i)_{i\in I})$, где $(U_i)_{i\in I}$ есть семейство подмножеств X. Накладывая различные аксиомы, мы можем получить категории разбиений и покрытий множеств и, конечно, категорию топологических пространств Top_0, а также ее различные подкатегории: компактных, метризуемых, хаудорфовых, сепарабельных и т.п. пространств.

Надо отметить, что в построенной таким образом категории Top_0 EKM-морфизмы это открытые, а не непрерывные отображения. (См. пункт В.2)

$(n = 1, m = 0)$, $\Gamma_\Sigma : X \longmapsto \beta(\beta(X) \times X)$ Объектами родов структур, заданных таким образом, являются пары $(X, (G_i)_{i\in I})$, где $(G_i)_{i\in I}$ есть семейство пар вида (U, x), $U \subseteq X$, $x \in X$.

Интерпретируя $(G_i)_{i\in I}$ как отношение „x есть предельная точка для U“, можно добавить аксиомы (аксиомы Куратовского см. [8]), достаточные, чтобы получившаяся категория была изоморфна категории топологических пространств. При этом непрерывные отображения оказываются EKM-морфизмами.

$(n = 2, m = 0)$, $\Gamma_\Sigma : (X, Y) \longmapsto \beta(X \times Y)$ Объектами такого рода структуры (без аксиомы) являются тройки (X, Y, R) где $R \subseteq X \times Y$ т.е. бинарные отношения из X в Y.

EKM-морфизмы $f : (X, Y, R) \to (X', Y', S)$ это отображения, $f : X \to X'$ и $g : Y \to Y'$ такие, что если $x_1 R x_2$, то $(x_1 f) S (x_2 g)$.

Если дополнительно наложить на R ограничение функциональности и всюду-определенности на X, то получим категорию отображений множеств MapSet. Ее объектами являются тройки $f = (X, Y, F)$, такие что F есть график отображения $f : X \to Y$. EKM-морфизмами из $f : X \to Y$ в $g : X' \to Y'$ являются пары отображений $\xi : X \to X'$ и $\eta : Y \to Y'$, делающие коммутативной диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\xi"'] & Y \arrow[d, "\eta"] \\
Y \arrow[r, "g"'] & Y'
\end{tikzcd}$$

Полученная таким образом категория очевидно эквивалентна $\mathsf{Set}^{\to}$ (категории стрелок категории Set)

Если рассмотреть полную подкатегорию MapSet, образованную всеми отображениями, являющимися инъекциями, то получим категорию эквивалентную SubSet (см. определение B.2, с. 136). Если же ограничиться сюръективными отображениями, то получим категорию, эквивалентную EqSet (см. определение B.2, с. 137).

$(n = 3, m = 1)$ В [20] показано, как построить род структуры

$$\mathsf{Grm} = (X, Y, Z; \sigma; \mathbf{N}; \sigma \in S(X, Y, Z; \mathbf{N}); R(X, Y, Z; \sigma)),$$

соответствующий категории формальных грамматик. При этом оказывается, что естественные морфизмы соответствуют отображениям, „сохраняющим выводимость“ и род структуры Grm обладает относительно этих морфизмов хорошими декомпозиционными свойствами.

B.3 Свободные и косвободные объекты

1. В категории Set свободным и косвободным (относительно тождественного функтора $\mathbf{1}_{\mathsf{Set}} : \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$) над произвольным множеством x является оно само. Образующими являются все непустые множества. Кообразующими — множества содержащие более одного элемента.

2. В категориях многообразий универсальных алгебр свободными относительно забывающего функтора в категорию множеств являются обычные свободные алгебры.

   Косвободные алгебры существуют далеко не всегда. Например, в категории групп (аналогично для абелевых групп), существует косвободная группа только для одноэлементного множества кообразующих. Действительно, пусть $\omega = \{\ldots, \alpha, \beta, \ldots\}$ — множество, содержащее по крайней мере два элемента, а G — группа косвободная над ω, относительно забывающего функтора $P : \mathsf{Grp} \to \mathsf{Set}$. Тогда должно существовать отображение множеств $\pi : G \to \omega$, такое что для любой группы H и любого отображения множеств $f : H \to \omega$ существует и единственен гомоморфизм $\bar{f} : H \to G$, замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[dr, "f"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ & \omega \end{tikzcd} .$$

Но это невозможно если в качестве H взять тривиальную группу, так как существует всего один гомоморфизм $e : H \to G$ (переводящий единицу в единицу) и, по-крайней мере, два различных отображения $f : H \to \omega$, переводящих единицу в α или β. Очевидно, что не существует отображения π, при котором диаграмма была бы коммутативна в обоих случаях.

3. В категории топологических пространств и непрерывных отображений Top свободными являются дискретные пространства, а косвободными — антидискретные.

4. Объекты, свободные в Cat относительно функтора $\mathsf{Ob} : \mathsf{Cat} \to \mathsf{Set}$ это дискретные категории, как уже было указано при их определении. Косвободной, относительно этого функтора, над множеством X является категория $X\,\mathsf{Codiscr}$, такая что, $\mathsf{Ob}(X\,\mathsf{Codiscr}) = X$ и для любых $x, y \in X$ существует ровно один морфизм $!_{x,y} : x \to y$.

5. В категории отношений эквивалентности EqSet свободным над множеством x, как нетрудно проверить, является это же множество снабженное минимальным отношением эквивалентности: (x, Δ_x).

   Действительно, пусть (y, Q) объект EqSet и $f : x \to y$ произвольное отображение. Тогда если $(x_1, x_2) \in \Delta_x$, то $x_1 = x_2$ и $(x_1 f, x_2 f) \in Q$, так как Q рефлексивно. Следовательно f есть морфизм. Его единственность очевидна.

   Двойственно, косвободным объектом является пара $(X, X \times X)$, т.е. максимальное отношение эквивалентности.

6. В категории множеств и их подмножеств SubSet свободным над x является, очевидно, пара $(x, \emptyset)$, а косвободным — пара (x, x).

7. Для данного непустого множества G, построим в категории EndSet свободный объект с множеством свободных образующих G. Этим объектом будет пара $(G \times \mathbf{N}, \omega)$, где $\mathbf{N}$ множество натуральных чисел, а $\omega : G \times \mathbf{N} \to G \times \mathbf{N}$ определено следующим образом:

$$(g, n)\omega = (g, n + 1),$$

для всех $g \in G$, т.е., $\omega = \mathbf{1}_G \times s$. где $s : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ — отображение, прибавляющее единицу к своему аргументу. При таком определении G отождествляется с $G \times \{0\}$.

Проверим, что таким образом мы действительно получим свободный объект. Пусть (Y, F) объект EndSet, и $f : G \to Y$ произвольное отображение. По индукции определим морфизм $\psi : (G \times \mathbf{N}, \omega) \to (Y, F)$:

$$\begin{aligned} (g, 0)\psi &= gf \\ (g, n+1)\psi &= ((g, n)\psi)F \end{aligned}$$

Так как $(g, n)\omega\psi = (g, n+1)\psi = (g, n)\psi F$, то $\omega\psi = \psi F$ и ψ — морфизм. Кроме того $\psi|_G = f$. Доказательство единственности очевидно.

Косвободные объекты в этой категории строятся замечательно симметричным образом, есди заметить, что использовавшееся в построении свободных произведене $G \times \mathbf{N}$ это также прямая сумма множеств:

$$G \times \mathbf{N} = \bigsqcup_{i \in \mathbf{N}} G.$$

Для множества кообразующих G косвободным объектом является пара $(\mathsf{Hom}_{\mathsf{Set}}(\mathbf{N}, G), \epsilon)$, где

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{Set}}(\mathbf{N}, G) = G^{\mathbf{N}} = \prod_{i \in \mathbf{N}} G,$$

а отображение ϵ есть $\epsilon = (s\,\cdot) : \mathsf{Hom}_{\mathsf{Set}}(\mathbf{N}, G) \to \mathsf{Hom}_{\mathsf{Set}}(\mathbf{N}, G)$, сопоставляющее отображению $f : \mathbf{N} \to G$, отображение $f\epsilon : \mathbf{N} \to G$, действующее по правилу $n(f\epsilon) = (n+1)f$. Отображение $\mathsf{ev}_0 : \mathsf{Hom}_{\mathsf{Set}}(\mathbf{N}, G) \to G$ это отображение „вычисления в нуле“: $\mathsf{ev}_0 : f \longmapsto 0f$.

Пусть теперь $(U, g : U \to U)$ произвольный объект, и $\alpha : U \to G$ — произвольное отображение множеств. Построим отображение $\bar{\alpha} : U \to \mathsf{Hom}_{\mathsf{Set}}(\mathbf{N}, G)$ следующим образом: элементу $u \in U$, $\bar{\alpha}$

сопоставляет отображение $t_u : N \to G$, определенное по индукции:

$$\begin{aligned} 0t_u &= u\alpha \\ (n+1)t_u &= n(t_{ug}), \end{aligned}$$

или в явном виде $nt_u = ug^n\alpha$. Отсюда непосредственно вытекает, что $\bar{\alpha}\,\mathsf{ev}_0 = \alpha$ и $g\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(s\,\cdot)$, т.е., коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[r, "g"] \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dd, "\bar{\alpha}"] & U \arrow[dd, "\bar{\alpha}"] \\
G & & \\
 & \mathsf{Hom}_{\mathsf{Set}}(\mathbf{N}, G) \arrow[ul, "\mathsf{ev}_0"] \arrow[r, "(s\,\cdot)"] & \mathsf{Hom}_{\mathsf{Set}}(\mathbf{N}, G)
\end{tikzcd} ,$$

что и значит, что $(\mathsf{Hom}_{\mathsf{Set}}(\mathbf{N}, G), \epsilon)$ есть объект, косвободный над (U, g)

8. Категория AutSet обладает похожими свободными объектами: свободный объект с множество свободных образующих G это пара $(G \times \mathbf{Z}, \omega)$, где $\mathbf{Z}$ множество целых чисел (G отождествляется с $G \times \{0\}$), а ω определяется аналогично. Косвободные объекты устроены двойственным образом, так же как и в категории EndSet.

9. В категории MapSet, для любой пары непустых множеств (x, y) свободным объектом с множествами свободных образующих x и y является тройка $(x, x \coprod y, j_x)$, где $j_x : x \to x \coprod y$ — каноническое вложение слагаемого в дизъюнктивную сумму (копроизведение) множеств. Пусть дан объект (t, u, θ), $\theta : t \to u$ и пара отображений $\alpha : x \to t$, $\beta : y \to u$. Тогда прямой проверкой убеждаемся, что

пара $(\alpha, [\alpha\theta, \beta])$ есть морфизм $(\alpha, [\alpha\theta, \beta]) : (x, x \amalg y, j_x) \to (t, u, \theta)$:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "j_x"] \arrow[d, "\alpha"'] & x \coprod y \arrow[d, "{[\alpha\theta, \beta]}"] \\ t \arrow[r, "\theta"'] & u \end{tikzcd}$$

При этом $\alpha|_x = \alpha$ и $[\alpha\theta, \beta]|_y = \beta$ что доказывает, что $(x, x \amalg y, j_x)$ — свободный объект.

Аналогично, косвободным объектом с кообразующими x и y будет тройка $(x \times y, y, \pi_y : x \times y \to y)$.

10. В категории полей нет свободных объектов (т.к., например, все гомоморфизмы полей являются инъекциями). Отсюда, в частности, следует, что аксиомы поля нельзя задать при помощи соотношений над всюду определенными операциями (т.е. поля не образуют многообразия).

11. Покажем, что в категории конечных циклических групп нет свободных объектов с непустым множеством образующих (отметим, что эта категория не является многообразием однотипных универсальных алгебр, так как свойство группы быть циклической не задается соотношениями).

    Предположим, что имеется циклическая группы

    $$G = (e_G, g^1, g^2, \ldots, g^{n-1}, g^n = e_G)$$

    порядка n — свободный объект с непустым множеством свободных образующих X. Зафиксируем x — элемент множества X и, соответственно элемент группы G т.е. $x = g^k$. для некоторого k. Возьмем теперь

    $$N = (e_N, t^1, t^2, \ldots, t^{m-1}, t^m = e_N)$$

группу произвольного порядка m и построим отображение $\xi_m : X \to N$, такое что $x\xi_m = t^1$. По определению свободного объекта существует гомоморфизм $\psi : G \to N$, такой что $g^k\psi = t^1$. Гомоморфизмы переводят единицу в единицу, следовательно,

$$e_G\psi = g^{kn}\psi = (g^k\psi)^n = t^n = e_N = t^{mp}$$

откуда следует, что $n = mp$ для всякого m, что невозможно.

12. Рассмотрим категории $X - \mathsf{EndSet}$ и $X - \mathsf{AutSet}$ — подкатегории EndSet и AutSet, соответственно, состоящие из пар вида (X, F), где X — фиксированное множество.

    Если $\mathsf{Card}(X) = 1$, то единственный объект категорий $X - \mathsf{EndSet}$ и $X - \mathsf{AutSet}$ $(X, \mathbf{1}_X)$ является свободным с множеством свободных образующий X.

    Если $\mathsf{Card}(X) > \aleph_0$, то для любого непустого $M \subseteq X$, можно построить свободный объект множеством свободных образующих M. Покажем, как это делается в категории $X - \mathsf{EndSet}$, построения в $X - \mathsf{AutSet}$ аналогичны. Пусть $M \subseteq X$, так как $\mathsf{Card}(X) > \aleph_0$, то

    $$\mathsf{Card}(X) = \mathsf{Card}(M) \times \mathsf{Card}(X) = \mathsf{Card}(M) \times \mathsf{Card}(\mathbf{N}) \times \mathsf{Card}(X),$$

    где $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел. Следовательно, существует биекция $X \cong M \times \mathbf{N} \times X \cong \coprod_{i \in X} (\mathbf{N} \times M)$. Таким образом, мы можем вполне упорядочить X как приямую сумму множеств, пользуясь, каким-либо вполне упорядочиванием X (существующим в силу принципа вполне упорядочивания) и естественным порядком на N. Этот порядок обладает тем интересным свойством, что в нем не существует максимального элемента, точнее для всякого $x \in X$, $M_x = \{y \in X | y > x\} \neq \emptyset$.

    Заметим, что построенная биекция позволяет нам записывать каждый $x \in X$ в виде $x = (m, n, y)$, где $m \in M$, $n \in \mathbf{N}$, $y \in X$. Построим теперь эндоморфизм $\Theta : X \to X$, $\Theta : (m, n, y) \longmapsto (m, n+1, y)$. Пара (X, Θ) есть свободный объект категории $X - \mathsf{EndSet}$ с множеством свободных образующих M. Доказательство аналогично случаю категории EndSet.

Заметим, что нам потребовалась аксиома выбора (в виде принципа вполне упорядочивания).

Библиография

[1] C. Chevalley *Fundamental concepts of algebra* New York: Academic Press, 1956.

[2] Alonzo Church *Introduction to Mathematical Logic* Volume I, Princeton NJ, Princeton Univ. Press, 1956. А. Черч *Введение в математическую логику*, М.: Изд. иностранной литературы, 1960. 484 с.

[3] C. Faith *Algebra: Rings, Modules and Categories*, Volume I, Berlin, Springer-Verlag. 1973. К. Фейс *Алгебра: кольца, модули и категории*, том 1, М.: Мир, 1977. 688 с.

[4] William Fulton, Robert MacPherson *Categorical Framework for the Study of Singular Spaces*, Brown University, Providence, Rhode Island, Memoirs of American Mathematical Society, No. 243. У. Фултон, Р. Мак-Ферсон *Категорный подход к изучению пространств с особенностями* М.: Мир, 1983. 216 с.

[5] P. Gabriel, M. Zisman *Calculus of Fractions and Homotopy Theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 35 Springer-Verlag, 1967. П. Габриель, М. Цисман *Категории частных и теория гомотопий* М.: Мир, 1971. 295 с.

[6] R. Goldblatt *Topoi, The Categorial Analysis of Logic*, Amsterdam, North Holland Publishing Company, 1979. Р. Голдблатт *Топосы, категорный анализ логики*, М.: Мир, 1983. 486 с.

[7] P. T. Johnstone *Topos Theory* London, Academic Press, 1977.
П. Т. Джонстон *Теория топосов* М.: Наука, 1986. 438 с.

[8] John L. Kelly *General Topology* D. Van Nostrand Company, Inc. Princeton, New Jersey, 1957. Дж. Л. Келли *Общая топология* М.: Наука, 1968. 383 с.

[9] F.W. Lawvere *An elementary theory of the category of sets* Proc. Nat. Acad. Sci., 1964, 52. p. 1506-1511.

[10] F.W. Lawvere *Categories in continuum physics* Lectures given at a Workshop held at SUNY, Buffalo 1982. Berlin etc.: Springer, Cop. 1986.-126.

[11] William S. Massey *Algebraic Topology: An Introduction* Harcout, Brace & World, Inc. New York – Chicago – San Francisco – Atlanta, 1967. У. Масси *Алгебраическая топология* М.: Мир, 1977. 340 с.

[12] S. MacLane *Categories for the Working Mathematician*, Berlin: Springer, 1971.

[13] Charles Wells *Sketches: Outline with References*
`ftp://ftp.cwru.edu/math/wells/sketches.dvi`

Литература на русском языке

[14] Н. Бурбаки *Теория множеств* М.: Мир, 1965. 455 с.

[15] Н. Ю. Данилов *О взаимосвязи декомпозиционных свойств исчисления родов структур и теории категорий* М.: ВЦ РАН, 1996. С. 49–62.
`http://www.server.ru/~god/math`

[16] Н. Ю. Данилов, Ю. Н. Павловский, В. И. Соколов, Г. Н. Яковенко *Геометрические и алгебраические методы в теории управления*: уч. пособие, МФТИ. М.: 1999. 156 с.
`http://www.server.ru/~god/math`

[17] О. В. Мельников, и др. *Общая алгебра* М.: Наука, 1990. 480 с.

[18] Ю. Н. Павловский, Т. Г. Смирнова *Проблема декомпозиции в математическом моделировании* М.: Фазис, 1998. 272 с.

[19] Ю. Н. Павловский *О естественных морфизмах* М.: ВЦ РАН, 1996. С. 3–13.

[20] С. Ю. Пичугов *Декомпозиция формальных грамматик* М.: ВЦ РАН, 1996. С. 20–48.

[21] М. М. Постников *Гладкие многообразия* М.: Наука, 1987. 480 с.

[22] М. Ш. Цаленко, Е. Г. Шульгейфер *Основы теории категорий* М.: Наука, 1974. 256 с.

Дополнительная литература

[23] J. L. Bell *Category Theory and the Foundations of Mathematics*, British Journal of Philosophy of Science, vol. 32, 1981.

[24] P. Benaceraf *What Numbers Could Not Be*, Philosophical review, vol. 74, 1965.

[25] L. Corry *Nicholas Bourbaki and the Concept of Mathematical Structure*, Synthese, vol. 92, 1992.

[26] Richard Stefanik *Structuralism, Category Theory and Philosophy of Mathematics* Washington: MSG Press, 1996.

Index

$(F \downarrow G)$, 135
$(P_i) - \mathsf{lim}\, F$, 32
$1\, \mathsf{Discr}$, 134
2-категория, 73
$=$, 123
$A1$, 125
$A2$, 125
$A3$, 125
$A4$, 125
AB, 119
C^*, 104
C^op, 104
$C^{\rightarrow}$, 135
P_Σ, 129
$S1$, 124
$S2$, 124
$S3$, 124
$S4$, 124
$S5$, 124
$S6$, 125
$S7$, 125
$S8$, 125
S_Σ, 128
T_ω, 134
T_n, 134
$T_{\mathbf{Z}}$, 134
$X\, \mathsf{Discr}$, 134
AutSet
 определение, 137
Cat, 10, 133
Coeq , 118
Coeqp , 118
Colim F, 113
Discr, 134
EndSet
 определение, 137
EqSet
 определение, 137
Manifold$(n)_p$, 134
MapSet
 определение, 139
POrdSet
 определение, 137
$\Rightarrow$, 14, 24, 45, 59, 103, 104, 124, 131
Set, 10, 133
Set$_p$, 134
SubSet
 определение, 136
Top, 133
 определение, 138
Top$_p$, 134
$\underset{i \in I}{(+)} f_i = f\, \mathsf{coact}(F) : \coprod_{i \in I} a_i \to u$, 114
$\underset{i \in I}{(\times)} f_i = f\, \mathsf{act}(F) : u \to \prod_{i \in I} a_i$, 114
$j_i : a_i \to \coprod_{i \in I} a_i$, 114

$\mathbf{1}$, 22, 23, 30, 36–38, 46–48, 52–54, 61, 62, 64, 67, 69, 71, 75, 76, 80, 84, 89–95, 102–104, 108, 111, 115, 126, 127, 135, 136, 140, 142, 145
$\perp$, 113
$\top$, 53, 62, 86, 90, 92, 94, 97, 110, 112, 134, 136
$\mathsf{cocoun}\, e_i : t \to t_i$, 114
$\mathsf{colim}\, F$, 113
$\pi_i : \prod_{i \in I} a_i \to a_i$, 114
$\mathsf{coun}\, e_i : t_i \to t$, 114
$\emptyset$, 16, 32, 44, 45, 50, 63, 66, 86, 102, 113, 116, 134, 141, 145, 151
η
  определение, 73
$\in$, 123
$\vee$, 123
$\neg$, 123
$\emptyset\,\mathsf{Discr}$, 134
$\nvdash$, 131
$\mathsf{pos}_R(X)$, 134
$\prod_{i \in I} a_i$, 114
τ, 123
ε, 103
$\vdash$, 130–132
h^a, 107
h_a, 108
$\mathbf{N}$, 14, 64, 65, 70, 135, 139, 141–143, 145
$\mathbf{Q}$, 14
$\mathbf{R}$, 44–46, 48, 49, 53–55, 57–71
$\mathbf{Z}$, 14, 135, 137, 143, 150
$(+)$, 115, 150
$(\times)$, 33, 79, 86, 93, 94, 114, 150
$\Lambda\upsilon\sigma$, 57
$\cdot$, 32, 65, 75, 76, 78–84, 86, 88, 92–97, 99, 142, 143
η, 55–62, 73–100, 151
$\blacksquare$, 123

act
  определение, 113
act, 113, 114, 150, 151
add, 61, 62
AGrp, 76
Ar, 26, 77, 84, 101, 104, 106–109, 111, 121, 135, 151
Ar
  определение, 101
Aut, 58
AutAr, 137
AutSet, 41, 137, 143, 145, 150

Card, 113, 125, 145
Cat, 87, 89, 94, 98, 99, 108, 112, 133, 134, 136, 137, 141, 150, 154
Closure, 45
coact
  определение, 113
coact, 113, 115, 150, 151
cocompat F
  определение, 112
cocompat, 112, 113, 151
cocoun, 114, 151
cod
  определение, 101
cod, 99, 101–103, 135, 151

Codiscr, 141
Coeq, 24, 25, 118, 150
Coeqp, 24, 25, 118, 150
Coim, 120
coim, 21, 120
Colim, 113, 150
colim, 113, 151
comp, 103
compat F
  определение, 112
compat, 32, 98, 112–114, 152
coun, 78, 114, 151

dim, 45
Discr, 113, 134, 135, 150, 151
dom
  определение, 101
dom, 99, 101–103, 135, 152
Ds, 51–62, 66, 70, 71

enat, 85, 87
End, 57, 58
EndAr, 137
EndSet, 41, 137, 141–143, 145, 150
Epi, 119–121
$\mathsf{Epi}_{\mathsf{B}}$, 26, 27
$\mathsf{Epi}_{\mathsf{BC}}$, 26
Eq, 118
Eqp, 118
EqSet, 41, 138, 139, 141, 150
ev, 40, 88, 90, 91, 93, 99, 110, 142, 143

Funct(C_1, C_2)
  определение, 109
Funct, 32, 40, 41, 51, 52, 57, 74, 75, 77, 78, 81, 84–89, 94, 98, 99, 109, 110, 136, 137, 152

Grm, 139, 140
Grp, 140

Hom
  определение, 101
Hom, 12, 54–57, 59, 61, 62, 65, 66, 73, 84, 86, 88, 90, 91, 93–95, 102, 106–108, 110, 113, 115, 116, 127, 128, 142, 143, 152

Im, 120
im, 21, 120
In, 116
Iso, 26, 27, 120

Ker, 97
ker, 78

Lim F
  определение, 113
Lim, 34, 85–87, 113, 152
lim F
  определение, 113
lim, 31–35, 77, 113, 114, 150, 152

Manifold
  определение, 43, 44
$\mathsf{Manifold}^{\infty}$
  определение, 44
$\mathsf{Manifold}^{\infty}_{n}$
  определение, 44
$\mathsf{Manifold}^{\omega}$
  определение, 44

$\mathsf{Manifold}^{\omega}_{n}$
определение, 44
$\mathsf{Manifold}^{r}$
определение, 43
$\mathsf{Manifold}^{r}_{n}$
определение, 43
$\mathsf{Manifold}_{n}$
определение, 43
Manifold, 43–46, 50, 52, 55, 56, 61, 63, 64, 66, 68, 70, 134, 150, 152, 153
MapSet, 12, 41, 139, 143, 150
Metr, 65
Mon, 119–121
$\mathsf{Mon}_{\mathsf{B}}$, 26, 27
$\mathsf{Mon}_{\mathsf{BC}}$, 26
mul, 61, 62

$\mathsf{Nat}(F, G)$
определение, 109
Nat, 56, 60, 78–82, 85–87, 89, 91–96, 109, 110, 113, 153

Ob, 17, 32, 33, 35, 37, 40, 51, 62, 75, 78, 84, 86, 88–90, 92, 96, 101, 104–115, 117, 128, 134–136, 141, 153
Ob
определение, 101
Ode, 47–49, 52–54, 66, 67

POrdSet, 76, 138, 150
pos, 134, 135, 151

$\mathsf{Quo}(a)$
определение, 116
Quo, 98, 116, 153

Set, 12, 13, 15, 17–20, 22, 33, 34, 39, 41, 42, 46, 48, 49, 73, 74, 76, 84, 87, 89–91, 93–95, 107–110, 113, 126–129, 133, 134, 136, 137, 139–143, 150
skel, 98
Sol, 48, 57
$\mathsf{Sub}(a)$
определение, 116
Sub, 98, 116, 153
SubSet, 41, 137, 139, 141, 150

Top, 12, 45, 55–61, 66, 133, 134, 138, 141, 150

аксиома
рода структуры, 127
существования бесконечного множества, 125
существования множества частей, 125
существования пары, 125
экстенсиальности, 125

бикатегория, 119
биморфизм, 115
буква, 123

двойственности
принцип, 104

фактор-объект, 18–24
факторобъект, 116
функтор
контравариантный, 105
копредел, 113
ковариантный, 104

определение, 104
основной, 107
контравариантный, 108
постоянный, 111
предел, 113
представимый, 110
произведение, 108
сопряженный, 110
включения, 107

группа
делимая, 14
группоид, 116

изоморфизм, 115

категория, 12–14, 101, 102, 104, 105, 107–116, 119, 121, 133–139
Cat, 108
абелевая, 73
аддитивная, 73
алгебр
универсальных, 133
автоморфизмов множеств, 137
большая, 10
декартовая
замкнутая, 73
дискретная, 107, 134
дуальная, 104
двойственная, 104
формальных грамматик, 139
категорий, 133
комма, 135
малая, 105
многообразий, 133
множеств, 133
непустых, 134
пунктированных, 134
моноида, 134
моноидальная
замкнутая, 73
обогащенная, 72
определение, 101
альтернативное, 102, 103
относительная, 73
отношений бинарных, 137, 139
отношений тернарных, 138
отношений эквивалентности, 137
очень большая, 10
подмножеств множеств, 136
предабелевая, 73
предаддитивная, 73
пространств
пунктированных, 134
топологических, 133
пустая, 134
с бурбаковски свободным объектом, 15
с достаточным количеством бурбаковски свободных объектов, 22
с инъективными мономорфизмами, 14
с сюръективными эпиморфизмами, 14
сбалансированная, 116
уравновешенная, 116
эндоморфизмов множеств, 137
частичного порядка, 134, 137

коконус, 111
допустимый, 111
универсальный, 114
комма категория, 135
конструкция Гротендика, 136
конус, 111
(F, G)-диагонализируемый, 35
(F, G)-строгий, 35
F-строгий, 35
допустимый, 111
универсальный, 114
кообраз
морфизма, 119
копредел
функтора, 113
копроизведение, 114
расслоенное, 114

левый
ноль, 113

множество
исходное базисное, 127
пустое, 16, 32, 44, 45, 50, 63, 66, 86, 102, 113, 116, 134, 141, 145, 151
свободных образующих, 15
вспомогательное, 127
мономорфизм, 10, 11, 13–16, 18–24, 115–117, 119–121, 154
B-точый, 19
допустимый, 119
регулярный, 117
строгий, 119
структурный, 117
морфизм, 9, 12–16, 19–25, 41, 101–104, 107–119, 121, 133, 134
диагонализируемый, 118
единичный, 101
кообраз, 119
образ, 119
определение, 101
произведение, 101

ноль
левый, 113
правый, 112

образ
морфизма, 119
объект, 15, 18–25, 101, 102, 104, 107, 108, 110–117, 133, 134
бурбаковски свободный, 15
финальный, 112
инициальный, 113
конечный, 112
начальный, 113
определение, 101
свободный, 117
терминальный, 112

подкатегория, 107
полная, 107
подобъект, 18–24, 116
представитель, 116
правый
ноль, 112
предел
бурбаковский, 32
предпучок, 105
преобразование

естественное, 109
произведение, 109
натуральное, 109
принцип
двойственности, 104
произведение, 114
бурбаковское, 31
морфизмов, 101
расслоенное, 114
пустое множество, 16, 32, 44, 45, 50, 63, 66, 86, 102, 113, 116, 134, 141, 145, 151

распространение свойства на факторобъект, 116
распространение свойства на подобъект, 116
род структуры, 127
исходное базисное множество, 127
родовая константа, 127
типизация, 127
вспомогательное множество, 127
род струткуры
аксиома, 127

самодвойственность, 104
слой
над, 112
под, 112
структура
более грубая, 30
более крупная, 30
более мелкая, 30
более тонкая, 30
финальная, 29
инициальная, 29
многоосновная, 13
начальная, 29
одноосновная, 13
сравнимая, 30

теория
бивариантная, 73
типизация
родовой константы, 127
соотношение, 127

утверждение
двойственное, 104

эпиморфизм, 10, 13, 14, 18–25, 115–121, 154
B-точый, 19
допустимый, 119
регулярный, 118
строгий, 119
структурный, 117