

Уравнението на меридианна елипса е:

$$i_0^2 = \frac{\cos^2 B}{\cos^2 \varphi_0} = \cos^2 B + (1 - e^2)^2 \sin^2 B = 1 - 2e^2 \sin^2 B + e^4 \sin^2 B, \quad (10)$$

има ясен геометричен смисъл. А именно от $\triangle NM'Z'$ и $\triangle OM'O'$ се вижда, че тя е отношението на геоцентрическото разстояние OM' към радиуса NM' на кривина за първа вертикала в точка M' :

$$i_0 = \frac{\cos B}{\cos \varphi_0} = \frac{y}{NM'} \frac{OM'}{y} = \frac{OM'}{NM'}. \quad (11)$$

Точна стойност на ъгъл μ , може да бъде изчислявана от зависимостите:

$$tg \mu_0 = tg(B - \varphi_0) \Leftrightarrow tg \mu_0 = \frac{tg B - tg \varphi_0}{1 + tg B tg \varphi_0} \Leftrightarrow \begin{cases} tg \mu_0 = \frac{e^2 tg \varphi_0}{1 - e^2 + tg^2 \varphi_0} \\ tg \mu_0 = \frac{e^2 tg B}{1 + (1 - e^2) tg^2 B} \end{cases}, \quad (12)$$

получени след заместване с (5), и в които индекс 0 показва, че стойността е валидна за точка от повърхността на референц-елипсоида, т.е. на височина 0.

Ако въведем величината:

$$\xi(B) = 1 / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}, \quad (13)$$

то точното равенство (12) подлежи на нови представяния:

$$tg \mu_0 = \frac{0.5e^2 \sin 2B}{1 - e^2 \sin^2 B} = 0.5e^2 \xi^2 \sin 2B, \quad (14)$$

$$tg \mu_0 = \frac{0.5e^2 \sin 2\varphi_0}{1 - e^2 \cos^2 \varphi_0}. \quad (15)$$

Точна стойност на текущите координати $y=OY'$, $z=OZ'$ (фиг.2) на точка M' също могат да се представят чрез въведената величина (13). След заместване на (1), (5) и (13) в (2) и съответните преобразувания се получава:

$$y = \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} tg^2 B}} = \frac{a \cos B}{\sqrt{\cos^2 B + (1 - e^2) \sin^2 B}} = \frac{a \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} = a \xi \cos B$$

$$z = y \frac{b^2}{a^2} tg B = a \frac{b^2}{a^2} tg B \xi \cos B = a(1 - e^2) \xi \sin B \quad (16)$$

По-нататък ще са необходими и дължините на отсечките NM' , OM' , OM' , NO и OO' (фиг.2). От $\triangle MNZ'$, $\triangle M'OY'$, $\triangle M'OZ'$, $\triangle NOO'$ могат да се изведат следните зависимости:

$$\begin{aligned} y &= NM' \sin(90 - B) \Rightarrow NM' = a \xi; \\ z &= OM' \sin B \Rightarrow OM' = a \xi (1 - e^2); \\ NO' &= NM' - OM' = a \xi e^2; \\ OO' &= NO' \cos B = a \xi e^2 \cos B, \\ NO &= NO' \sin B = a \xi e^2 \sin B, \end{aligned} \quad (17)$$

$$OM' = \sqrt{y^2 + z^2} = a\xi\sqrt{1 - 2e^2 \sin^2 B + e^4 \sin^2 B} = a\xi i_0.$$

От тях се вижда и геометрическият смисъл на другата въведена безразмерна величина ξ . Тя е отношение на радиуса NM' на кривина за първа вертикала на референц-елипсоида към екваториалния радиус a .

След разлагане на функцията $tg\varphi_0 = tg(B - \mu_0)$ в ред на Тейлор спрямо B и с отчитане, че ъгъл μ_0 е малък, се получава:

$$\frac{b^2}{a^2} tgB = tg\varphi_0 = tg(B - \mu_0) = tgB - \frac{1}{\cos^2 B} \mu_0 + o(\mu_0), \quad (18)$$

където с $o(\mu_0)$ е обозначена малка величина от висш порядък спрямо μ_0 . От тук, за $\mu_0 = B - \varphi_0$ се получават традиционно използваните приближени стойности:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2 B} \mu_0 &= tgB + o(\mu_0) - \frac{b^2}{a^2} tgB, \\ \mu_0 &= \cos^2 B \left[tgB - \frac{b^2}{a^2} tgB + o(\mu) \right] \approx \cos^2 B tgB \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) = e^2 \cos B \sin B, \\ \mu_0 &\approx 0,5e^2 \sin 2B \approx 0,5e^2 \sin 2\varphi_0. \end{aligned} \quad (19)$$

Вижда се, че най-голяма разлика $0,5e^2 = 3,3467 \cdot 10^{-3} rad = 11' 30,31''$ между B и φ_0 има при географска ширина $44,9038^\circ$ (с точност $0,36''$). Точността на (19) е $2,32''$ и се проверява чрез сравняване на изчисления по нея и (14).

До тук считаме, че точка M' лежи в равнината OZY . Поради симетрията на ротационния елипсоид, изведените зависимости са валидни и във всяка друга меридианна равнина. Ако меридиана на точка M' сключва ъгъл L с гринуическия меридиан, то нейните декартови координати в геодезическата координатна система (фиг.1) се получават съгласно (16) и (17):

$$\begin{aligned} x &= OY' \cos L = a\xi \cos B \cos L, \\ y &= OY' \sin L = a\xi \cos B \sin L, \\ z &= a\xi(1 - e^2) \sin B, \end{aligned} \quad (20)$$

като разстоянието от центъра на Земята до повърхността на референц-елипсоида е:

$$\begin{aligned} R_0 &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a\xi \sqrt{\cos^2 B + (1 - e^2)^2 \sin^2 B} = \\ &= a\sqrt{\cos^2 B + (1 - e^2)^2 \sin^2 B} / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} = a\xi i_0; \end{aligned} \quad (21)$$

$$R_0 = a(1 - 0,5e^2 \sin^2 B) + o(e^2) = a(1 - 0,5e^2 \sin^2 \varphi_0) + o(e^2);$$

$$R_0 \approx a(1 - 0,5e^2 \sin^2 B) \approx a(1 - 0,5e^2 \sin^2 \varphi). \quad (22)$$

Основни геометрически съотношения, отнасящи се до точка от околоземното пространство

Ако точка M се намира на височина $h=MM'$ над повърхността на елипсоида, приемана за нулева, то:

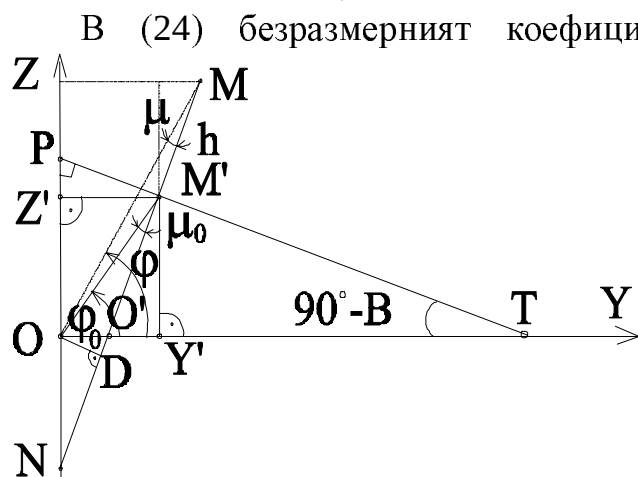
$$x = (a\xi + h)\cos L \cos B, y = (a\xi + h)\sin L \cos B, z = [a\xi(1 - e^2) + h] \sin B. \quad (23)$$

Съответно, геоцентрическото разстояние (фиг. 3) ще бъде:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = (a\xi + h) \sqrt{1 - 2\left(\frac{a\xi}{a\xi + h}e^2\right)\sin^2 B + \left(\frac{a\xi}{a\xi + h}e^2\right)^2 \sin^2 B} = (a\xi + h)i, \quad (24)$$

а аналогичното на (5) $\operatorname{tg} \varphi_0 = (1 - e^2)\operatorname{tg} B$, равенство за връзка между геоцентрическата и геодезическата ширина:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \left(1 - \frac{a\xi e^2}{a\xi + h}\right) \operatorname{tg} B = \frac{a\xi(1 - e^2) + h}{a\xi + h} \operatorname{tg} B. \quad (25)$$



Фиг. 3

В (24) безразмерният коефициент i , явяващ се отношение на геоцентрическото разстояние към радиуса на първа вертикала зависи от височината h на полета над референц-елипсоида. Той ще намалява с увеличаване на височината h и максималната му стойност ще е i_0 (10).

От (25), аналогично на (12)-(14) е възможно точно да се изчисли стойността на разликата между геоцентрическа и

геодезическа вертикали с отчитане височината на полета:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\frac{a}{\xi}}{\frac{a}{\xi} + h} \operatorname{tg} \mu_0 = \frac{a \operatorname{tg} \mu_0}{a + \xi h} = \frac{\frac{a \xi e^2}{a\xi + h} \sin B \cos B}{1 - \frac{a \xi e^2}{a\xi + h} \sin^2 B} = \frac{e^2 \xi^2}{1 + \xi \frac{h}{a}} \sin B \cos B. \quad (26)$$

От (26) и фиг.3 се вижда, че с увеличаване на височината на полета h разликата между двете вертикали намалява. След разлагане на функцията (25) в ред на Тейлор спрямо B и с отчитане, че ъгъл μ е малък, се получава негова приближена стойност:

$$\left(1 - \frac{a \xi e^2}{a\xi + h}\right) \operatorname{tg} B = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} (B - \mu)$$

$$\frac{a \xi (1 - e^2) + h}{a\xi + h} \operatorname{tg} B \approx \operatorname{tg} B - \frac{\mu}{\cos^2 B} + 0(\mu)$$

$$\mu \approx \frac{a\xi e^2}{a\xi + h} \cos B \sin B, \quad \mu \approx \frac{a\xi}{a\xi + h} \mu_0. \quad (27)$$

По начина на извеждане на (9) от (25) се получава:

$$\frac{d\varphi}{dB} = \frac{1}{i^2} \frac{a\xi(1-e^2)+h}{a\xi+h} \left[1 - \frac{\left(h \frac{d\xi}{dB} - \xi \frac{dh}{dB} \right) a e^2 \cos B \sin B}{(a\xi+h)(a\xi+h-ae^2\xi)} \right], \quad (28)$$

като: $\frac{1}{i} = \frac{\cos \varphi}{\cos B}$, $\frac{d\xi}{dB} = e^2 \xi^3 \cos B \sin B$. При движение на постоянна височина над референц-елипсоида:

$$\frac{dh}{dB} = 0 \Rightarrow \frac{d\varphi}{dB} = \frac{1}{i^2} \frac{a\xi(1-e^2)+h}{a\xi+h} \left[1 - \frac{hae^4 \xi^3 \cos^2 B \sin^2 B}{(a\xi+h)(a\xi+h-ae^2\xi)} \right]. \quad (29)$$

Ортодромическа координатна система геодезически тип

Тази координатна система е подходяща за използване, когато в навигационните алгоритми се използва геодезическа вертикала. Нейните оси са успоредни на XYZ , но за център се взема подвижната точка N , с координати в XYZ : $(0,0, -ae^2\xi \sin B)$. Вертикалната проекция DM на геоцентрическото разстояние OM (фиг. 3) е: $DM = a\xi^{-1} + h$, а хоризонталната: $OD = ae^2\xi \sin B \cos B$.

Резултати и изводи

Естествено възниква въпросът, кога и при какви условия е необходимо точно изчисляване на геоцентрическото разстояние. Пренебрегването на събираемите, съдържащи $e^4 = 4,4815 \cdot 10^{-5}$ в (24) и (25) не е допустимо в случай, че на височина 200m имаме стойност $h/a = 3,1357 \cdot 10^{-5}$ от същия порядък. Върху земната сфера 1' е приблизително 31m. В навигационни алгоритми за достигане на точност $3 \div 15m$ е задължително използването на въведените тук коефициенти (10) и i в (24). Наложилата се в употреба ортодромическа координатна система геодезически тип изисква изчисляване на точното (24) геоцентрическо разстояние при проектиране силата на гравитационно взаимодействие по геодезическата вертикала [2]. В алгоритми от по-нисък клас е допустимо използването на приближените съотношения [3].

В таблица 1 е показана грешката в метри $\Delta\varphi R = (\varphi^* - \varphi)R$, където геоцентрическата ширина $\varphi^* = B - e^2 \sin B \cos B$ е изчислена по приближената формула (19), а φ и R се изчисляват точно по (25) и (21).

Таблица 1 $\Delta\phi R[m]$

B[deg]\h[m]	0	50	100	150	200	250	300
15	4.7766	4.6930	4.6093	4.5256	4.4420	4.3583	4.2746
30	30.9083	30.7634	30.6184	30.4735	30.3286	30.1837	30.0388
45	71.4794	71.3120	71.1447	70.9774	70.8100	70.6427	70.4754
60	92.9844	92.8395	92.696	92.5497	92.4047	92.2598	92.115
75	66.853	66.769	66.6857	66.6020	66.5184	66.4347	66.351

В таблица 2 са грешките $\Delta R = R - R^*$, когато R^* е изчислена по приближената формула (22) $R^* = a(1 - 0.5e^2 \sin^2 B)$, а R се изчислява точно по (21).

Таблица 2 $\Delta R[m]$

B[deg]	h[m]0	50	100	150	200	250	300
15	8.7756	8.7755	8.7755	8.7754	8.7753	8.7753	8.7752
30	24.6228	24.6226	24.6224	24.6221	24.6219	24.6217	24.6215
45	26.9548	26.9545	26.9542	26.9540	26.9537	26.9534	26.9531
60	6.8498	6.8496	6.8494	6.8492	6.8490	6.8487	6.8485
75	-22.1777	-22.1778	-22.1779	-22.1779	-22.1780	-22.1781	-22.1782

Таблица 3 $\delta\mu_0["]$ като разлика в изчисленията по (14) и (19) при $h=0$

B[deg]	15	30	45	60	75
$\delta\mu_0["]$	0.15450541	1.0003696	2.3154220	3.0145680	2.1687265

Таблица 4 $\delta\mu["]$ като разлика в изчисленията по (26) и (27)

B[deg]	h[m]0	50	100	150	200	250	300
15	0.1545054	0.1545029	0.1545005	0.15449815	0.15449573	0.15449331	0.15449089
30	1.0003696	1.0003539	1.0003382	1.0003225	1.0003069	1.0002912	1.0002755
45	2.3154220	2.3153857	2.3153494	2.3153131	2.3152769	2.3152406	2.3152043
60	3.0145680	3.0145207	3.0144735	3.0144262	3.0143790	3.0143317	3.01428450
75	2.1687265	2.1686925	2.1686585	2.1686245	2.1685905	2.1685565	2.1685225

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабич О. А. Обработка информации в навигационных комплексах. Москва, Машиностроение, 1991, 512 стр.
2. Маджаров А. Н. Точно изчисляване на силата на тежестта във височина. Научни трудове на ВВБУ "Г. Бенковски", бр. 61, 1999, стр.
3. Маджаров А. Н. Един алгоритъм за съвместно използване на информацията от ИКВ и GPS. Сборник от доклади на Научна сесия 9-10 декември 1997г. "85 години от участието на Българската авиация в Балканската война", ВВБУ "Г. Бенковски", Д. Митрополия, 1998, Том 2, стр.260-270.