Il moto di un corpo lungo una retta è determinato completamente se è nota la sua posizione in funzione del tempo

$$x(t) \Rightarrow v(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow v(t) = v_0 + at \Rightarrow a(t) = a$$

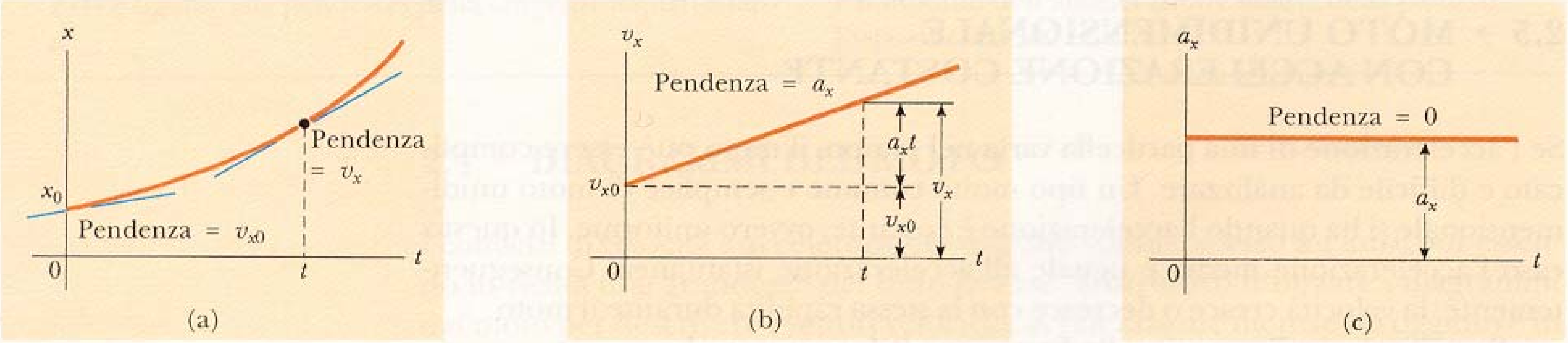
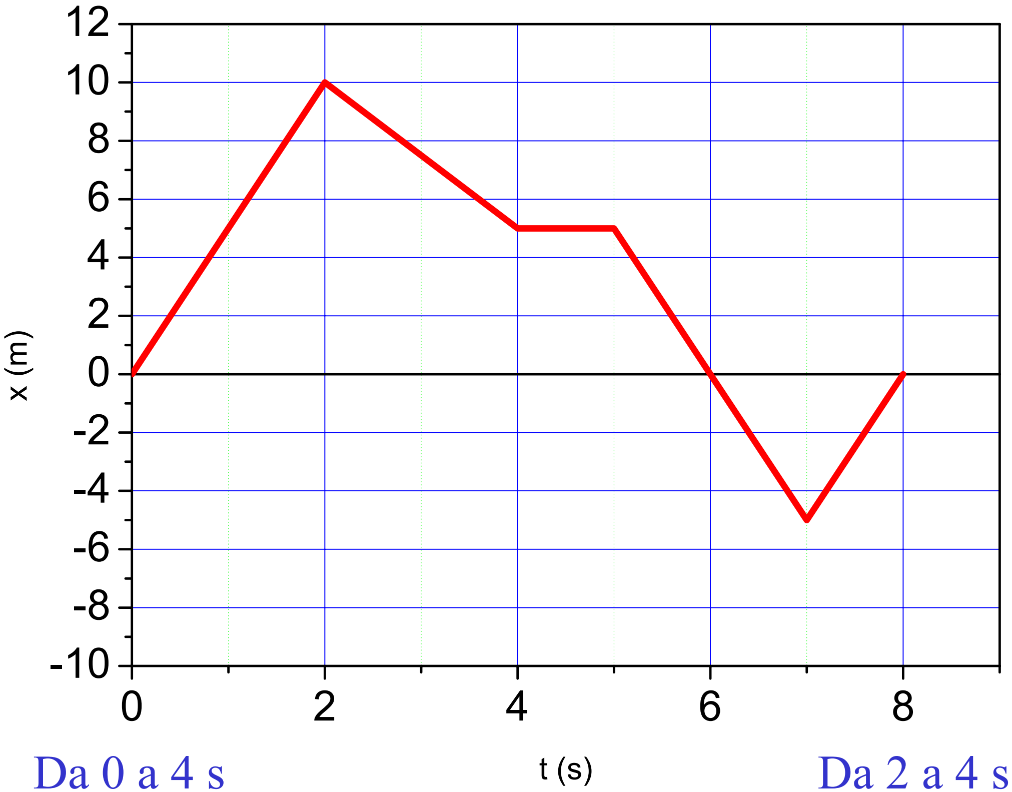


Figura 2.10 Una particella si muove lungo l'asse x con accelerazione costante a_x; (a) grafico posizione-tempo, (b) grafico velocità-tempo, (c) grafico accelerazione-tempo.



Determinare la velocità media negli intervalli di tempo

a) Da 0 a 2 s
b) Da 0 a 4 s
c) Da 2 s a 4 s
d) Da 4 s a 7 s
e) Da 0 a 8 s

Da 0 a 2 s

$V = \Delta x/\Delta t = (x_f - x_i)/(t_f - t_i) =$
$= (10\ m - 0\ m)/(2\ s - 0\ s) =$
$= 5\ m/s$

Da 0 a 4 s

$V = \Delta x/\Delta t = (x_f - x_i)/(t_f - t_i) =$
$= (5\ m - 0\ m)/(4\ s - 0\ s) =$
$= 1.25\ m/s$

Da 2 a 4 s

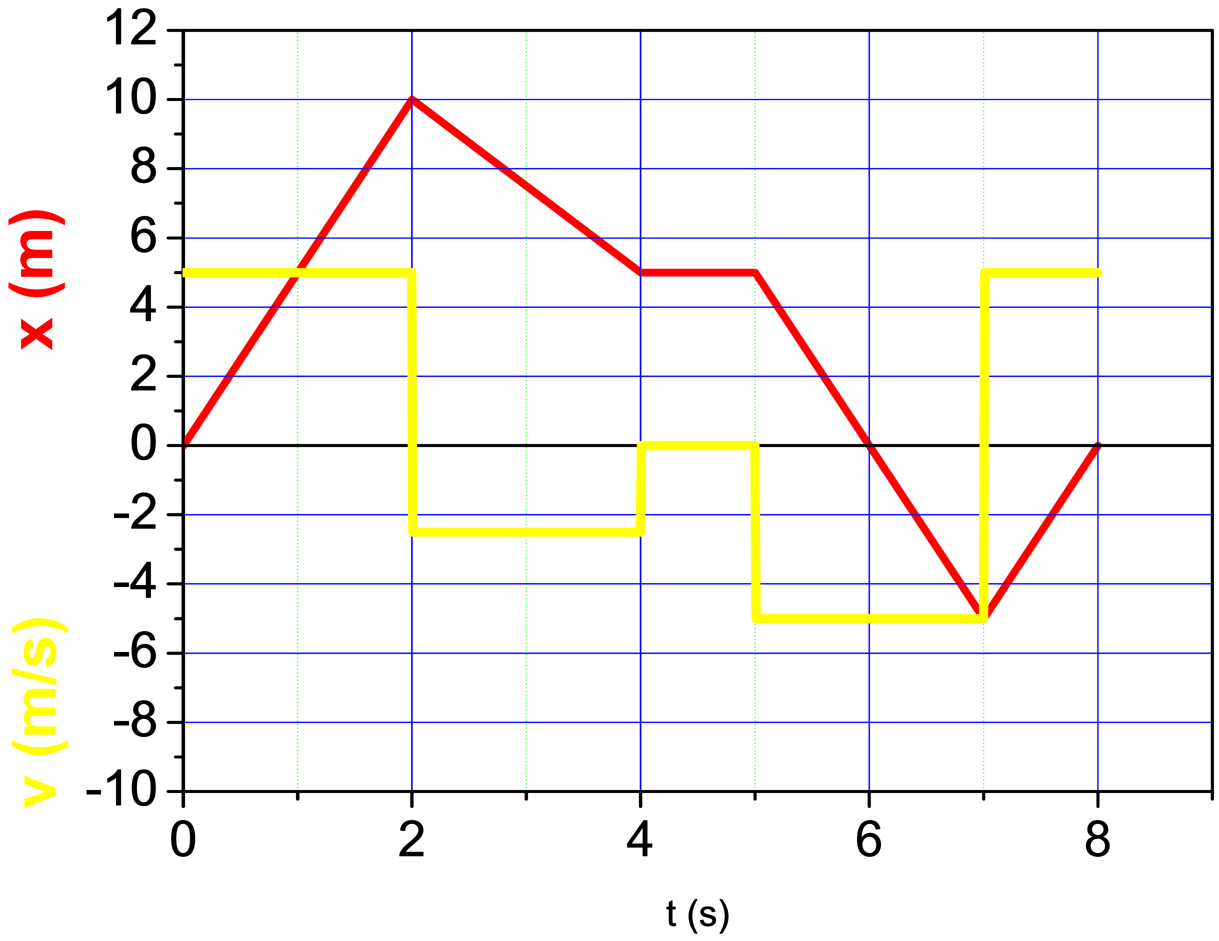
$V = \Delta x/\Delta t = (x_f - x_i)/(t_f - t_i) =$
$= (5\ m - 10\ m)/(4\ s - 2\ s) =$
$= -2.5\ m/s$

Da 4 a 7 s

$V = \Delta x/\Delta t = (x_f - x_i)/(t_f - t_i) =$
$= (-5\ m - 5\ m)/(7\ s - 4\ s) =$
$= -3.33\ m/s$

Da 0 a 8 s

$V = \Delta x/\Delta t = (x_f - x_i)/(t_f - t_i) =$
$= (0\ m - 0\ m)/(8\ s - 0\ s) =$
$= 0\ m/s$


x (m)
v (m/s)
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
0
2
4
6
8
t (s)

Una particella è in moto con velocità $\mathbf{v}_0 = 60.0\ \mathbf{i}$ m/s al tempo t = 0.
Nell'intervallo di tempo tra t = 0 e t = 15.0 s, la velocità diminuisce uniformemente fino ad annullarsi.
Qual è l'accelerazione media?

$$\mathbf{a} = \Delta\mathbf{v}/\Delta t$$
$$= (0\ \mathbf{i}\ \text{m/s} - 60.0\ \mathbf{i}\ \text{m/s})/(15.0\ \text{s} - 0)$$
$$= -4\ \mathbf{i}\ \text{m/s}^2$$

La componente x di **a** è –4.
Il modulo di **a** è 4.

Un'automobile accelera da 0 a 60.0 mi/h in 5.00 s.
Quanto vale questa accelerazione in m/s?
Quanto tempo ci mette l'auto a passare da 60.0 mi/h 130 mi/h?

L'accelerazione media vale:

$a = \Delta v/\Delta t$
$\quad = (60.0 \text{ mi/h} - 0) / 5.00 \text{ s}$
$\quad = [\ 60.0 \text{ mi/h} (1609 \text{ m/mi})/ (3600 \text{ s/h})\ ] / 5.00 \text{ s}$
$\quad = 5.36 \text{ m/s}^2$

Utilizzando la legge del moto uniformemente accelerato:

$v = v_0 + at$

Si ottiene:

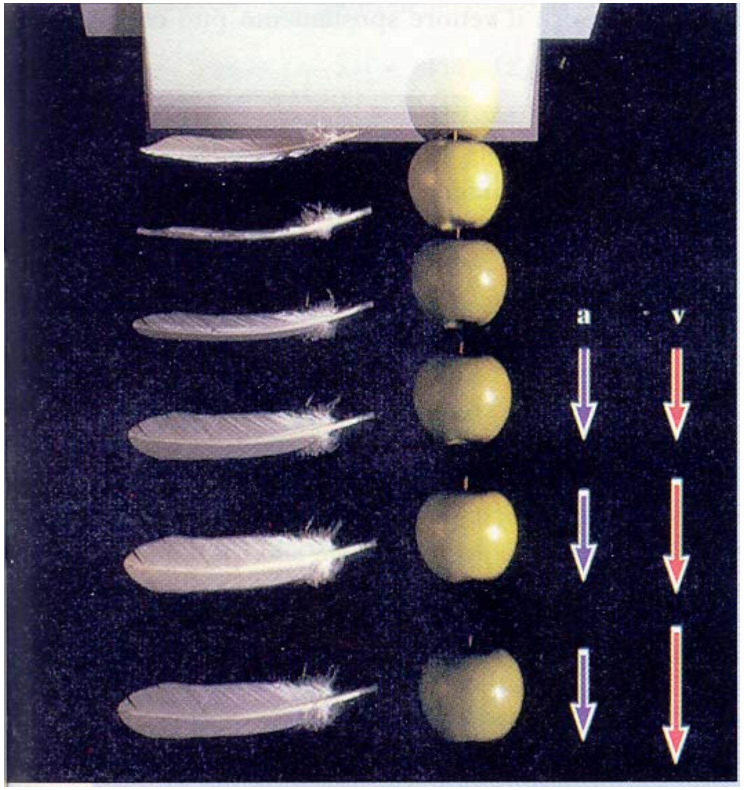
$t = (v-v_0)/a$

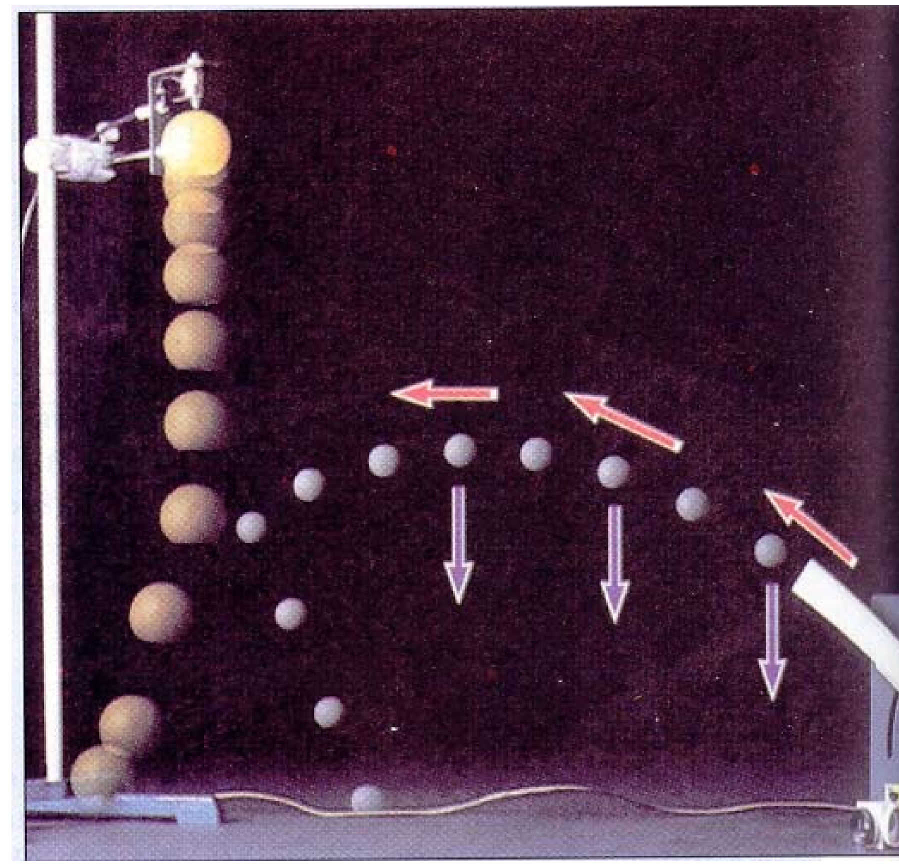
Occorre trasformare le velocità in m/s:

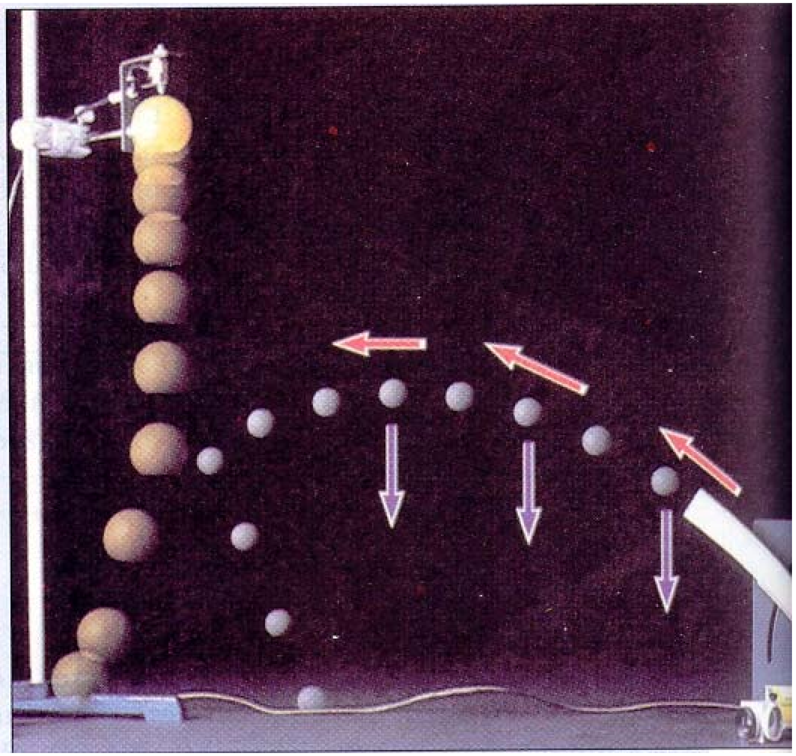
$v_0 = 60.0 \text{ mi/h} = 26.8 \text{ m/s}$
$v = 130 \text{ mi/h} = 58.1 \text{ m/s}$

Da cui:

$t = (v-v_0)/a$
$\quad = (58.1 \text{ m/s} - 26.8 \text{ m/s})/5.36 \text{ m/s}^2$
$\quad = 5.8 \text{ s}$


a
v





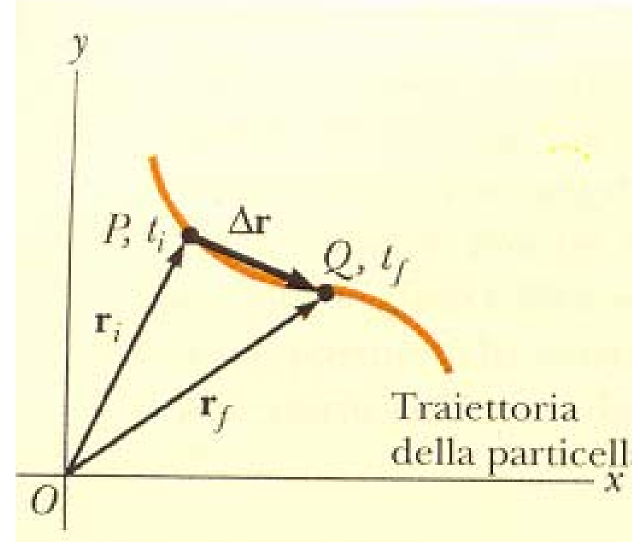


Figura 3.1 Una particella che si muove nel piano xy è localizzata dal vettore posizione $\mathbf{r}$ tracciato dall'origine alla particella. Lo spostamento della particella allorquando essa si muove da P a Q nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_f - t_i$ è uguale al vettore $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i$.

Il vettore spostamento della particella da P a Q è dato da:

$$\Delta \mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i$$

Definiamo la **velocità media** della particella durante l'intervallo di tempo Δt come il rapporto fra lo spostamento e l'intervallo di tempo occorrente a questo spostamento:

$$\bar{\mathbf{v}} \equiv \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \qquad [3.2]$$

La velocità è un vettore ottenuto dal prodotto di un vettore ($\Delta\mathbf{r}$) per uno scalare ($1/\Delta t$). La sua direzione ed il suo verso sono quelli di $\Delta\mathbf{r}$.

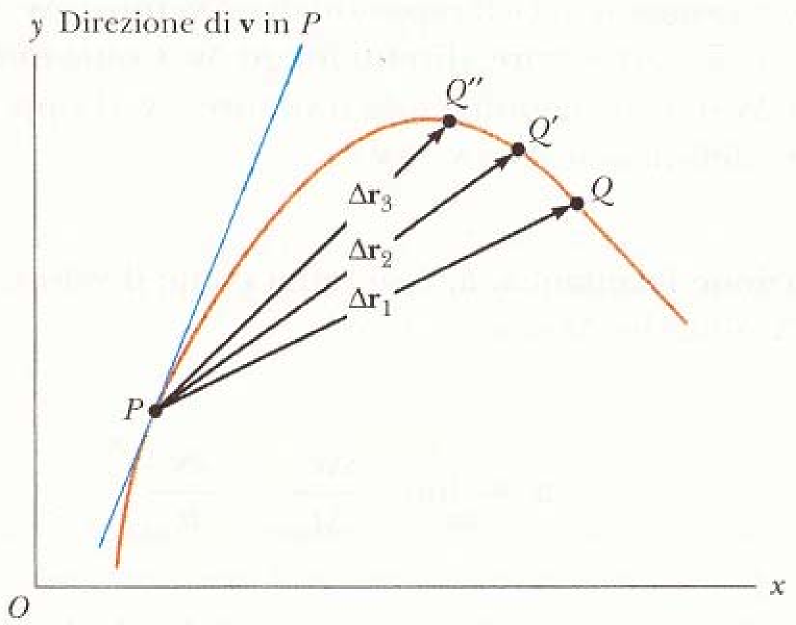


Figura 3.2 Quando una particella si muove fra due punti, la sua velocità media ha la direzione del vettore spostamento $\Delta\mathbf{r}$. Quando il punto Q si sposta verso il punto P, la direzione di $\Delta\mathbf{r}$ tende a quella della tangente alla curva in P. Per definizione, la velocità istantanea in P ha la direzione della tangente.

La **velocità istantanea**, $\mathbf{v}$, è definita come il limite della velocità media $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ allorquando Δt tende a zero:

$$\mathbf{v} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

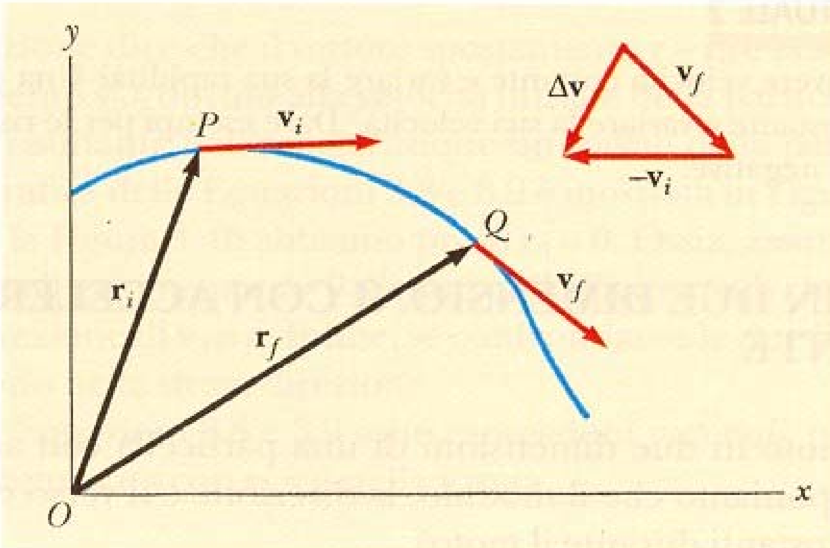


Figura 3.3 Il vettore accelerazione media, $\overline{\mathbf{a}}$, per una particella che si muove da P a Q ha la direzione della variazione di velocità $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i$.

L'**accelerazione media** della particella nel suo moto da P a Q è definita come il rapporto della variazione del vettore velocità istantanea $\Delta\mathbf{v}$ ed il tempo trascorso Δt

$$\overline{\mathbf{a}} \equiv \frac{\mathbf{v_f} - \mathbf{v_i}}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} \qquad [3.4]$$

L'**accelerazione istantanea, a,** è definita come il valore limite del rapporto $\Delta\mathbf{v}/\Delta t$ allorché Δt tende a zero:

$$\mathbf{a} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \qquad [3.5]$$

Moto in due dimensioni con accelerazione costante

Una particella in moto può essere descritta dal suo vettore posizione $\mathbf{r}$. Il vettore posizione per una particella in moto nel piano xy può essere scritto

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \qquad [3.6]$$

dove x, y ed $\mathbf{r}$ variano nel tempo al muoversi della particella. Se il vettore posizione è noto, la velocità della particella può essere ottenuta dalle Equazioni 3.3 e 3.6 che danno

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} \qquad [3.7]$$

Poiché $\mathbf{a}$ è una costante, le sue componenti a_x ed a_y sono pure costanti. Pertanto possiamo applicare le equazioni della cinematica ad entrambe le componenti x ed y del vettore velocità. Utilizzando l'Equazione 2.7 ($v = v_0 + at$), possiamo sostituire $v_x = v_{x0} + a_x t$ e $v_y = v_{y0} + a_y t$, nell'Equazione 3.7 e ottenere

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (v_{x0} + a_x t)\mathbf{i} + (v_{y0} + a_y t)\,\mathbf{j} \\ &= (v_{x0}\mathbf{i} + v_{y0}\mathbf{j}) + (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j})\,t \end{aligned}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t \qquad [3.8]$$

Similmente dall'Equazione 2.9 sappiamo che le coordinate x ed y di una particella in moto con accelerazione costante sono date da

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2} a_x t^2 \qquad \text{e} \qquad y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

Sostituendo queste espressioni nella Equazione (3.6) si ottiene

$$\mathbf{r} = (x_0 + v_{x0}t + \tfrac{1}{2} a_x t^2)\mathbf{i} + (y_0 + v_{y0}t + \tfrac{1}{2} a_y t^2)\mathbf{j}$$

$$= (x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}) + (v_{x0}\mathbf{i} + v_{y0}\mathbf{j})t + \tfrac{1}{2}(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j})t^2$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}t^2 \qquad [3.9]$$

Assumendo $\mathbf{r}_0 = 0$, le espressioni precedenti possono essere riscritte come:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t \qquad \begin{cases} v_x = v_{x0} + a_x t \\ v_y = v_{y0} + a_y t \end{cases}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}t^2 \qquad \begin{cases} x = v_{x0}t + \tfrac{1}{2} a_x t^2 \\ y = v_{y0}t + \tfrac{1}{2} a_y t^2 \end{cases}$$

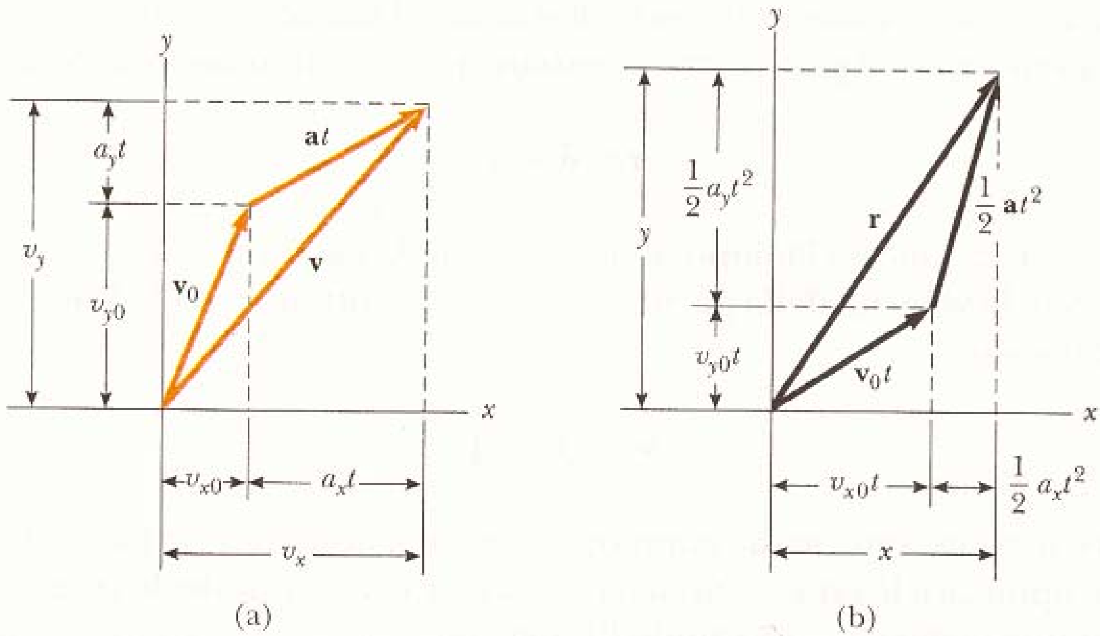


Figura 3.4 Rappresentazione vettoriale e componenti ortogonali (a) della velocità e (b) della posizione di una particella che si muove con una accelerazione costante **a**.

Esempio 3.1 Moto in un piano

Una particella parte dall'origine a $t = 0$ con una velocità iniziale avente una componente x di 20 m/s ed una componente y di –15 m/s. La particella si muove nel piano xy soltanto con la componente x dell'accelerazione costante, data da $a_x = 4.0$ m/s^2. (a) Determinare le componenti della velocità in funzione del tempo ed il vettore velocità risultante ad un generico istante.

Soluzione Poiché $v_{x0} = 20$ m/s ed $a_x = 4.0$ m/s^2, le equazioni cinematiche danno

$$v_x = v_{x0} + a_x t = (20 + 4.0t) \text{ m/s}$$

Inoltre, poiché $v_{y0} = -15$ m/s ed $a_y = 0$

$$v_y = v_{y0} = -15 \text{ m/s}$$

Pertanto, usando i risultati precedenti e notando che il vettore velocità **v** ha due componenti, otteniamo

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} = [(20 + 4.0t)\mathbf{i} - 15\mathbf{j}] \text{ m/s}$$

Avremmo anche potuto ottenere questo risultato usando direttamente l'Equazione 3.8, notando che $\mathbf{a} = 4.0\mathbf{i}$ m/s^2 e $\mathbf{v}_0 = (20\mathbf{i} - 15\mathbf{j})$ m/s. Provatelo!

(b) Calcolare la velocità della particella a $t = 5.0$ s.

Soluzione Con $t = 5.0$ s, il risultato ottenuto in (a) dà

$$\mathbf{v} = \{[20 + 4(5.0)]\mathbf{i} - 15\mathbf{j}\} \text{ m/s} = (40\mathbf{i} - 15\mathbf{j}) \text{ m/s}$$

Cioè, a $t = 5.0$ s, $v_x = 40$ m/s e $v_y = -15$ m/s. Conoscendo queste due compnenti per questo moto bidimensionale, conosciamo il valore numerico del vettore velocità. L'angolo θ che **v** forma con l'asse x può essere calcolato usando il fatto che $\tan\theta = v_y/v_x$, ovvero

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-15 \text{ m/s}}{40}\right) = -21°$$

Il modulo di **v** è dato da

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(40)^2 + (-15)^2} \text{ m/s} = 43 \text{ m/s}$$

(*Nota*: se calcoli v_0 dai componenti x e y di $\mathbf{v}_0$, puoi trovare che $v > v_0$. Perché?)

$\mathbf{v}=\mathbf{v}_0+\mathbf{a}t$

$\mathbf{v}_0=(20\mathbf{i}-15\mathbf{j})$ m/s
$\mathbf{a}=4.0\mathbf{i}$ m/s^2

$\mathbf{v}=(20\mathbf{i}-15\mathbf{j})$ m/s + 4.0 $\mathbf{i}$ m/s^2 t
=$(20\mathbf{i}-15\mathbf{j})$ m/s + 4.0t $\mathbf{i}$ m/s
=$(20\mathbf{i} +4.0t\mathbf{i} -15\mathbf{j})$m/s
=$[(20 +4.0t)\mathbf{i} -15\mathbf{j})]$m/s

Moto del proiettile

L'accelerazione **g** è costante lungo tutto il moto ed è diretta verso il basso
La resistenza dell'aria è trascurabile

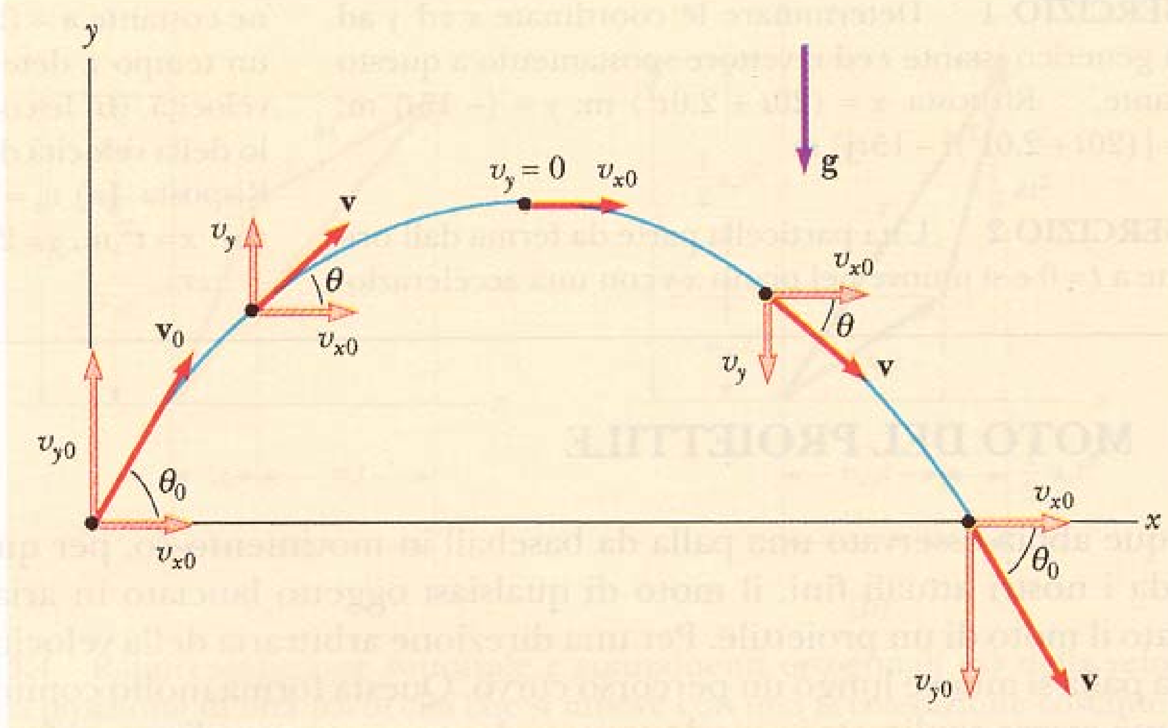


Figura 3.5 La traiettoria parabolica di un proiettile che parte dall'origine con velocità $\mathbf{v}_0$. Il vettore **v** varia nel tempo sia in modulo che in direzione. La variazione del vettore velocità è dovuta all'accelerazione nella direzione y negativa. La componente x della velocità rimane costante nel tempo perché non vi è accelerazione lungo la direzione orizzontale. Inoltre, la componente y della velocità si annulla nel punto più alto della traiettoria.

Per le ipotesi fatte:
$a_y = -g$
$a_x = 0$

Se il proiettile parte dall'origine a t = 0:
$x_0 = y_0 = 0$

$$v_{x0} = v_0 \cos\theta_0 \quad \text{e} \quad v_{y0} = v_0 \operatorname{sen}\theta_0$$

$$v_x = v_{x0} = v_0 \cos\theta_0 = \text{costante} \qquad [3.10]$$

• *Componente orizzontale della velocità*

$$v_y = v_{y0} - gt = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 - gt \qquad [3.11]$$

• *Componente verticale della velocità*

$$x = v_{x0}t = (v_0 \cos\theta_0)\, t \qquad [3.12]$$

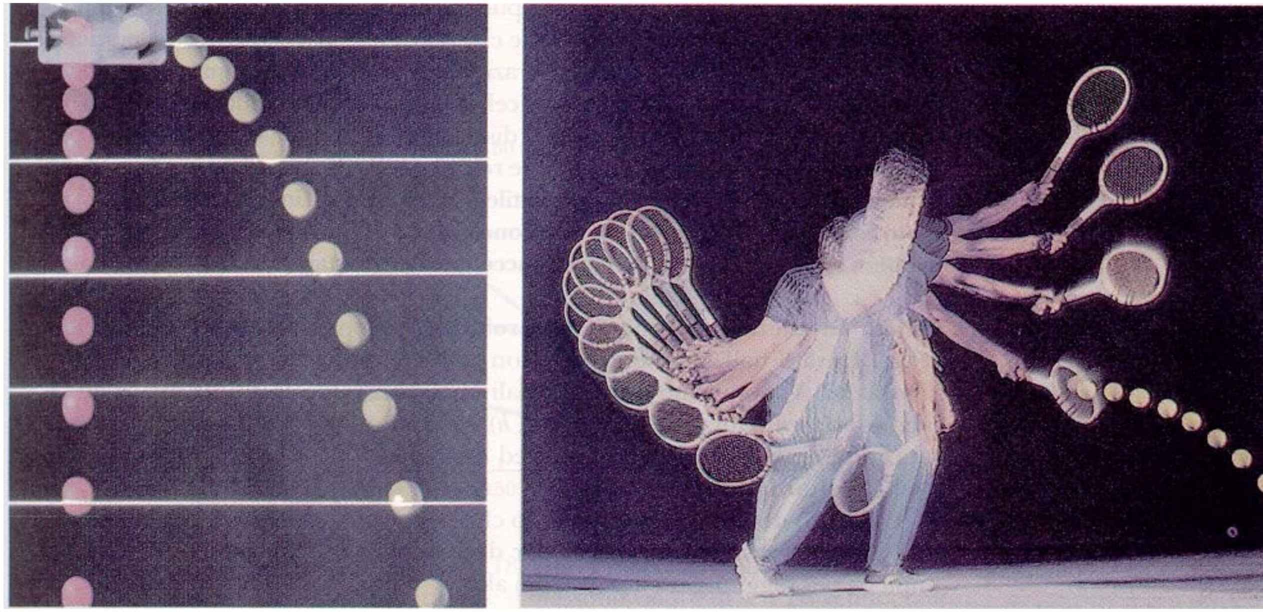
• *Componente orizzontale della posizione*

$$y = v_{y0}t - \tfrac{1}{2}gt^2 = (v_0 \operatorname{sen}\theta_0)\, t - \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad [3.13]$$

• *Componente verticale della posizione*

Ricavando t dalla 3.12 e sostituendo nella 3.13:

$$y = (\tan\theta_0)\, x - \left(\frac{g}{2\, v_0^2 \cos^2\theta_0}\right) x^2 \qquad [3.14]$$



$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_0\, t + \tfrac{1}{2}\, \mathbf{g}\, t^2$$

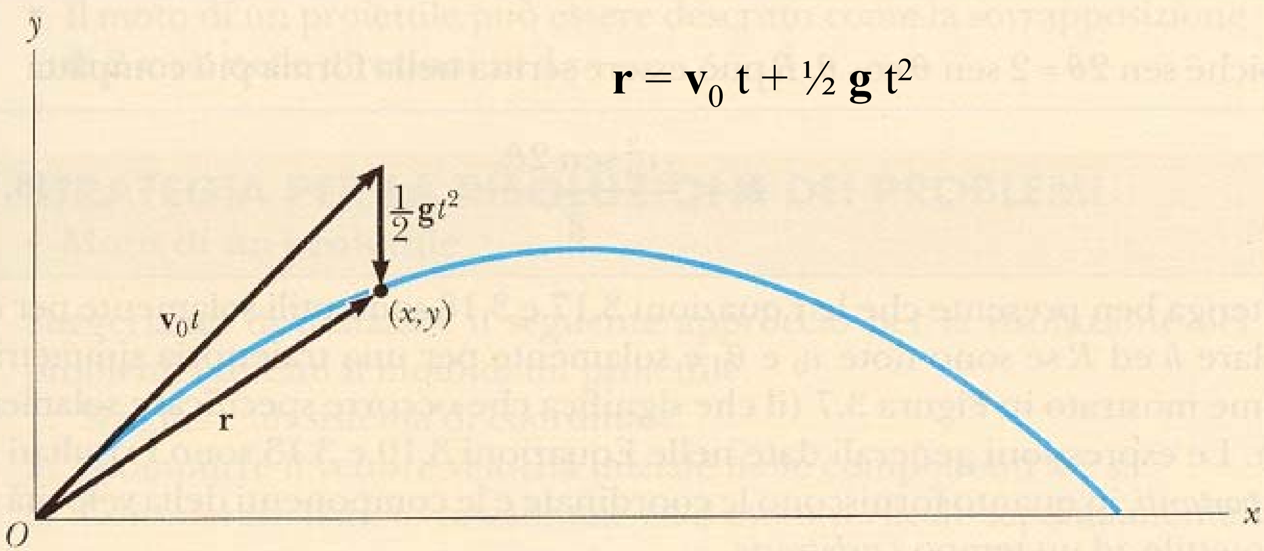


Figura 3.6 Il vettore posizione $\mathbf{r}$, di un proiettile che all'origine ha la velocità $\mathbf{v}_0$. Il vettore $\mathbf{v}_0 t$ sarebbe la posizione del proiettile al tempo t in assenza di gravità. Il vettore $\frac{1}{2}\mathbf{g}t^2$ è la sua posizione verticale dovuta alla gravità dopo il tempo t.

Il moto di un proiettile si può considerare come la sovrapposizione di due moti:

1) Moto con velocità costante nella direzione orizzontale
2) Moto di un corpo in caduta libera nella direzione verticale con accelerazione costante

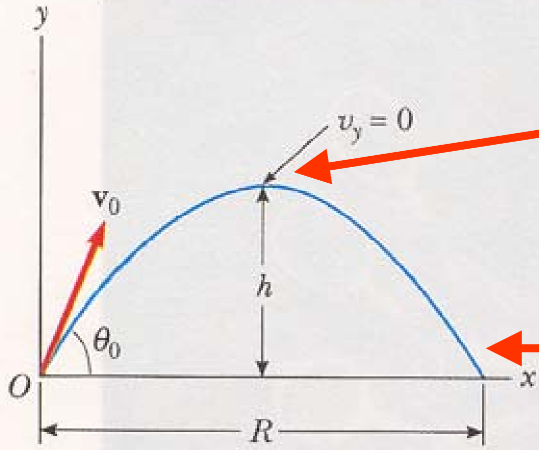
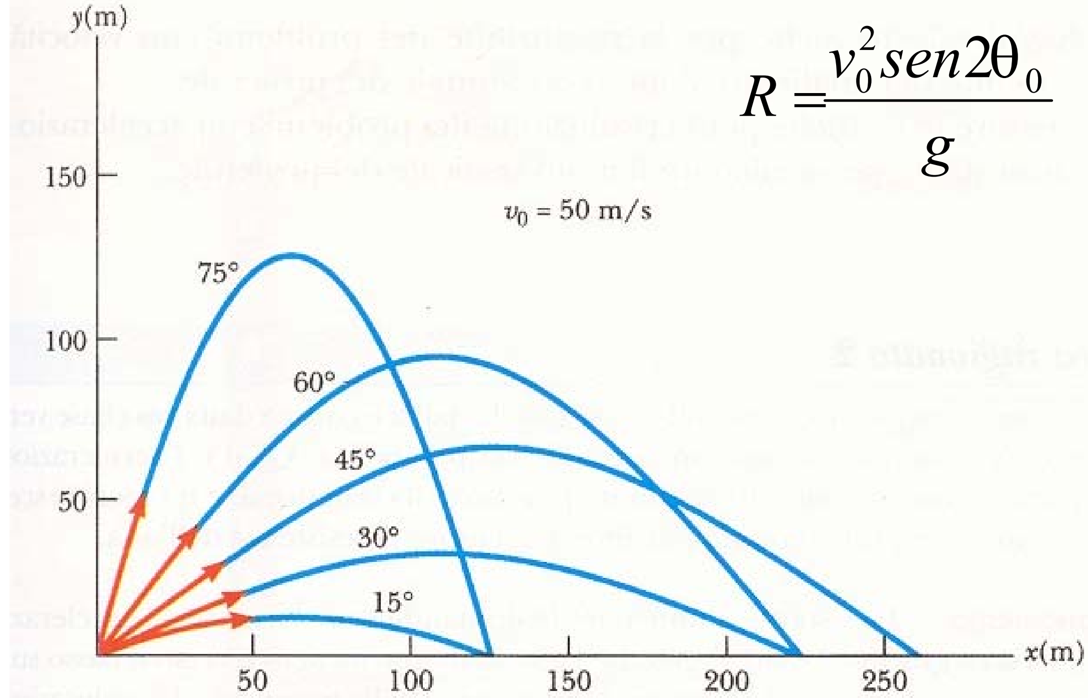


Figura 3.7 Un proiettile lanciato dall'origine con velocità iniziale $\mathbf{v}_0$ al tempo $t = 0$. La massima altezza del proiettile è h e la sua gittata è R. Nel punto più alto della traiettoria, la componente y della sua velocità è nulla e il proiettile ha coordinate $(R/2, h)$.

Che accelerazione ha nel punto più alto?

Che velocità ha nel punto di contatto col suolo?

$$R = \frac{v_0^2 sen 2\theta_0}{g}$$



Esempio 3.3 Gli esploratori in difficoltà

Un aereo di soccorso lancia un pacco viveri di emergenza ad un gruppo di esploratori in difficoltà (Fig. 3.10). Se l'aereo vola orizzontalmente a 40.0 m/s ad un'altezza di 100 m rispetto al suolo, il pacco dove raggiungerà il suolo rispetto al punto in cui viene lasciato cadere?

Ragionamento e Soluzione Il sistema di riferimento viene scelto come mostrato in Figura 3.10, con direzione x positiva verso destra e direzione y positiva verso l'alto.

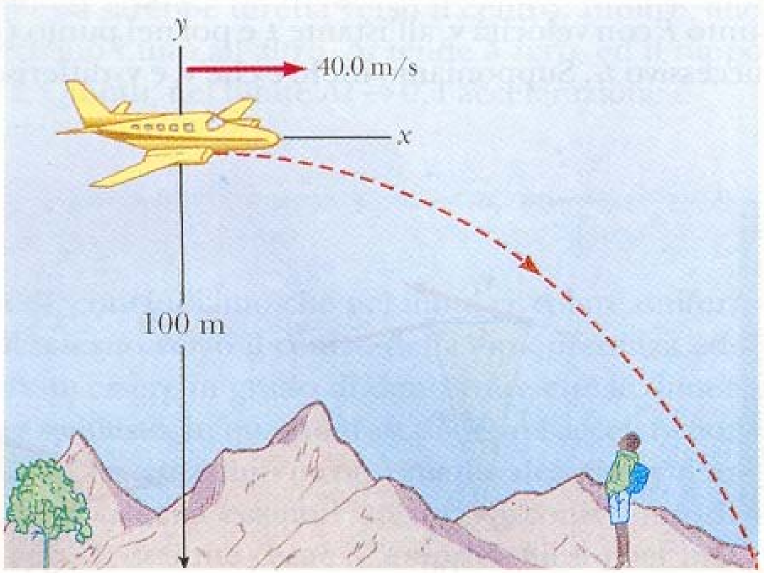


Figura 3.10 (Esempio 3.3) Per un osservatore a terra il pacco lasciato cadere dall'aereo di soccorso compie la traiettoria mostrata. Come apparirà la traiettoria seguita dal pacco a un osservatore sull'aereo (assumendo che si muova a velocità costante)?

Consideriamo dapprima il moto orizzontale del pacco. L'unica equazione disponibile è $x = v_{x0}t$. La componente x iniziale della velocità del pacco è la stessa della velocità dell'aereo al momento del lancio, 40.0 m/s. Abbiamo quindi

$$x = (40.0 \text{ m/s})t$$

Se conoscessimo t, la durata dell'intervallo di tempo in cui il pacco sta in aria, potremmo determinare x, la distanza percorsa dal pacco lungo l'orizzontale. Per determinare t, ricorriamo alle equazioni per il moto verticale del pacco. Sappiamo che all'istante in cui il pacco tocca il suolo, la sua coordinata y è –100 m. Sappiamo anche che la velocità iniziale del pacco nella direzione verticale, v_{y0} è nulla giacché il pacco è stato abbandonato solamente con componente orizzontale di velocità. Dalla Equazione 3.13, abbiamo

$$y = -\tfrac{1}{2}gt^2$$

$$-100 \text{ m} = -\tfrac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)t^2$$

$$t^2 = 20.4 \text{ s}^2$$

$$t = 4.51 \text{ s}$$

Questo valore del tempo di volo sostituito nell'equazione per la componente x dà

$$x = (40.0 \text{ m/s})(4.51 \text{ s}) = \boxed{180 \text{ m}}$$

Supponiamo che la funzione vettore posizione di un oggetto sia data da:

$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$

$\quad = (at+b)\,\mathbf{i} + (ct^2+d)\,\mathbf{j}$

Con $a = 1.00$ m/s, $b = 1.00$ m, $c = 0.125$ m/s^2 e $d = 1.00$ m.

Calcolare la velocità media nell'intervallo di tempo da $t = 2.00$ s a $t = 4.00$ s.

Nell'intervallo di tempo considerato si ha:

$\mathbf{v} = \mathbf{r}(4.00\ s) - \mathbf{r}(2.00\ s)]/(4.00\ s - 2.00\ s)$

$= [(1.00\ m \times 4.00\ m + 1.00\ m)\,\mathbf{i} + (0.125\ m/s^2 \times 4.00^2\ s^2 + 1.00\ m)\,\mathbf{j} -$
$(1.00\ m \times 2.00\ m + 1.00\ m)\,\mathbf{i} + (0.125\ m/s^2 \times 2.00^2\ s^2 + 1.00\ m)\,\mathbf{j}\ ]\ /2.00\ s$

$= [(5.00\ m)\,\mathbf{i} + (3.00\ m)\,\mathbf{j} - (3.00\ m)\,\mathbf{i} + (1.50\ m)\,\mathbf{j}\ ]\ /2.00\ s$

$= 1.00\ m/s\ \mathbf{i} + 0.75\ m/s\ \mathbf{j}$

La velocità in generale è data da:

$\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}(t)/dt$

$\quad = d[(at+b)\,\mathbf{i} + (ct^2+d)\,\mathbf{j}]/dt$

$\quad = a\,\mathbf{i} + 2ct\,\mathbf{j}$