Velocità media

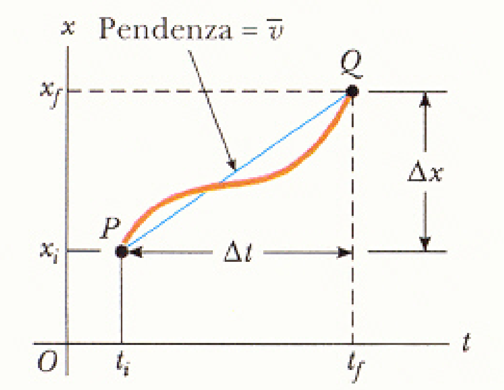


Figura 2.1 Grafico posizione-tempo per una particella in moto lungo l'asse x. La velocità media $\overline{v}_x$ nell'intervallo $\Delta t = t_f - t_i$ è la pendenza della retta congiungente P e Q.

Una particella si muove lungo una retta (moto unidimensionale). Lo spostamento si può scrivere, termini delle sua coordinata cartesiana x:

$\Delta x = x_f - x_i$

Tale spostamento avviene in un intervallo di tempo Δt:

$\Delta t = t_f - t_i$

In termini vettoriali:

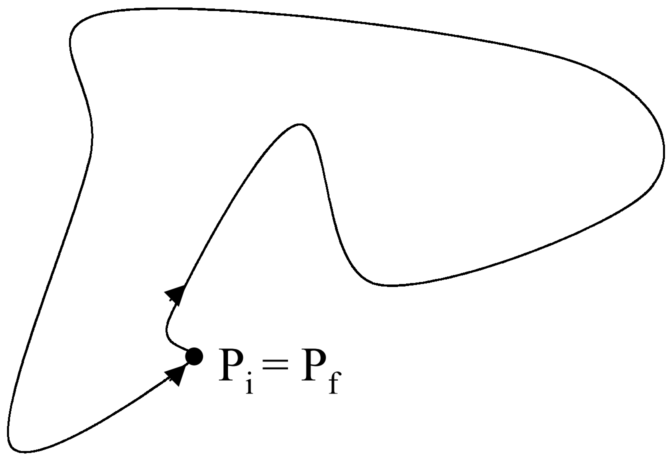
$\Delta \mathbf{x} = (x_f - x_i)\mathbf{i}$

Il componente x della **velocità media** della particella, $\overline{\mathbf{v}}_x$, è definito come il rapporto tra il suo vettore spostamento, $\Delta \mathbf{x}$, e l'intervallo di tempo Δt:

$$\overline{\mathbf{v}}_x \equiv \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta t} = \frac{(x_f - x_i)\,\mathbf{i}}{t_f - t_i} \qquad [2.1]$$

Le dimensioni di $\mathbf{v}_x$ sono L/T, ovvero m/s

Qual è la velocità media per il moto rappresentato in figura?



Dal momento che il vettore spostamento è nullo ($P_i = P_f$), la velocità media è nulla.

Segno della velocità

Dal momento che l'intervallo di tempo Δt è sicuramente positivo, la velocità media risulta positiva se Δx è positivo ($x_f > x_i$), mentre risulta negativa se Δx è negativo ($x_f < x_i$).

N.B.

La componente del vettore spostamento o velocità media può essere positiva o negativa.

Il modulo del vettore è sempre positivo.

Esempio

$\mathbf{\Delta x} = -2\mathbf{i}$

La componente x è –2, il modulo del vettore è 2.

Interpretazione geometrica della velocità

La velocità media della particella durante l'intervallo da t_i a t_f, rappresenta la pendenza del tratto di retta che congiunge i punti iniziale e finale del grafico spazio tempo.

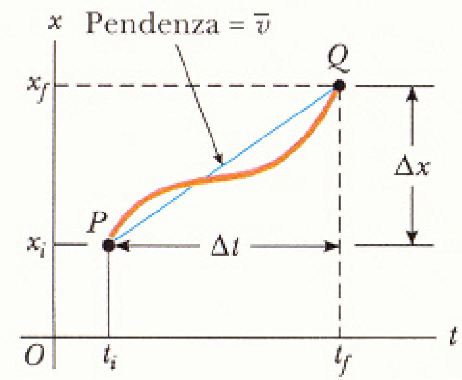


Figura 2.1 Grafico posizione-tempo per una particella in moto lungo l'asse x. La velocità media $\overline{v}_x$ nell'intervallo $\Delta t = t_f - t_i$ è la pendenza della retta congiungente P e Q.

Esempio 2.1 Calcolo della velocità media

Una particella in moto lungo l'asse x è posta ad x_i = 12 m a t_i = 1 s e ad x_f = 4 m a t_f = 3 s. Trovare lo spostamento e la velocità media in questo intervallo di tempo.

Soluzione Lo spostamento è dato da

$$\Delta \mathbf{x} = (x_f - x_i)\mathbf{i} = (4\text{ m} - 12\text{ m})\mathbf{i} = -8\mathbf{i}\text{ m}$$

La velocità media è

$$\overline{\mathbf{v}}_x = \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta t} = \frac{(x_f - x_i)\mathbf{i}}{t_f - t_i} = \frac{(4\text{ m} - 12\text{ m})\mathbf{i}}{3\text{ s} - 1\text{ s}} = -4\mathbf{i}\text{ m/s}$$

Poiché lo spostamento e la velocità media sono negativi in questo intervallo di tempo, concludiamo che la particella si è spostata verso sinistra, verso valori decrescenti della x.

Velocità istantanea

La velocità di una particella in istante di tempo arbitrario è detta velocità istantanea. Il concetto risulta particolarmente importante quando la velocità in diversi istanti di tempo non è costante.

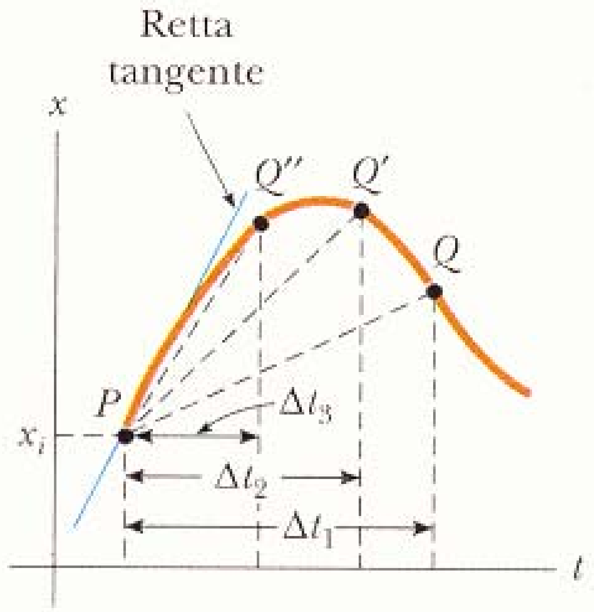


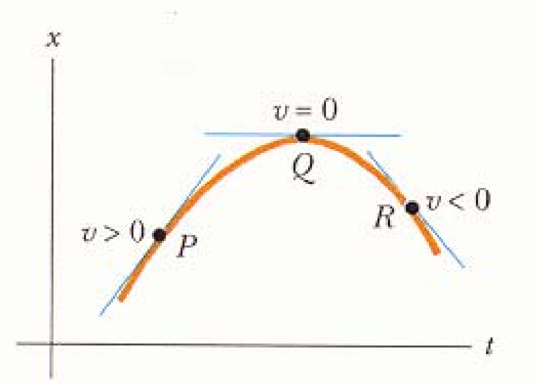
Figura 2.2 Grafico posizione-tempo per una particella in moto lungo l'asse *x*. Allorquando gli intervalli di tempo considerati a partire da t_i divengono sempre più piccoli, la velocità media per quell'intervallo tende alla pendenza della retta tangente in *P*. La velocità istantanea in *P* è definita come la pendenza della tangente all'istante t_i.

la velocità istantanea, $\mathbf{v}_x$, è uguale al valore limite del rapporto $\Delta\mathbf{x}/\Delta t$ quando Δt tende a zero[2]:

$$\mathbf{v}_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta t} \qquad [2.2]$$

Con la notazione del calcolo, questo limite è chiamato *derivata* di x rispetto a t, e scritto $d\mathbf{x}/dt$:

$$\mathbf{v}_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \qquad [2.3]$$



Esempio 2.2 Velocità media ed istantanea

Una particella si muove lungo l'asse x. La sua coordinata x varia con il tempo secondo l'espressione $x = -4t + 2t^2$, in cui x è in metri e t in secondi. Il grafico posizione-tempo per questo tipo di moto è mostrato in Figura 2.4. Si noti che la particella inizialmente si muove nella direzione x negativa per il primo secondo, si ferma istantaneamente a $t = 1$ s, e poi ritorna indietro nella direzione x positiva per $t > 1$ s.

(a) Determinare lo spostamento della particella negli intervalli di tempo da $t = 0$ a $t = 1$ s e da $t = 1$ s a $t = 3$ s.

Soluzione Nel primo intervallo di tempo noi possiamo porre $t_i = 0$ e $t_f = 1$ s. Poiché $x = -4t + 2t^2$, otteniamo per il primo spostamento

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{x}_{01} &= (x_f - x_i)\mathbf{i} = [-4(1) + 2(1)^2]\mathbf{i} - [-4(0) + 2(0)^2]\mathbf{i} \\ &= -2\mathbf{i}\ \text{m}\end{aligned}$$

Analogamente, nel secondo intervallo di tempo noi possiamo porre $t_i = 1$ s e $t_f = 3$ s. Pertanto, il secondo spostamento in questo intervallo è

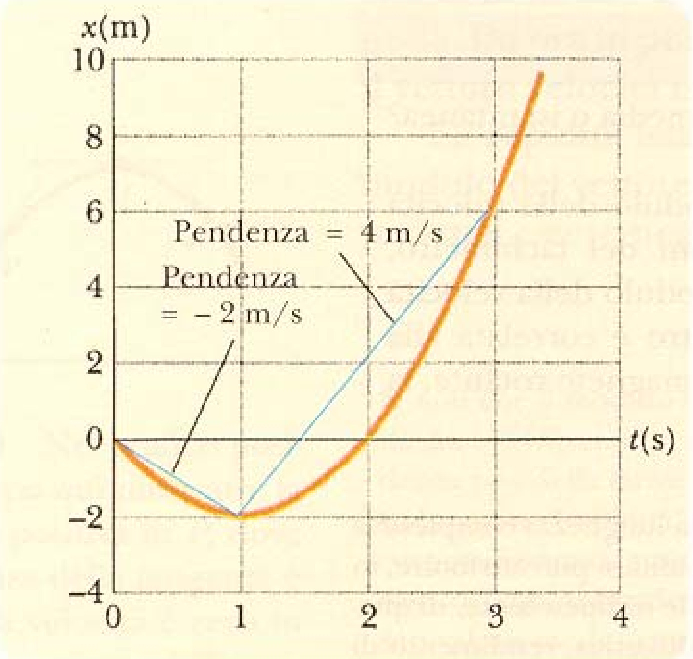


Figura 2.4 (Esempio 2.2) Grafico posizione-tempo per una particella la cui coordinata x varia nel tempo come $x = -4t + 2t^2$.

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{x}_{13} &= (x_f - x_i)\mathbf{i} = [-4(3) + 2(3)^2]\mathbf{i} - [-4(1) + 2(1)^2]\mathbf{i} \\ &= 8\mathbf{i}\ \mathrm{m}\end{aligned}$$

Notiamo che questi spostamenti possono essere rilevati direttamente dal grafico posizione-tempo (Fig. 2.4).

(b) Calcolare la velocità media negli intervalli di tempo da $t = 0$ s a $t = 1$ s e da $t = 1$ s a $t = 3$ s.

Soluzione Nel primo intervallo di tempo, $\Delta t = t_f - t_i = 1$ s. Pertanto, utilizzando l'Equazione 2.1, e dai risultati in (a) si ottiene

$$\bar{\mathbf{v}}_x = \frac{\Delta \mathbf{x}_{01}}{\Delta t} = \frac{-2\mathbf{i}\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{s}} = -2\mathbf{i}\ \mathrm{m/s}$$

Analogamente, nel secondo intervallo di tempo, $\Delta t = 2$ s; quindi,

$$\bar{\mathbf{v}}_x = \frac{\Delta \mathbf{x}_{13}}{\Delta t} = \frac{8\mathbf{i}\ \mathrm{m}}{2\ \mathrm{s}} = 4\mathbf{i}\ \mathrm{m/s}$$

Questi valori (coefficienti di **i**) corrispondono alle pendenze delle linee che uniscono questi punti nella Figura 2.4.

(c) Trovare la velocità istantanea della particella a $t = 2.5$ s.

Soluzione Possiamo trovare la velocità istantanea per qualunque istante di tempo t calcolando la derivata prima di x rispetto a t:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(-4t + 2t^2) = -4 + 4t$$

Quindi, per $t = 2.5$ s, troviamo che $v = -4 + 4(2.5) = 6$ m/s.

Possiamo pure ottenere questo risultato misurando la pendenza del grafico posizione-tempo per $t = 2.5$ s. (Dovresti mostrare che la velocità è -4 **i** m/s per $t = 0$ e zero per $t = 1$ s). Riesci a vedere una qualche simmetria nel moto? Per esempio, accade mai che il modulo della velocità si ripeta?

Esempio 1.5

Al tempo $t_1 = 5$ s, un'automobile si trova nella posizione $x_1 = 600$ m, e al tempo $t_2 = 15$ s in $x_2 = 500$ m. Trovare la sua velocità media.

Dall'Eq. 1.3,

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{500\text{ m} - 600\text{ m}}{15\text{ s} - 5\text{ s}}$$
$$= \frac{-100\text{ m}}{10\text{ s}} = -10\text{ m s}^{-1}$$

Si noti che $\bar{v}$ è negativa, e l'automobile si muove nella direzione $-x$ sebbene il valore della posizione x sia positivo.

Accelerazione

L'**accelerazione media** di una particella nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_f - t_i$ è definita come il rapporto $\Delta \mathbf{v}_x / \Delta t$, in cui $\Delta \mathbf{v}_x = \mathbf{v}_{xf} - \mathbf{v}_{xi}$ è la *variazione* di velocità nell'intervallo di tempo:

$$\bar{\mathbf{a}}_x \equiv \frac{\mathbf{v}_{xf} - \mathbf{v}_{xi}}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \mathbf{v}_x}{\Delta t} \qquad [2.4]$$

Accelerazione istantanea

$$\mathbf{a}_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_x}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}_x}{dt}$$

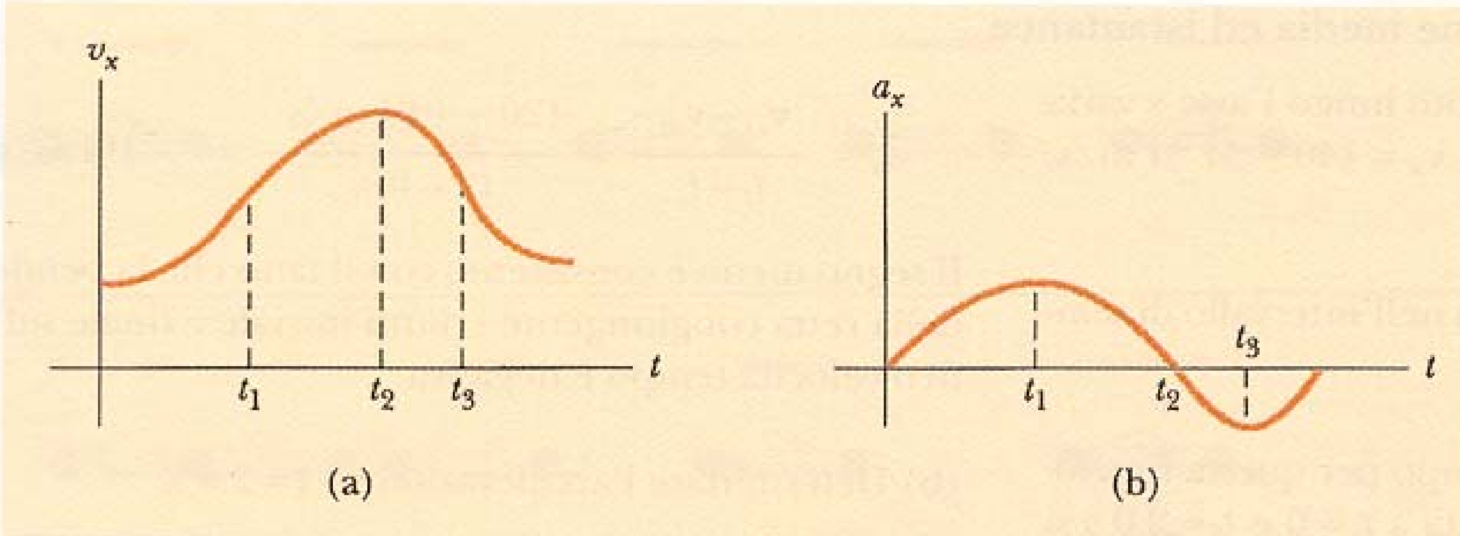


Figura 2.6 L'accelerazione istantanea può essere ottenuta dal grafico (a) velocità-tempo. A ciascun istante, l'accelerazione nel grafico (b) di a_x in funzione di t è uguale alla pendenza della tangente alla curva v in funzione di t.

$$\mathbf{a}_x = \frac{d\mathbf{v}_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right) = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$$

L’accelerazione media di questo moto è data da:

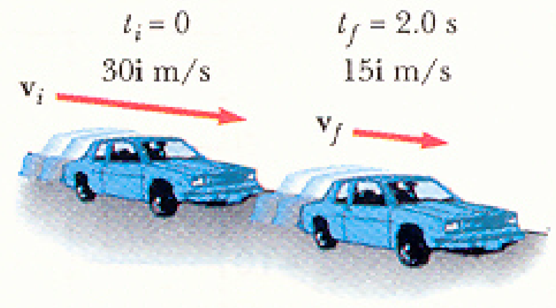


Figura 2.7 La velocità dell’auto diminuisce da $30\mathbf{i}$ m/s a $15\mathbf{i}$ m/s in un intervallo di tempo di 2.00 s.

$$\bar{a}_x = \frac{15\mathbf{i}\, m/s - 30\mathbf{i}\, m/s}{2.0 s} = -7.5\mathbf{i}\, m/s^2$$

Quando la velocità dell’oggetto e la sua accelerazione sono nello stesso verso, l’oggetto aumenta il modulo della velocità.
Se la velocità dell’oggetto e la sua accelerazione sono in versi opposti, il modulo della velocità dell’oggetto diminuisce nel tempo.

Esempio 2.4 Accelerazione media ed istantanea

La velocità di una particella in moto lungo l'asse x varia nel tempo secondo l'espressione $\mathbf{v}_x = (40 - 5t^2)\mathbf{i}$ m/s, dove t è in s.

(a) Trovare l'accelerazione media nell'intervallo di tempo da $t = 0$ a $t = 2.0$ s.

Soluzione Il grafico velocità-tempo per questa funzione è dato in Figura 2.8. Le velocità a $t_i = 0$ e $t_f = 2.0$ s si determinano sostituendo questi valori di t nella espressione data per la velocità:

$$\mathbf{v}_{xi} = (40 - 5t_i^2)\mathbf{i}\ \text{m/s} = [40 - 5(0)^2]\mathbf{i}\ \text{m/s} = 40\mathbf{i}\ \text{m/s}$$

$$\mathbf{v}_{xf} = (40 - 5t_f^2)\mathbf{i}\ \text{m/s} = [40 - 5(2)^2]\mathbf{i}\ \text{m/s} = 20\mathbf{i}\ \text{m/s}$$

Pertanto, l'accelerazione media nell'intervallo di tempo, $\Delta t = t_f - t_i = 2$ è data da

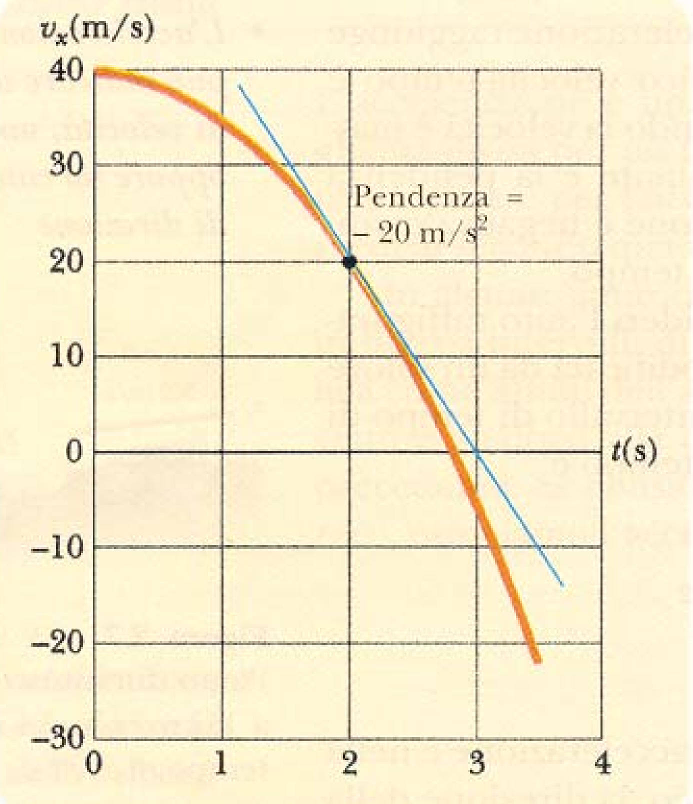


Figura 2.8 (Esempio 2.4) Grafico velocità-tempo per una particella in moto lungo l'asse x secondo la relazione $v_x = (40 - 5t^2)$ m/s. Si noti che l'accelerazione a $t = 2.0$ s è uguale alla pendenza della tangente a quell'istante.

lez

$$\bar{\mathbf{a}}_x = \frac{\mathbf{v}_{xf} - \mathbf{v}_{xi}}{t_f - t_i} = \frac{(20 - 40)\mathbf{i}\ \mathrm{m/s}}{(2 - 0)\mathrm{s}} = -10\mathbf{i}\ \mathrm{m/s^2}$$

Il segno meno è consistente con il fatto che la pendenza della retta congiungente i punti iniziale e finale sul grafico velocità-tempo è negativa.

(b) Determinare l'accelerazione a $t = 2.0$ s.

Soluzione La velocità al tempo t è data da $\mathbf{v}_{xi} = (40 - 5t^2)\mathbf{i}$ m/s, e la velocità al tempo $t + \Delta t$ è data da

$$\mathbf{v}_{xf} = 40\mathbf{i} - 5(t + \Delta t)^2\mathbf{i} = [40 - 5t^2 - 10t\,\Delta t - 5\,(\Delta t)^2]\mathbf{i}$$

Quindi, la variazione di velocità nell'intervallo di tempo Δt è

$$\Delta\mathbf{v}_x = \mathbf{v}_{xf} - \mathbf{v}_{xi} = [-10t\,\Delta t - 5\,(\Delta t)^2]\mathbf{i}\ \mathrm{m/s}$$

Dividendo questa espressione per Δt e considerando il limite del risultato per Δt che tende a zero, otteniamo l'accelerazione ad un *qualunque* istante t:

$$\mathbf{a}_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}_x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (-10t - 5\,\Delta t)\mathbf{i} = -10t\mathbf{i}\ \mathrm{m/s^2}$$

Pertanto, a $t = 2$ s si trova che

$$\mathbf{a}_x = (-10)(2)\mathbf{i}\ \mathrm{m/s^2} = -20\mathbf{i}\ \mathrm{m/s^2}$$

Si può ottenere questo risultato anche misurando la pendenza del grafico velocità-tempo a $t = 2.0$ s. Si noti come in questo esempio l'accelerazione non sia costante. Casi che implicano accelerazioni costanti verranno trattati nel Paragrafo 2.5.

$\mathbf{v}_x = (40 - 5\,t^2)\,\mathbf{i}$ m/s $\quad$ $\mathbf{a}_x = d\mathbf{v}_x/dt = -10t\,\mathbf{i}$ m/s $\quad$ $\mathbf{a}_x(2\ \mathrm{s}) = -10\times 2\,\mathbf{i}$ m/s

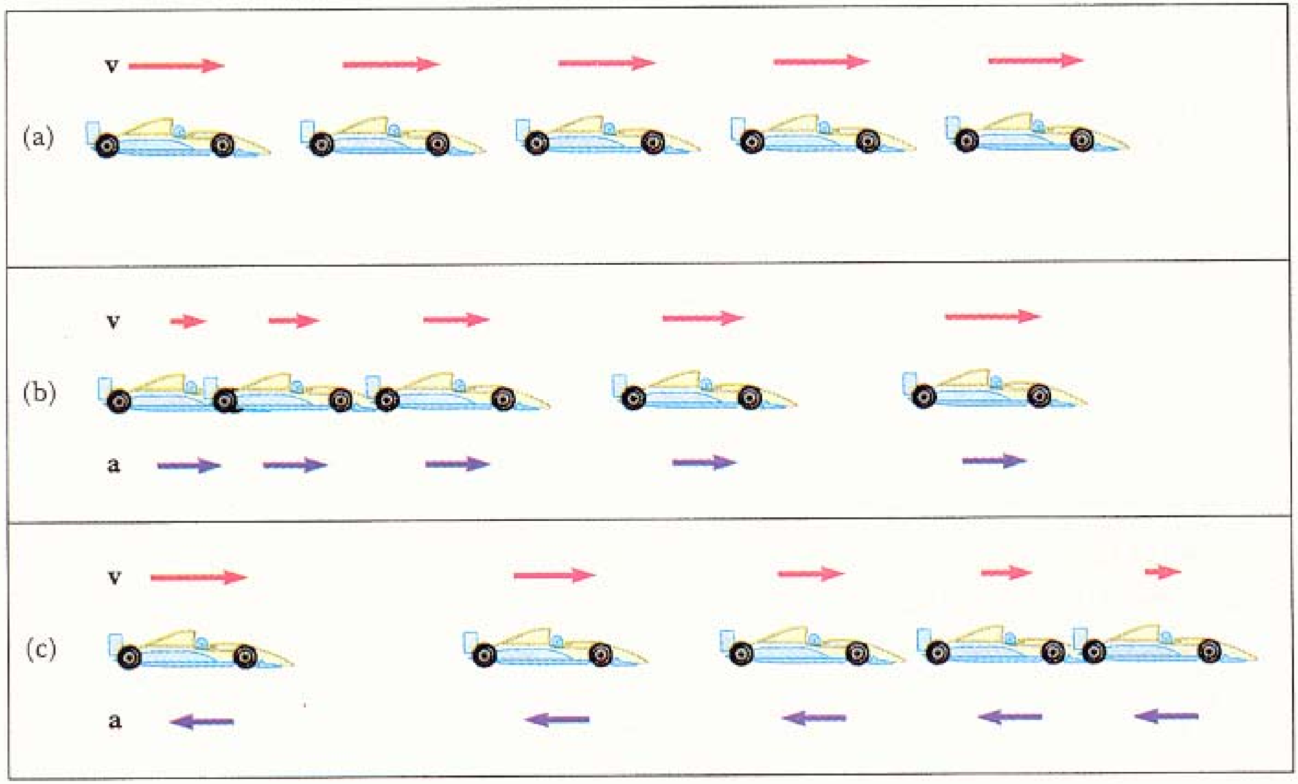


Figura 2.9 (a) Diagramma del moto per una macchina che si muove con velocità costante (accelerazione nulla). (b) Diagramma del moto per una macchina la cui accelerazione costante è nel verso della sua velocità. Il vettore velocità in ciascun istante è indicato da una freccia rossa e il vettore accelerazione costante da una freccia viola. (c) Diagramma del moto per una macchina la cui accelerazione costante è nel verso *opposto* alla velocità in ogni istante.

Moto unidimensionale con accelerazione costante

$$\mathbf{a}_x = \frac{\mathbf{v}_{xf} - \mathbf{v}_{xi}}{t_f - t_i}$$

velocità

$$a_x = \frac{v_x - v_{x0}}{t}$$

$$v_x = v_{x0} + a_x t \qquad \text{(per } a_x \text{ costante)}$$

$$\bar{v}_x = \frac{v_{x0} + v_x}{2} \qquad \text{(per } a_x \text{ costante)}$$

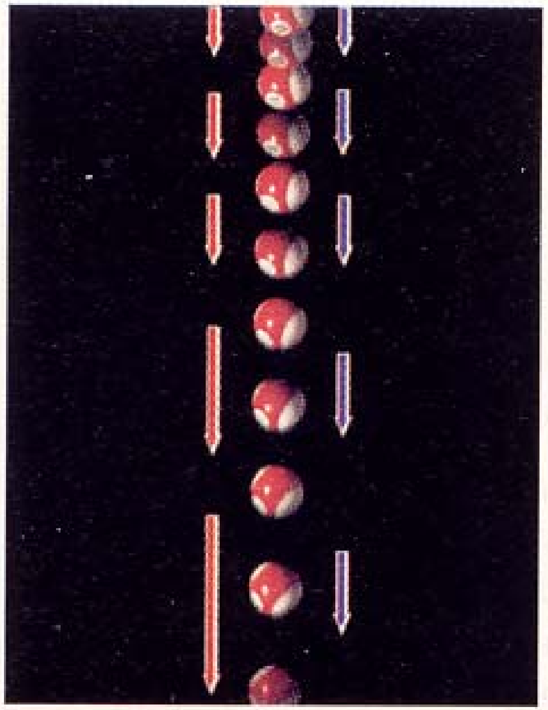


Figura 2.11 Foto "multi-flash" di una palla da biliardo in caduta. Mentre la palla cade, lo spazio tra le immagini successive aumenta, indicando che la palla accelera nel cadere. Il diagramma del moto mostra che la velocità della palla (frecce rosse) aumenta nel tempo mentre la sua accelerazione (frecce viola) rimane costante.
(© *Richard Megna 1990, Fundamental Photographs*)

posizione

$$\Delta x = \overline{v}_x \Delta t = \left(\frac{v_{x0} + v_x}{2}\right) t$$

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_{x0} + v_x)\, t \qquad \text{(per } a_x \text{ costante)}$$

$$x - x_0 = \tfrac{1}{2}(v_{x0} + v_{x0} + a_x t)\, t$$

$$x - x_0 = v_{x0} t + \tfrac{1}{2} a_x t^2 \qquad \text{(per } a_x \text{ costante)}$$

Differenziando l'espressione precedente si ottiene l'espressione per la velocità

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x_0 + v_{x0} t + \tfrac{1}{2} a_x t^2\right) = v_{x0} + a_x t$$

Espressione della velocità in funzione della posizione

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_{x0} + v_x)\left(\frac{v_x - v_{x0}}{a_x}\right) = \frac{v_x^2 - v_{x0}^2}{2a_x}$$

$$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0) \qquad \text{(per } a_x \text{ costante)}$$

TABELLA 2.2 Equazioni cinematiche per il moto rettilineo con accelerazione costante

Equazione	Informazione fornita dalla equazione
$v_x = v_{x0} + a_x t$	Velocità in funzione del tempo
$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_x + v_{x0})t$	Spostamento in funzione della velocità e del tempo
$x - x_0 = v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$	Spostamento in funzione del tempo
$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0)$	Velocità in funzione dello spostamento

Nota: il moto avviene lungo l'asse x. Per $t = 0$, la posizione della particella è x_0 e la sua velocità è v_{x0}.

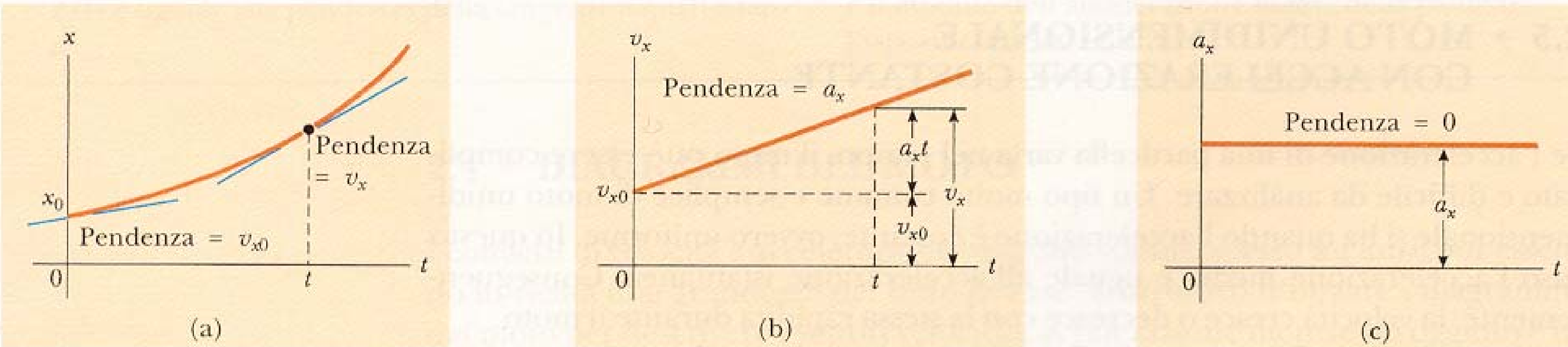


Figura 2.10 Una particella si muove lungo l'asse x con accelerazione costante a_x; (a) grafico posizione-tempo, (b) grafico velocità-tempo, (c) grafico accelerazione-tempo.

Esempio 1.10

Un'automobile ferma ad un semaforo accelera a $2\ \mathrm{m\ s^{-2}}$ quando la luce diventa verde. Qual'è (a) la velocità e (b) la posizione dopo 4 s?

(a) Si scelga l'origine al semaforo, per cui $x_0 = 0$.

Poiché si conoscono l'accelerazione a e il tempo t, si può trovare la velocità

$$v = at = (2\ \mathrm{m\ s^{-2}})(4\ \mathrm{s}) = 8\ \mathrm{m\ s^{-1}}$$

L'automobile ha raggiunto una velocità di $8\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ dopo 4 s dall'inizio del moto.

(b) Poiché si conoscono l'accelerazione e il tempo, si può trovare la posizione x

$$x = \tfrac{1}{2}at^2 = \tfrac{1}{2}(2\ \mathrm{m\ s^{-2}})(4\ \mathrm{s})^2 = 16\ \mathrm{m}$$

Dopo 4 s l'automobile ha percorso 16 m.

Esempio 1.12

Un'automobile accelera da ferma con una accelerazione costante di $2\ \mathrm{m\ s^{-2}}$ su una strada dove il traffico si muove stazionariamente a $24\ \mathrm{m\ s^{-1}}$. (a) Quanto tempo impiegherà l'automobile per raggiungere la velocità di $24\ \mathrm{m\ s^{-1}}$? (b) Quanto spazio percorrerà in quel tempo? (c) Il guidatore non vuole che il veicolo che gli sta dietro si avvicini più di 20 m né vuole costringerlo a rallentare. Quanto lunga deve essere l'interruzione nel traffico che egli deve attendere?

(a) Si pone $x_0 = 0$ nel punto di partenza. Quindi l'espressione $v = at$ fornisce il tempo necessario per accelerare.

$$t = \frac{v}{a} = \frac{24\ \mathrm{m\ s^{-1}}}{2\ \mathrm{m\ s^{-2}}} = 12\ \mathrm{s}$$

(b) la distanza percorsa in 12 s è

$$x = \tfrac{1}{2}at^2 = \tfrac{1}{2}(2\ \mathrm{m\ s^{-2}})(12\ \mathrm{s})^2 = 144\ \mathrm{m}$$