

УДК 629.7.05

ПРОБЛЕМИ ПРИ ИЗЧИСЛЯВАНЕ НА АБСОЛЮТНОТО УСКОРЕНИЕ НА САМОЛЕТ ПО ДАННИ ОТ GPS

А. Н. МАДЖАРОВ

Увод

При използване на глобалните навигационни спътникови системи (GPS) за гравитационни измервания в полет [4] се налага абсолютното ускорение на самолет да бъде изчислявано по данни, постъпващи от приемник на спътникови сигнали. Според принципа им на работа [1], изходните данни на тези приемници са местоположение и проекции на пътната скорост $W_{Ek}, W_{Nk}, W_{\zeta k}$ на центъра на маса на самолета, получавани в дискретни моменти от време t_k . Уравнения (6), (7) и (8) от [4] представят алгоритъм на система за измерване на гравитация в полет (GMS), като чувствителни датчици са тройка акселерометри, показанията на които се коригират от изходните данни на GPS. В тях е необходимо да се пресмятат инерционни съставящи, като едната от тях е необходимо да се получава след числено диференциране, например по метода на Ойлер: $[W_{Ek} - W_{E(k-1)}]/T$, $[W_{Nk} - W_{N(k-1)}]/T$, $[W_{\zeta k} - W_{\zeta(k-1)}]/T$. В този случай на числено диференциране се използват данни за пътната скорост от текущ и минал момент от време, които следват с период $T = t_k - t_{k-1}$. Дори при абсолютно точни показания от GPS е необходимо да се отчита, че те се получават в дискретни моменти от време, много по-рядко отколкото се снемат показания от акселерометрите. Или показанията на акселерометрите, снемани в междинни моменти от време $t_{k-1} + i\tau$, ($i = 0, 1, 2, \dots, j$) където j е цяло число и $\tau < T$, $j\tau = T$, ще се сравняват със стойности за абсолютно ускорение, които са вече остарели, били верни за отминал момент.

Този проблем може да бъде решен по един от двата варианта:

– По време на полет се извършва запис на данните от инерциалната навигационна система (INS) и от GPS. След полет, тези данни се обработват на земята. Инерциалните съставящи, присъстващи в показанията на акселерометрите в моментите от време $t_{k-1} + i\tau$ ще се пресмятат след *интерполация* на данните за скорост и местоположение от GPS, записани в съседни моменти от време $\dots, t_{k-2}, t_{k-1}, t_k, t_{k+1}, \dots$.

– В реален полет се извършва *екстраполация* за бъдещ момент $t_{k-1} + i\tau$, на базата на всички необходими данни от предишни моменти от време $\dots, t_{k-4}, t_{k-3}, t_{k-2}, t_{k-1}$.

Математически и в двата подхода, предложени за изчисляване на абсолютното ускорение на самолет има сходни проблеми. Практическата им реализация, евентуално би създавала трудности, които да доведат до предпочитане на единия, но най-подходящо е съвместното им използване.

Филтриращи свойства на числените методи

Докато методите за числено интегриране са ниско честотни филтри, то численото диференциране въздейства върху сигнала като високочестотен филтър.

Ще се спрем на втория подход за обработка на данни, защото би позволил максимално оползотворяване на наличната в полет информация за корекция на инерциални съставящи в алгоритъма на GMS. При необходимост данни x_{k-1}^* да бъдат екстраполирани за момента $t_{k-1} + i\tau$ с използване на m производни се използва екстраполираща функция:

$$\hat{x}[t_m + t_e] = x^*[t_m] + \frac{1}{1!} \hat{x}[t_m] t_e + \frac{1}{2!} \hat{\ddot{x}}[t_m] t_e^2 + \dots + \frac{1}{m!} \hat{x}^{(m)}[t_m] t_e^m, \quad (1)$$

в която: $t_e = mT + i\tau$ е време за екстраполация; $t_m = (k-1-m)T$ е предходен момент от време и следователно $t_m + t_e = (k-1)T + i\tau = t_{k-1} + i\tau$. При използване на усредняване по метод на най-малките квадрати (Least Squares Algorithm) с последващо диференциране, числена стойност за първа производна се пресмята по данни от предходни моменти:

$$\hat{\dot{x}}[t_m] = \frac{3}{\alpha(\alpha+1)(2\alpha+1)T} \sum_{v=-\alpha}^{\alpha} v x_{k-\alpha-m+v}^*, \quad (2)$$

където α е цяло число, а $2\alpha+1$ е ширина на плъзгащ прозорец. Всяка следваща производна в (1) се получава след последователно прилагане на (2). По този начин се получава плъзгащ се прозорец със ширина $l = 2m\alpha + 1$. Например при необходимост от $m = 2$ производни и избрано $\alpha = 1, \alpha \leq m$, първата производна е:

$$\hat{\dot{x}}_{k-3} = \frac{-x_{k-4}^* + x_{k-2}^*}{2T}, \quad (3)$$

втората ще бъде:

$$\hat{\ddot{x}}_{k-3} = \frac{x_{k-1}^* - 2x_{k-3}^* + x_{k-5}^*}{(2T)^2}, \quad (4)$$

при ширина на плъзгачия прозорец $l = 5$. Екстраполираната стойност, за време $t_e = 2T + i\tau$ в този пример ще бъде:

$$\begin{aligned} \hat{x}[(k-1)T + i\tau] &= x_{k-3}^* + \frac{2T + i\tau}{2T} (x_{k-2}^* - x_{k-4}^*) + \\ &+ \frac{(2T + i\tau)^2}{(2T)^2} (x_{k-1}^* - 2x_{k-3}^* + x_{k-5}^*), \end{aligned} \quad (5)$$

Вижда се, че всъщност (3) и (4) съответстват на числен метод за диференциране по първа и втора централни разлики. На първа централна разлика съответства метод за интегриране на Адамс-Башфорт. В [2] са изследвани честотните характеристики на най-често използваните методи за интегриране. Това са едно стъпкови методи, както и близките им методи за числено диференциране. След тяхното прилагане резултатът е изместен една стъпка наляво при интегриране или стъпка надясно при диференциране.

Аналогични филтриращи свойства има и изглаждащия филтър за пълзящо осредняване:

$$\hat{x}_i = \frac{1}{l} \sum_{v=i-\alpha m}^{i+\alpha m} x_v^*, \quad (6)$$

при който $l = 2m\alpha + 1$ е ширина на прозорец, като $l = 3, 5, 7, \dots$ се избира нечетно цяло число. Неговата амплитудно честотна характеристика е:

$$W_l(j\omega) = \frac{1}{l} \left| \frac{\sin(l\pi T\omega)}{\sin(\pi T\omega)} \right|. \quad (7)$$

Формата (6) се прилага при филтрация на запис от данни, защото използва стойности от минал и бъдещ момент, спрямо текущия i . Това налага в изходния резултат да не се отчитат началните $m\alpha$ и крайните $m\alpha$ стойности. Прилагането на цифровия филтър (6) довежда до дефазирание на резултата на $(l-1)/2$ стъпки на дясно. Възможно е рекурентното му прилагане във формата:

$$\hat{x}_i = \hat{x}_{i-1} + \frac{1}{l} (x_i^* - x_{i-l}^*). \quad (8)$$

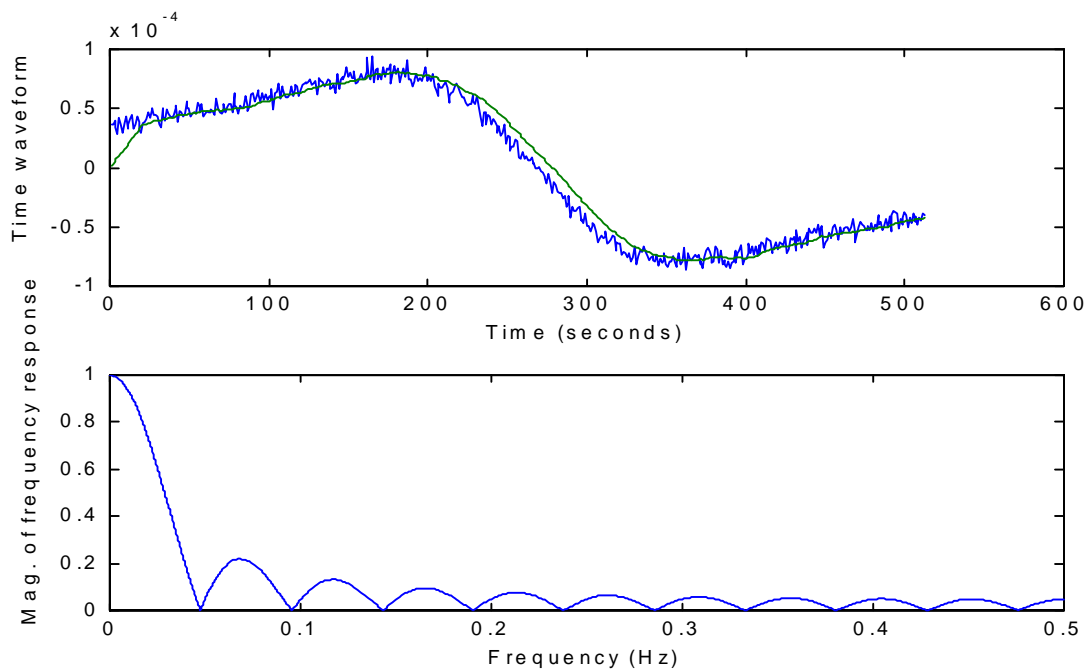
Двете форми (6) и (8) са всъщност дискретен аналог на l -кратно пълзящо интегрално осредняване:

$$\hat{x}_1(t) = \frac{1}{2T} \int_{-T+t}^{T+t} x(\tau) d\tau. \quad (9)$$

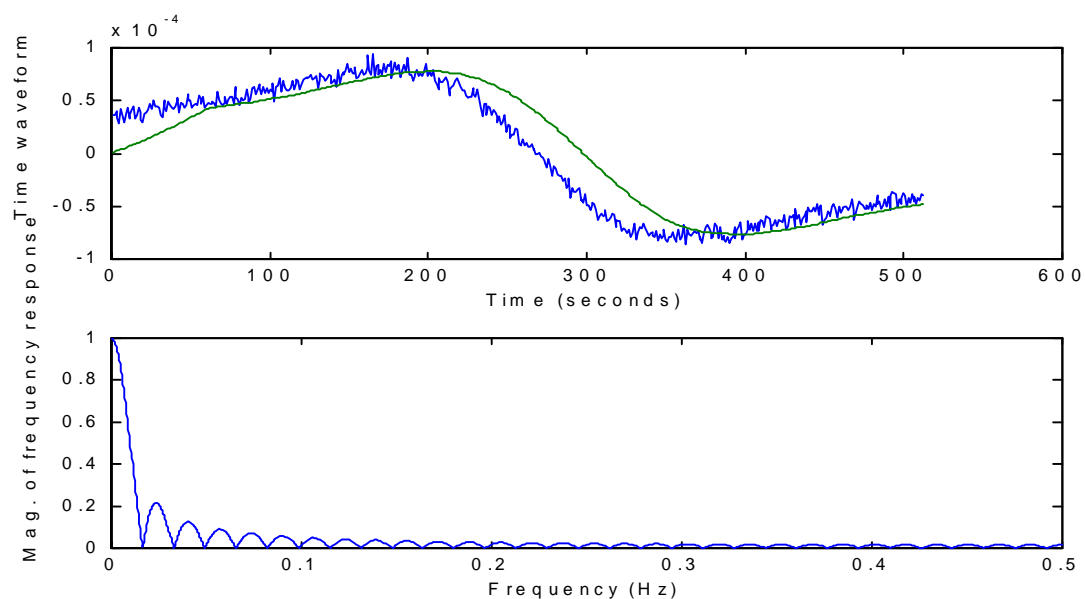
При прилагане на пълзящо осредняване от входния сигнал се отделя високо честотната съставяща. С увеличаване на ширината l на пълзящия прозорец се увеличава дефазиранието и намалява честотната лента на пропускане (фиг. 1 и фиг. 2).

Намирането на първа производна с филтриране по метода на най-малките квадрати и последващо диференциране по (2) също довежда до дефазирание на резултата на $(l-1)/2$ стъпки на дясно. Отново, с увеличаване на ширината на прозореца l се наблюдава намаляване на честотната лента на пропускане, като ефектът е на високочестотен филтър.

Използването на методи за числено диференциране по принцип не се препоръчва, поради нарастване на изчислителната грешка. При наличие на записан сигнал, от неговото Фурие изображение може да се избира основната честота. За нея се подбира и подходяща ширина l на прозорец. Според очаквания вид на обработваните данни е необходимо да се подбира



Фиг. 1 Пълзящо осредняване при $l=21$



Фиг. 2 Пълзящо осредняване при $l=61$

подходящи филтри, включително и числени методи за обработка. При подходящото им съчетаване е възможно да се постигне всяка желана точност.

Грешки при изчисляване на инерционни поправки от показания на GPS

Намаляване на грешката от дискретизация може да се постигне с прилагане на двустъпков метод (3) или многостъпков (4). Използването на стандартен GPS приемник ограничава минималната стойност на времето T до една минута [1]. В таблица 1 е дадено нарастването на останалите компоненти на абсолютното ускорение, според уравнение (7) в [4], при

моделиране на полет с хоризонтална пътна скорост $75m/s$, начална геодезическа ширина $B=42^\circ$ и дължина $L=21^\circ$, като измервателната ос η на навигационния базис се поддържа непрекъснато по направление на полета. Полетът е моделиран с постоянен истински курс $\psi=45^\circ$ и поради това северната и източна съставящи на скоростта са $53m/s$.

Таблица 1 Инерционни съставящи и техни нараствания

| [mGal] | съставяща | нарастване за 1s | Нарастване за 10s | нарастване за 20s | нарастване за 30s |
|---|------------|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $\Omega^2 G_k u_{13}^p u_{33}^p$ | -1.1945e+9 | -2.1055e+3 | -2.1040e+4 | -4.2048e+4 | -6.3022e+4 |
| $\Omega^2 G_k u_{23}^p u_{33}^p$ | 1.1945e+9 | 2.1055e+3 | 2.1040e+4 | 4.2048e+4 | 6.3022e+4 |
| $-\Omega^2 G_k (1 - u_{33}^{p2}),$ | -1.8743e+9 | 2.8100e+4 | 2.8100e+5 | 5.6201e+5 | 8.4302e+5 |
| $(\omega_\eta^p + 2\Omega_\eta)W_{\zeta k} - 2\Omega_\zeta W_{Nk}$ | -7.3236e+5 | -6.7711 | -6.7709e+1 | -1.3541e+2 | -2.0311e+2 |
| $-(\omega_\xi^p + 2\Omega_\xi)W_{\zeta k} + 2\Omega_\zeta W_{Ek}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $(\omega_\xi^p + 2\Omega_\xi)W_{Nk} - (\omega_\eta^p + 2\Omega_\eta)W_{Ek}$ | -5.7462e+5 | 4.3148 | 4.3149e+1 | 8.6303e+1 | 1.2946e+2 |

Променят се само резултатите в хоризонталните канали. По надлъжната ос на самолета се появява грешка в изчисляване на инерционните съставящи, която за $1s$ не превишава допустимите $0.5mGal$.

Първите три съставящи от таблица 1 всъщност се въвеждат, за да компенсират центробежното ускорение от въртенето на Земята, присъстващо в измерванията на акселерометрите [3]. Последните три съставящи от таблица 1 са за компенсиране на кориолисовото ускорение, присъстващо в показанията на акселерометрите, чрез използване на точни данни от GPS. От сравняване на резултатите в таблиците се вижда, че корекция по точни данни от GPS трябва да се извършва не по-рядко от $0.1s$, за да не се допусне нарастване на грешката в измерване на гравитационна аномалия над $0.5mGal$. При невъзможност да се осигуряват данни от приемник на GPS с такъв малък период трябва да се прилага екстраполация, например по (5), като се отчита $T = 60s$, $\tau = 0.1s$.

Таблица 2 Инерционни съставящи и техни нараствания при грешка в ориентиране на измервателния базис на 1°

| [mGal] | съставяща | нарастване за 1s | нарастване за 10s | нарастване за 20s | нарастване за 30s |
|---|------------|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $\Omega^2 G_k u_{13}^p u_{33}^p$ | -1.2152e+9 | -2.142e+3 | -2.140e+4 | -4.28e+4 | -6.41e+4 |
| $\Omega^2 G_k u_{23}^p u_{33}^p$ | 1.1735e+9 | 2.0685e+3 | 2.067e+4 | 4.13e+4 | 6.191e+4 |
| $-\Omega^2 G_k (1 - u_{33}^{p2}),$ | -1.8743e+9 | 2.8100e+4 | 2.8100e+5 | 5.6201e+5 | 8.4302e+5 |
| $(\omega_\eta^p + 2\Omega_\eta)W_{\zeta k} - 2\Omega_\zeta W_{Nk}$ | -7.3225e+5 | -6.7701 | -6.7699e+1 | -1.3539e+2 | -2.0308e+2 |
| $-(\omega_\xi^p + 2\Omega_\xi)W_{\zeta k} + 2\Omega_\zeta W_{Ek}$ | -1.2781e+4 | -0.11817 | -1.1817 | -2.3633 | -3.5448e |
| $(\omega_\xi^p + 2\Omega_\xi)W_{Nk} - (\omega_\eta^p + 2\Omega_\eta)W_{Ek}$ | -5.7462e+5 | 4.3148 | 4.3149e+1 | 8.6303e+1 | 1.2946e+2 |

От таблица 1 се вижда, че непрекъснатото точно ориентиране на хоризонталните оси на опорния навигационен базис по направлението на полета и перпендикулярно на него позволява да се намали грешката в измерването по надлъжната ос. При условията за моделиране на същия полет, при които са получени данните от таблица 1 е проследена грешката в изчисляване на инерционните съставлящи, възникнала от неточното ориентиране на измервателната ос. За целта, при постоянен курс $\psi=45^\circ$ се допуска неточно ориентиране на оста η на 1° (ъгъл $A=44^\circ$) спрямо север. Новите резултати са показани в таблица 2.

Изводи

Изследваните грешки зависят от географския район в който се извършва полета, но получените резултати доказват възможността за наблюдение на гравитационни аномалии до $0.5mGal$ при следните съществени изисквания:

1) Измерванията на акселерометрите се привеждат към базис, едната хоризонтална ос на който е винаги ориентирана по направление на полета. Това е инструментален базис, който всъщност се изчислява в алгоритъм на безплатформена навигационна система. Допустима е грешка по ъгъл на курс до 1° , за времето на корекция по данни от GPS.

2) Данните от GPS трябва да се използват за корекция през време не повече от $0.1s$, което е възможно след прилагане на интерполация.

3) Наличие на високочестотни смущение в показанията на GPS надеждно се отстраняват при усредняване по метода на най-малките квадрати или при използване на числено интегриране. Грешките от числените методи за интегриране и диференциране не биха довели до превишаване на допустимата грешка в изчисляване на гравитационни аномалии, ако се подбират внимателно, според вида на очакваната аномалия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маджаров А. Н., П. Ц. Тодоров, Структура и приложение на глобалните навигационни системи NAVSTAR и ГЛОНАСС. София, ИМО, 2000г.
2. Стоянов Ц. Т., А. Н. Маджаров, Преход от непрекъснат към дискретен модел на динамична система с използване на методи за числено интегриране. Доклад на Научна конференция, ВМЕИ Габрово, 25-27 ноември 1992.
3. Маджаров А. Н. Използване на модел на гравитационно поле в уравненията на инерциалната навигация. Научни трудове на ВВВУ "Г. Бенковски", бр. 61, 1999, стр. 54-62.
4. Маджаров А. Н. Гравитационни измервания в полет чрез инерциални навигационни системи и глобална радионавигационна система, работеща в диференциален режим. Научни трудове на ВВВУ "Г. Бенковски", бр. 62, 2000, стр. 122-131

УДК 629.7.05

**ПРОБЛЕМИ ПРИ ИЗЧИСЛЯВАНЕ НА АБСОЛЮТНОТО
УСКОРЕНИЕ НА САМОЛЕТ ПО ДАННИ ОТ GPS**

А. Н. МАДЖАРОВ

В тази работа се изследват проблемите при изчисляване на абсолютното ускорение с използване на изчислителни процедури за обработка на информация за пътни скорости. Подбира се стъпка на интерполация в известни алгоритми за обработка на експериментални данни, такава че грешката при изчисляване на ускорението да не превишава зададена.

УДК 629.7.05

**ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ АБСОЛЮТНОГО УСКОРЕНИЯ
САМОЛЕТА ОТ ДАННЫХ, ПОЛУЧЕННЫХ ОТ СИСТЕМЫ GPS**

А. Н. МАДЖАРОВ

Настоящая работа исследует проблем вычисления абсолютного ускорения, применением вычислительных процедур обработки информации от путевых скоростей. Выбирается шаг интерполяции, на основе известных алгоритмов для обработки экспериментальных данных, так что ошибка при вычислении ускорения не превысила бы заданной.

UDC 629.7.05

**PROBLEMS OF CALCULATION OF ABSOLUTE ACCELERATION OF
AN AIRPLANE FROM THE DATA OBTAINED FROM THE GPS**

A. N. Madjarov

The aim of the present work is to propose a research of problems for calculating of absolute acceleration from ground speeds. The step of interpolation is selected, on the basis of known algorithms for processing of experimental data, so the error at calculation of acceleration would not exceed given.