

УДК 629.7.05

ТОЧНО ИЗЧИСЛЯВАНЕ НА СИЛАТА НА ТЕЖЕСТТА ВЪВ ВИСОЧИНА

А. Н. МАДЖАРОВ

Изведени са точни формули за изчисляване на относителната сила на тежестта за различни височини на полета над референц-елипсоид. Използвани са точни стойности за разстоянието от самолета до масовия център на Земята. В инерциалната навигация векторът на относителната сила на теглото се използва за автономно изчисляване на местоположението и скоростта на движение на самолет. Той присъства в показанията на акселерометрите. По вертикалната му съставляща се ориентира жиростабилизирана платформа, моделираща местния хоризонт. Изведените тук зависимости за хоризонтална съставляща при ненулева височина над референц-елипсоида, представляват методическа грешка за инерциални навигационни системи среден клас и са по-малки от инструменталните грешки на акселерометрите им. Отчитането им в основните уравнения на инерциалната навигация има смисъл само при полети на пределно малки височини, във високо точни системи. По повърхността на елипсоида хоризонталната съставляща на гравитационното притегляне напълно е компенсирана от инерционна центробежна сила. С изкачване във височина, обаче гравитационната сила намалява, докато инерционната се увеличава. Точно този факт е обект на изследване.

Изведените формули могат да бъдат използвани при прецизно моделиране на траекторното движение на самолет [5]. Позволяват да се изчисли, спрямо тях, методическата грешка на други, приближени аналитични или експериментални стойности за силата на тежестта в точка от околоземното пространство.

Силова функция на гравитационното поле

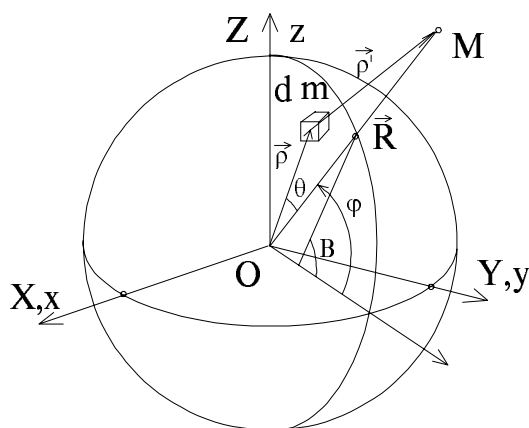
Според закона на Нютон за всеобщото притегляне, единична маса разположена в точка M се привлича към маса m със сила:

$$\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z = -Gm\frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{Gm}{r^3}(\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z), \quad (1)$$

където: $G=6,6732 \cdot 10^{-11} [Nm^2kg^{-2}]$ - гравитационна константа на всеобщото притегляне; $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$ - радиус-вектор на точка M (фиг. 1), имащ за начало точката, в която е разположена масата m .

Силовата функция за централно поле, образувано от маса m е:

$$U(M) = U(x, y, z) = G \frac{m}{r} = G \frac{m}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (2)$$



Фиг. 1

При това, естествено, съответно с определението за силова функция частните производни U_x, U_y, U_z от нея по променливите x, y, z ще са равни на проекциите F_x, F_y, F_z на силата $\vec{F}$ по координатните оси x, y, z :

Силовата функция U на гравитационното поле на Земята може да се разглежда като граница от сумата на централни полета, породени от елементарни маси $dm = \gamma(x, y, z)$, където

γ е масовата плътност на Земята в точка с координати x, y, z . При такъв подход U може да се зададе чрез тройния интеграл:

$$U = G \int \frac{dm}{\rho'}, \quad (3)$$

където: $\vec{\rho}' = \vec{R} - \vec{\rho}$, $\vec{R} = \vec{i}X + \vec{j}Y + \vec{k}Z$, $\vec{\rho} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$, $\rho' = |\vec{\rho}'|$.

Интегралът (3) е необходимо да се изчислява по обема на цялата Земя. Това се извършва не за реалната форма на Земята, а за някаква нейна идеализация. Ще считаме, че:

- а) формата на Земята е ротационен елипсоид с известни полуоси a и b ;
- б) вътрешните елипсоидни слоеве на Земята с полуоси ka и kb , $0 \leq k \leq 1$, имат във всяка своя точка еднаква масова плътност γ , стойността на която се предполага, че е неизвестна (хипотеза на Клеро, А.С. Clairaut, 1713-1765).

Приемането на тези хипотези е еквивалентно на следните предположения:

- 1) центърът на маса на Земята съвпада с геометрическия и център;
- 2) осите на координатната система xyz (фиг.13) са главни инерционни оси, т.е. центробежните инерционни моменти спрямо тези оси са 0;
- 3) инерционните моменти $A = \int (y^2 + z^2) dm$ и $B = \int (x^2 + z^2) dm$ спрямо x и y са равни $A=B$, поради симетрията на ротационния елипсоид;
- 4) поради малкото свиване на ротационния елипсоид стойността на $\mu' = \frac{C - A}{ma^2}$ е малка от порядъка на квадрата на ексцентрицитетата e^2 . Тук

$C = \int (x^2 + y^2) dm$ е инерционен момент спрямо оста Z ; m - маса на Земята.

След разлагане на функцията $1/\rho'$ в ред по бином на Нютон и запазвайки в (3) само първите три члена [2], за приблизителен израз на силовата функция на гравитационното поле се получава:

$$U = \frac{Gm}{R} + \frac{G}{2R^3}(1 - 3\sin^2 \varphi)(C - A). \quad (4)$$

Дори за задачи в геофизиката [3], първите три члена в силовата функция са достатъчни при описване на централно земно поле.

От (4) за проекциите g_2 и g_3 на вектора на относителната гравитационна сила $\vec{g}$ върху осите $\vec{J}_2$ и $\vec{J}_3$ на геоцентрическия репер [1] е валидно:

$$g_2 = \frac{1}{R}U_{\varphi} = -\frac{3G(C - A)}{2R^4}\sin 2\varphi = -\frac{3}{2}Gm\mu' a^2 R^{-4} \sin 2\varphi, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} g_3 = U_R &= -\frac{Gm}{R^2} - \frac{3G(C - A)}{2R^4}(1 - 3\sin^2 \varphi) = \\ &= -\frac{Gm}{R^2} - \frac{3}{2}Gm\mu' a^2 R^{-4}(1 - 3\sin^2 \varphi), \end{aligned}$$

$$\mu' = (C - A)/(ma^2). \quad (6)$$

Изразите (5) имат този недостатък, че включват масата m на Земята и разликата $C-A$ от инерционните и моменти. Стойностите на Gm , $C-A$ е невъзможно да се изчислят пряко, ако не се знае разпределението на масата в тялото на Земята. За да се избегне тази трудност, изразите за g_2 и g_3 трябва да се представят в по-удобен изчислителен вид.

Сила на тежестта по повърхността на земния елипсоид, при използване на точна връзка между геоцентрическа и геодезическа ширина

Равенства (5) ще разглеждаме за точки от повърхността на Земята. За точка от повърхността на земния елипсоид са валидни точните зависимости [4], (фиг.1):

$$R^2 = (a\xi)^2(1 - 2e^2 \sin^2 B + e^4 \sin^2 B), \quad (7)$$

$$\frac{Z^2}{R^2} = \sin^2 \varphi_0 = \frac{(1 - e^2)^2 \sin^2 B}{1 - 2e^2 \sin^2 B + e^4 \sin^2 B}, \quad (8)$$

$$\sin 2\varphi_0 = 2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 = \frac{(1 - e^2) \sin 2B}{1 - 2e^2 \sin^2 B + e^4 \sin^2 B}. \quad (9)$$

За удобство е въведена стойността $i_0^2 = 1 - 2e^2 \sin^2 B + e^4 \sin^2 B$ и след заместване на (7)-(9) в (5) се получава:

$$g_2 = -\frac{3}{2}Gma^2 \mu' (a^2 \xi^2 i_0^2)^{-2} i_0^{-2} \sin 2B = -\frac{3}{2}Gma^{-2} \mu' (1 - e^2)^{-4} i_0^{-6} \sin 2B, \quad (10)$$

$$g_3 = -\frac{Gm}{R^2} - \frac{3}{2}Gm\mu' a^2 R^{-4}(1 - 3\sin^2 \varphi) = \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
&= -Gm(a\xi i_0)^{-2} - \frac{3}{2}Gm\mu' a^2(a\xi i_0)^{-4}i_0^{-2}(3\cos^2 B - 2i_0^2) = \\
&= -Gm(a\xi i_0)^{-2} - \frac{3}{2}Gm\mu' a^{-2}\xi^{-4}i_0^{-6}(3\cos^2 B - 2i_0^2).
\end{aligned}$$

За изчисляване проекциите на вектора на ускорението на свободното падане върху осите на репера на референц-елипсоида е необходимо да се изчисли линейната скорост на денонощно въртене за точка с радиус-вектор $\vec{R}$:

$$\vec{\Omega} \times \vec{R} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & 0 \\ -\Omega_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a\xi i_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_2 a\xi i_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а след това и проекциите на центробежното и ускорение:

$$\vec{f} = -\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}) = -\begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & 0 \\ -\Omega_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_2 a\xi i_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\Omega_3 \Omega_2 a\xi i_0 \\ \Omega_2 \Omega_2 a\xi i_0 \end{pmatrix},$$

$$f_2 = -\Omega_3 \Omega_2 a\xi i_0 = -\Omega^2(1 - e^2)a\xi i_0^{-1} \cos B \sin B, \quad (12)$$

$$f_3 = \Omega_2^2 a\xi i_0 = \Omega^2 a\xi i_0^{-1} \cos^2 B, \quad (13)$$

за да ги добавим към (10)-(11). За северна и вертикална проекция на ускорението на телото се получават изразите:

$$g_2^T = -\frac{Gm(1 - e^2)}{a^2 \xi^2 i_0^2} \frac{3}{2} \mu' \xi^{-2} i_0^{-4} \sin 2B - \frac{\Omega^2(1 - e^2)}{2} a \frac{\xi}{i_0} \sin 2B, \quad (14)$$

$$g_3^T = -\frac{Gm}{a^2 \xi^2 i_0^2} \left[1 + \frac{3}{2} \mu' \xi^{-2} i_0^{-4} (3\cos^2 B - 2i_0^2) \right] + \Omega^2 a \frac{\xi}{i_0} \cos^2 B. \quad (15)$$

За точка от земната повърхност, лежаща на Екватора, ускорението на свободното падане ще има стойност, получена от (15) след заместване с $B=0$:

$$g_e^T = -\frac{Gm}{a^2} (1 + 1,5\mu') + a\Omega^2,$$

$$\text{откъдето след полагане на } q = \frac{a\Omega^2}{g_e^T} \quad (16)$$

$$\text{се получава: } \frac{Gm}{a^2} = g_e^T \frac{1}{1 - 1,5\mu'} + \frac{a\Omega^2}{1 - 1,5\mu'} = g_e^T \frac{1 + q}{1 - 1,5\mu'}. \quad (17)$$

По определението за референц-елипсоид е необходимо $g_2^T = 0$! При това условие, поставяме (17) в (14) и приравняваме на нула, за да намерим μ' :

$$\mu' = -\frac{\Omega^2 a \xi^5 i_0^5}{1,5\Omega^2 a \xi^5 i_0^5 - 3g_e^T (1 + q)}. \quad (18)$$

Заместваме (17) и (18) в (15) и след елементарни преобразувания се получава:

$$g_{3(h=0)}^T = -g_e^T \left[\frac{q+1}{\xi^2 i_0^2} - \frac{q}{2} \xi^2 i_0^2 \left(\xi i_0 + \frac{\cos^2 B}{\xi i_0^3} - 2 \frac{1}{\xi i_0} \right) \right] \quad (19)$$

Изразът (19) напълно и абсолютно точно определя градиента на силата на тежестта за точка от повърхността на референц-елипсоид.

В проекциите (10) и (11) на гравитационното поле също е възможно да се използват въведените (17) и (18):

$$g_{2(h=0)} = g_e^T \frac{(1-e^2)}{2} q \xi \frac{\sin 2B}{i_0}, \quad (20)$$

$$g_{3(h=0)} = -g_e^T \left[\frac{q+1}{\xi^2 i_0^2} - \frac{q}{2} \xi^2 i_0^2 \left(\xi i_0 + 3 \frac{\cos^2 B}{\xi i_0^3} - 2 \frac{1}{\xi i_0} \right) \right] \quad (21)$$

Сила на тежестта в точка над повърхността на земния елипсоид, при използване на точна връзка между геоцентрическа и геодезическа ширина

Извежданията се провеждат по методиката, следвана и в предишния случай. В равенства (5) се заместват точните стойности, получени в [4]:

$$R = (a\xi + h) \sqrt{1 - 2 \left(\frac{a\xi}{a\xi + h} e^2 \right) \sin^2 B + \left(\frac{a\xi}{a\xi + h} e^2 \right)^2 \sin^2 B} = (a\xi + h)i, \quad (22)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \left(1 - \frac{a\xi e^2}{a\xi + h} \right) \operatorname{tg} B \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 \varphi = \left(1 - \frac{a\xi e^2}{a\xi + h} \right) \frac{\sin^2 B}{i^2} \\ \cos^2 \varphi = \frac{\cos^2 B}{i^2} \end{cases}, \quad (23)$$

$$\sin 2\varphi = \left(1 - \frac{a\xi e^2}{a\xi + h} \right) \frac{\sin 2B}{i^2}, \quad 1 - 3\sin^2 \varphi = \frac{3\cos^2 B - 2i}{i^2}. \quad (24)$$

За хоризонтална съставляща на гравитационното притегляне, с използване на (16), (17) и (18):

$$\begin{aligned} \frac{Gm}{a^2} &= g_e^T \left(1 + q - \frac{q}{2} \xi^5 i_0^5 \right), \\ \mu' &= -\frac{1}{3} \frac{2\Omega^2 a \xi^5 i_0^5}{\Omega^2 a \xi^5 i_0^5 - 2g_e^T (1+q)}, \\ \frac{Gm}{a^2} \frac{3}{2} \mu' &= -g_e^T \frac{q}{2} \xi^5 i_0^5, \end{aligned} \quad (25)$$

резултата е:

$$g_2 = \frac{g_e^T}{2} q \xi^5 i_0^5 \left(\frac{a^4}{(a\xi + h)^4 i^4} \right) \left(\frac{a\xi + h - a\xi e^2}{a\xi + h} \right) \frac{\sin 2B}{i^2},$$

$$g_2 = \left[\frac{g_e^T}{2} q (1 - e^2) \xi \frac{\sin 2B}{i_0} \right] \left(\frac{i_0^6}{i^6} \right) \frac{a^4 \xi^4 (a\xi + h - a\xi e^2)}{(a\xi + h)^5 (1 - e^2)},$$

$$g_2 = g_{2(h=0)} \left(\frac{i_0^6}{i^6} \right) \frac{a^4 \xi^4 (a\xi + h - a\xi e^2)}{(a\xi + h)^5 (1 - e^2)}, \quad (26)$$

където: $g_{2(h=0)} = -f_{2(h=0)}$; $f_{2(h=0)} = -\frac{g_e^T}{2} q (1 - e^2) \xi \frac{\sin 2B}{i_0}$.

За инерционните съставлящи

$$f_2 = -\frac{\Omega^2}{2} (a\xi + h) \left(\frac{a\xi + h - a\xi e^2}{a\xi + h} \right) \frac{\sin 2B}{i}, \quad f_3 = \Omega^2 (a\xi + h) \frac{\cos^2 B}{i}, \quad (27)$$

относителното им изменение във височина е:

$$f_2 = f_{2(h=0)} \left(\frac{i_0}{i} \right) \frac{a\xi + h - a\xi e^2}{a\xi (1 - e^2)} = -\Omega^2 \frac{a\xi + h - a\xi e^2}{i} \sin B \cos B, \quad (28)$$

$$f_3 = f_{3(h=0)} \left(\frac{i_0}{i} \right) \frac{a\xi + h}{a\xi} = g_e^T q \frac{a\xi + h}{ai} \cos^2 B = \Omega^2 \frac{a\xi + h}{i} \cos^2 B. \quad (29)$$

Окончателно за хоризонталната съставляща на теглото се получава:

$$g_2^T = g_2 + f_2 =$$

$$= -f_{2(h=0)} \left[\left(\frac{i_0^6}{i^6} \right) \frac{a^4 \xi^4 (a\xi + h - a\xi e^2)}{(a\xi + h)^5 (1 - e^2)} \right] + f_{2(h=0)} \left[\frac{i_0}{i} \frac{a\xi + h - a\xi e^2}{a\xi (1 - e^2)} \right],$$

$$g_2^T = \left\{ f_{2(h=0)} \left[\frac{i_0}{i} \frac{a\xi + h - a\xi e^2}{a\xi (1 - e^2)} \right] \right\} \left[1 - \left(\frac{a\xi i_0}{(a\xi + h)i} \right)^5 \right],$$

$$g_2^T = -\Omega^2 (a\xi + h - a\xi e^2) \frac{\sin B \cos B}{i} \left[1 - \left(\frac{a\xi i_0}{(a\xi + h)i} \right)^5 \right]. \quad (30)$$

За изчисляване на вертикалната съставляща на гравитационното притегляне замества (22) и (24) в (5):

$$g_3 = -g_e^T \left[\frac{1}{i^2} \left(1 + q - \frac{q}{2} \xi^5 i_0^5 \right) \left(\frac{a}{a\xi + h} \right)^2 - \frac{q}{2} \xi^5 i_0^5 \left(\frac{a}{a\xi + h} \right)^4 \frac{3 \cos^2 B - 2i}{i^6} \right] =$$

$$= -g_e^T \left\{ \frac{q+1}{i^2} \left(\frac{a}{a\xi + h} \right)^2 - \frac{q \xi^5 i_0^5}{2} \left(\frac{a}{a\xi + h} \right)^4 \left[\left(\frac{a\xi + h}{a} \right)^2 + 3 \frac{\cos^2 B}{i^4} - \frac{2}{i^3} \right] \right\}. \quad (31)$$

От (31) и (27) за вертикалната съставляща на теглото се получава:

$$g_3^T = g_3 + f_3 = -g_e^T \left\{ \frac{q+1}{i^2} \left(\frac{a}{a\xi + h} \right)^2 - \frac{q \xi^5 i_0^5}{2} \left(\frac{a}{a\xi + h} \right)^4 \times \right.$$

$$\times \left[\left(\frac{a\xi + h}{a} \right)^2 + \left[3 - \left(\frac{(a\xi + h)i}{a\xi i_0} \right)^5 \right] \frac{\cos^2 B}{i^4} - \frac{2}{i^3} \right] \}. \quad (32)$$

Изводи

Силата на теглото действа по геодезическата вертикала. Силата на гравитационното притегляне действа по геоцентрическата вертикала. За инерциални курсовертикали или непродължително време на работа в автономен режим е допустимо да се пренебрегне разликата между двете вертикали [1]. Интегрирането във времето на изведените зависимости позволява да се изчисли методическа грешка по скорости и местоположение.

В случай, че уравненията на инерциалната навигация се интегрират по геодезическата вертикала, то е необходимо с някаква степен на приближение да се използват изведените зависимости. Обикновено, за целта се прилагат стандартизирани във вид на Хелмерт-Касинис аналитични формули, с експериментално изчислени и усреднени за голяма територия коефициенти [3]. Те задават нулевото ниво за височината, като повърхност, наричана сфероид.

ЛИТЕРАТУРА

1. Авиационные приборы и навигационные системы. /Под ред. Бабича О. А. М.: ВВИА, 1981. 645с.
2. Бабич О. А. Обработка информации в навигационных комплексах. Москва, Машиностроение, 1991, 512 стр.
3. Димитров Л. В., Ставрев П. Я. Магнитни методи в геофизиката. София, МНП, 1986, 434 стр.
4. Маджаров А. Н. Високо точно изчисляване на геодезически координати във височина. Научни трудове на ВВВУ "Г. Бенковски", бр. 61, 1999, стр.
5. Маджаров А. Н. Моделирование движение самолета по заданной траектории. В сб.: Научно-методические материалы "Авиационные приборы и навигационные системы летательных аппаратов". - М.: ВВИА, 1990, стр. 117-120.

УДК 629.7.05

**ТОЧНО ИЗЧИСЛЯВАНЕ НА СИЛАТА НА ТЕЖЕСТТА ВЪВ
ВИСОЧИНА**

А. Н. МАДЖАРОВ

Изведени са точни формули за изчисляване на хоризонталната и вертикалната проекции на силата на тежестта, с отчитане изменението на височината.

УДК 629.7.05

ТОЧНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ В ВЫСОТЕ

А. Н. МАДЖАРОВ

Выведены точные формулы для вычисления горизонтальной и вертикальной проекции силы тяжести в высоте.

UDC 629.7.05

PRECISE CALCULATION OF GRAVITY IN ALTITUDE

A. N. Madjarov

Precise formulae about how to calculate the horizontal and vertical projections of gravity are given in the present study, considering the change of the altitude.