

Problemas Verificación de Programas de Jonatan Gómez
 Nicolás Ramírez Calderón
 257084

1. Sea C el siguiente segmento de código:

```
a := a + 1
j := a * j
a := j + a
```

Determine cuales de las siguientes ternas son validas, en tal caso demuéstrelo, sino muestre un contra ejemplo:

1. $\{a = 3 \wedge j = 1\} C \{a = 8 \vee j = 3\}$

```
{a0 = 3 ∧ j0 = 1} a1 = a0 + 1 {a1 = 4 ∧ j0 = 1}
{a1 = 4 ∧ j0 = 1} j1 = a1 * j0 {a1 = 4 ∧ j1 = 4}
{a1 = 4 ∧ j1 = 4} a2 = a1 + j1 {a2 = 8 ∧ j1 = 4}
```

Como se cumple que $a2 = 8$ entonces la terna es válida.

2. $\{a \geq 3 \wedge j = 2\} C \{j > 8\}$

```
{a0 = 3 ∧ j0 = 2} a1 = a0 + 1 {a1 = 4 ∧ j0 = 2}
{a1 = 4 ∧ j0 = 2} j1 = a1 * j0 {a1 = 4 ∧ j1 = 8}
{a1 = 4 ∧ j1 = 4} a2 = a1 + j1 {a2 = 12 ∧ j1 = 8}
```

Para probar que esta terna no es valida demostramos que con $a0 = 3 \wedge j0 = 2$ no se cumple la poscondición $j1 > 8$.

3. $\{a > 3 \wedge a < 5 \wedge j = 2\} C \{j > 8 \wedge j < 12\}$

```
{3 < a0 < 5 ∧ j0 = 2} 3 + 1 < a0 + 1 < 5 + 1 {4 < a1 < 6 ∧ j0 = 2}
a1 = a0 + 1
{4 < a1 < 6 ∧ j0 = 2} 4 * j0 < a1 * j0 < 6 * j0 {3 < a1 < 5 ∧ 8 < j1 < 12}
8 < a1 * j0 < 12
j1 = a1 * j0
```

Como demostramos que se cumple $8 < j1 < 12$ entonces la terna es valida.

4. $\{a > 5 \wedge j < 3\} C \{a < 40 \vee j < 40\}$

```
{a0 = 20 ∧ j0 = 2} a1 = a0 + 1 {a1 = 21 ∧ j0 = 2}
{a1 = 21 ∧ j0 = 2} j1 = a1 * j0 {a1 = 21 ∧ j1 = 42}
{a1 = 21 ∧ j1 = 42} a2 = a1 + j1 {a2 = 63 ∧ j1 = 42}
```

Para que probar que la terna no es valida demostramos que $a0 = 20 \wedge j0 = 2$ no cumple la poscondición, por lo tanto nos sirve como contra ejemplo.

5. $pre C \{a = 10\}$

$$\begin{aligned} \{a0 = 10\} a2 = a1 + j1 \{j1 = 10 - a1\} \\ 10 = a1 + j1 \\ \{j1 = 10 - a1\} \quad j1 = a1 * j0 \quad \{(a0 + 1)(j0 + 1)\} \\ 10 - a1 = a1 * j0 \\ 10 = a1 (j0 + 1) \\ a1 = a0 + 1 \\ \{(a0 + 1)(j0 + 1)\} C \{a0 = 10\} \quad R. \end{aligned}$$

6. $\{a = 3 \wedge j > 1 \wedge j < 5\} C post$

$$\begin{aligned} \{a0 = 3 \wedge 1 < j0 < 5\} a1 = a0 + 1 \{a1 = 4 \wedge 1 < j0 < 5\} \\ \{a1 = 4 \wedge 1 < j0 < 5\} \quad 1 < j0 < 5 \{a1 = 4 \wedge 4 < j1 < 20\} \\ j1 = a1 * j0 \\ a1 < a1 * j0 < 5a1 \\ 4 < j1 < 20 \\ \{a1 = 4 \wedge 4 < j1 < 20\} \quad a2 = a1 + j1 \{8 < a2 < 24 \wedge 4 < j1 < 20\} \\ 4 < j1 < 20 \\ a1 + 4 < a1 + j1 < a1 + 20 \\ 8 < a2 < 24 \\ \{a0 = 3 \wedge 1 < j0 < 5\} C \{8 < a2 < 24 \wedge 4 < j1 < 20\} \quad R. \end{aligned}$$

2. Si $x + y \leq z$ entonces

$$x = y + z \quad \text{sino}$$

$$y = x + z$$

fin_si

Determine cuales de las siguientes ternas son válidas, en tal caso demuéstrelas, sino muestre un contra ejemplo:

1. $\{x = 3 \wedge y = 6 \wedge z = 9\} D \{x = 15 \wedge y = 6 \wedge z = 9\}$

$$\begin{aligned} \{x = 3 \wedge y = 6 \wedge z = 9\} \text{ si } (x + y \leq z) \{x = 15 \wedge y = 6 \wedge z = 9\} \\ 3 + 6 \leq 9 \\ x = y + z \\ x = 9 + 6 \end{aligned}$$

La terna es valida pues la poscondición se cumple para la entrada dada.

$$2. \{x = 3 \wedge y = 4 \wedge z = 3\} D \{x = 3 \wedge y = 6 \wedge z = 3\}$$

$$\{x = 3 \wedge y = 4 \wedge z = 3\} \text{ si } (x + y \leq z) \{x = 3 \wedge y = 6 \wedge z = 3\}$$

$$3 + 4 \leq 3$$

$x = y + z$ no se ejecuta

sino

$$y = x + z$$

$$y = 3 + 3$$

$$y = 6$$

La terna es valida pues se cumple la poscondición para la entrada dada.

$$3. \{x > z \wedge y > 0\} D \{y > x\}$$

La terna no es valida y lo podemos demostrar con el siguiente contra ejemplo:

$$\{x = 5 \wedge y = 2 \wedge z = -4\} \text{ si } (x + y \leq z) \{x = 5 \wedge y = 1 \wedge z = -4\}$$

$$5 + 2 \leq -4$$

$x = y + z$ no se ejecuta

sino

$$y = x + z$$

$$y = 5 + (-4)$$

$$y = 1$$

Como podemos notar no se cumple la condición $y > x$.

Complete las siguientes ternas en las cuales hace falta la precondition o la poscondición:

$$4. \text{pre } D \{x = 4 \wedge y = 10 \wedge z = 6\}$$

$$\{x = 4 \wedge y = 10 \wedge z = 6\} y = x + y \vee x = y + z \{y > 2\}$$

$$x + y > z$$

$$\{x = 4 \wedge y = 10 \wedge z = 6\} D \{x = 4 \wedge y > 2 \wedge z = 6\}$$

$$5. \{x = 10 \wedge y = 20 \wedge z = -5\} D \text{post}$$

$$\{x = 10 \wedge y = 20 \wedge z = -5\} \text{ si } (x + y \leq z) \{x = 10 \wedge y = 5 \wedge z = -5\}$$

$$10 + 20 \leq -5$$

$x = y + z$ no se ejecuta

sino

$$y = 10 + (-5)$$

$$y = 10 + (-5)$$

$$y = 5$$

$$6. \text{pre } D \{x = y\}$$

3. Encuentre un segmento de código C que cumpla con la siguiente especificación:

$$\{ \} C \{ a = a_{\alpha} + b_{\alpha} \wedge b = a_{\alpha} - b_{\alpha} \}$$

La terna que cumple con la especificación es la siguiente:

$$\{ \} \text{temp} = a; a = a+b; b = \text{temp}-b; \{ a = a_{\alpha} + b_{\alpha} \wedge b = a_{\alpha} - b_{\alpha} \}$$

La demostración es la siguiente:

$$\{ \} \text{temp} = a; \{ \text{temp} = a_{\alpha} \} \quad (\text{regla de asignación})$$

$$\{ \text{temp} = a_{\alpha} \} a = a+b; \{ \text{temp} = a_{\alpha} \wedge a = a_{\alpha} + b_{\alpha} \} \quad (\text{regla de asignación})$$

$$\{ \text{temp} = a_{\alpha} \wedge a = a_{\alpha} + b_{\alpha} \} b = \text{temp}-b;$$

$$\{ \text{temp} = a_{\alpha} \wedge a = a_{\alpha} + b_{\alpha} \wedge b = \text{temp} - b_{\alpha} \} \quad (\text{regla de asignación})$$

$$(\text{temp} = a_{\alpha} \wedge a = a_{\alpha} + b_{\alpha} \wedge b = \text{temp} - b_{\alpha}) \rightarrow$$

$$(a = a_{\alpha} + b_{\alpha} \wedge b = a_{\alpha} - b_{\alpha}) \quad (\text{simplificación, igualdad})$$

$$\{ \text{temp} = a_{\alpha} \wedge a = a_{\alpha} + b_{\alpha} \} b = \text{temp}-b;$$

$$\{ a = a_{\alpha} + b_{\alpha} \wedge b = a_{\alpha} - b_{\alpha} \} \quad (\text{debilitamiento post. 3,4})$$

$$\{ \} \text{temp} = a; a = a+b; \{ \text{temp} = a_{\alpha} \wedge a = a_{\alpha} + b_{\alpha} \} \quad (\text{encadenamiento 1,2})$$

$$\{ \} \text{temp} = a; a = a+b; b = \text{temp}-b; \{ a = a_{\alpha} + b_{\alpha} \wedge b = a_{\alpha} - b_{\alpha} \} \quad (\text{encadenamiento 6,5})$$

La notación a_α puede ser dispendiosa y complicada, existe una notación más sencilla: la idea es usar constantes (las cuales se representan por letras mayúsculas) para indicar los valores iniciales de las variables. Por ejemplo este problema se puede plantear de la siguiente forma:

$$\{a = A \wedge b = B\} \\ \text{temp} = a; a = a+b; b = \text{temp}-b; \\ \{a = A + B \wedge b = A - B\}$$

A y B son constantes y representan los valores iniciales de las variables a y b respectivamente. La demostración de esta terna quedaría así:

$$\{a = A \wedge b = B\} \quad \{temp = A\} \\ \text{temp} = a; \quad \text{(regla de asignación)}$$

$$\{temp = A\} \quad \{temp = A \wedge a = A + B\} \\ a = a+b; \quad \text{(regla de asignación)}$$

$$\{temp = A \wedge a = A + B\} \\ b = \text{temp}-b; \\ \{temp = A \wedge a = A + B \wedge b = \text{temp} - B\} \\ \text{(regla de asignación)}$$

$$(temp = A \wedge a = A + B \wedge b = \text{temp} - B) \\ \rightarrow \\ (a = A + B \wedge b = A - B) \\ \text{(simplificación, igualdad)}$$

$$\{temp = A \wedge a = A + B\} \quad \{a = A + B \wedge b = A - B\} \\ b = \text{temp}-b; \\ \text{(debilitamiento post. 3,4)}$$

$$\{a = A \wedge b = B\} \quad \{temp = A \wedge a = A + B\} \\ \text{temp} = a; a = a+b; \\ \text{(encadenamiento 1,2)}$$

$$\{a = A \wedge b = B\} \\ \text{temp} = a; a = a+b; b = \text{temp}-b; \\ \{a = A + B \wedge b = A - B\} \\ \text{(encadenamiento 6,5)}$$

4. Encuentre un segmento de código C que cumpla con la siguiente especificación:

$$\{a \neq b\} C \{(m = a_\alpha - b_\alpha \vee m = b_\alpha - a_\alpha) \wedge m > 0\}$$