

GUÍA N°4 DE CÁLCULO
Ingeniería Civil Industrial (B-07)
Martes 19 de Mayo de 2009
Profesores: Luis M. Riquelme Q. Felipe A. López B.
Ayudante: Mauricio S. Olivares A.

1. Se dice que una función $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}$ es inyectiva, si Dados $x, z \in X$

$$x \neq z \implies f(x) \neq f(z)$$

Una forma equivalente de probar esto es demostrar que

$$f(x) = f(z) \implies x = z.$$

- a) Pruebe que $f : \mathbb{R} - \left\{ -\frac{5}{3} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = \frac{2x-1}{3x+5}$ es una función inyectiva.
- b) Pruebe que $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $g(x) = 1 + x^2$ no es una función inyectiva.
- c) ¿Es posible determinar un conjunto $H \subseteq \text{Dom } g$, tal que g sea inyectiva?
2. Se dice que una función $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}$ es epiyectiva si $\text{Rec } f = Y$
- a) Pruebe que $f : \mathbb{R} - \left\{ \frac{5}{3} \right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{ \frac{2}{3} \right\}$ con $f(x) = \frac{2x-1}{3x+5}$ es una función epiyectiva.
- b) Pruebe que $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $g(x) = 1 + x^2$ no es una función epiyectiva.
- c) ¿Es posible determinar un conjunto $G \subseteq \text{Rec } g$, tal que g sea epiyectiva?
3. Se dice que una función $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}$ es biyectiva si es inyectiva y epiyectiva.

- a) Pruebe que $f : \mathbb{R} - \left\{ \frac{5}{3} \right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{ \frac{2}{3} \right\}$ con $f(x) = \frac{2x-1}{3x+5}$ es una función biyectiva.
- b) Pruebe que las funciones $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $l(x) = mx + n$, para $m \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $n \in \mathbb{R}$ constantes, son todas biyectivas.
- c) Pruebe que $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $g(x) = 1 + x^2$ no es una función biyectiva.
- d) ¿Es posible determinar conjuntos $H \subseteq \text{Dom } g$ y $G \subseteq \text{Rec } g$, tal que g sea biyectiva?

4. Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ funciones, se define su función compuesta $(g \circ f) : X \rightarrow Z$ como

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Determine $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)$ para:

a) $f(x) = \frac{3x-1}{2x+4}, g(x) = \sqrt{x-3}.$

b) $f(x) = 3x-7, g(x) = \frac{x}{7} + \frac{3}{7}.$

c) $f(x) = g(x) = \sqrt{1-x^2}$

d) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}, g(x) = \frac{1}{1+x^2}$

5. Una propiedad de las funciones biyectivas es que podemos determinar una función inversa para ellas, vale decir, la relación inversa de f , denotada por f^{-1} , es también una función, tal que si $f : X \rightarrow Y$, entonces $f^{-1} : Y \rightarrow X$, donde si $a = f(b)$ entonces $b = f^{-1}(a)$, y si denotamos por I_H a la función $I : H \rightarrow H$, tal que $I(x) = x, \forall x \in H$, llamada identidad en H , tenemos que

$$(f \circ f^{-1})(x) = I_Y$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = I_X$$

- a) Determine la función inversa de $f(x) = \frac{7x-3}{1-5x}$, justificando su existencia.
- b) Determine la función inversa de $f(x) = x^2 + 1$ considerando un dominio y recorrido apropiados para la existencia de la misma.
- c) Determine la función inversa de $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ considerando un dominio y recorrido apropiados para la existencia de la misma.
- d) Determine la función inversa de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ considerando un dominio y recorrido apropiados para la existencia de la misma.
6. ■ Una función es par, si $f(x) = f(-x)$, geoméricamente esto quiere decir que f es simétrica respecto del eje Y como se muestra en la figura 1

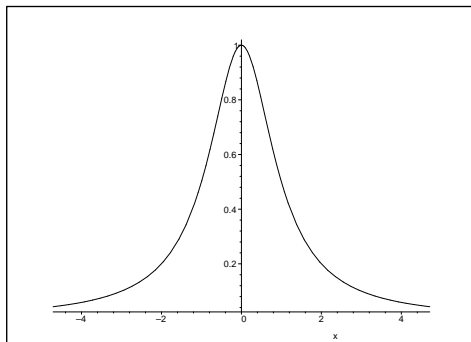


Figura 1: Un ejemplo de función par

- Una función es impar, si $f(x) = -f(-x)$, o equivalentemente, si $f(-x) = -f(x)$, geoméricamente esto quiere decir que f es simétrica respecto del origen \mathcal{O} como se muestra en la figura 2

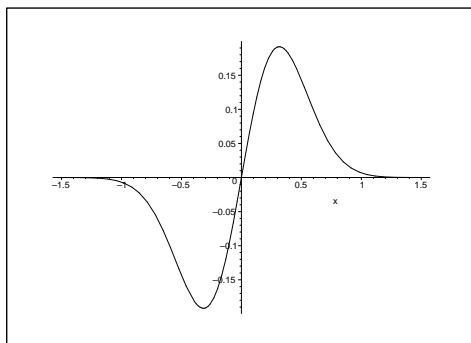


Figura 2: Un ejemplo de función impar

- Demuestre que la función $f(x) = \frac{|x| + 3}{x^2 + 5}$ es una función par.
 - Demuestre que la función $f(x) = \frac{x|x|}{x^2 + 5|x|}$ es una función impar.
 - ¿Puede una función par ser también inyectiva?.
 - Sea f una función par, tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 8$ ¿Cuál es el valor de $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$?
 - Sea f una función impar, tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 8$ ¿Cuál es el valor de $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$?
 - Sean f, g funciones pares y u, v funciones impares, ¿qué puede decir de la paridad de fg, uv, fu ?
7. Se define la función parte entera de x , denotada por $[x]$, como el menor entero mas cercano a x , vale decir
- Si $x \in \mathbb{Z}$ entonces $[x] = x$.
 - Si $x \notin \mathbb{Z}$ entonces podemos afirmar que $\exists m \in \mathbb{Z} : m < x < m + 1$, en cuyo caso $[x] = m$.
- Determine $[0], [2], [-2], [0,8], [-0,8], [1,4], [-1,4], [\pi], [-\pi], [e], [-e]$.
 - Esboce el gráfico de $f(x) = [x]$.
 - Pruebe que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[m - \frac{1}{n} \right] \neq \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(m - \frac{1}{n} \right) \right]$ para $m \in \mathbb{Z}$.

8. Se dice que una función tiene periodo T , con $T > 0$, si T es el menor valor que verifica que $f(x + T) = f(x)$. Geométricamente una función periódica es una función que se comienza a repetir infinitamente en el plano XY , considerando una porción del gráfico de longitud T en el eje X como se muestra a continuación en la figura 3

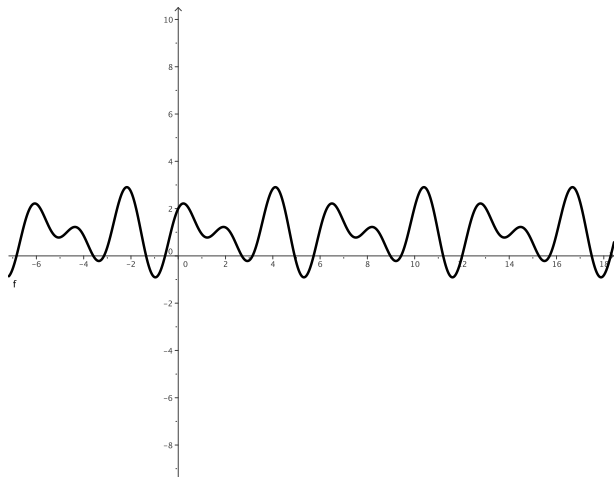


Figura 3: Un ejemplo de función periódica

- a) Pruebe que $f(x) = x - [x]$ tiene periodo 1, donde $[\cdot]$ denota la función parte entera.
- b) Determine dominio, ceros, signo y recorrido de $f(x) = x - [x]$. Además esboce su gráfico.
- c) Si f es una función periódica, ¿Puede existir $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$?
- d) Si f es una función periódica, tal que corta al eje X , ¿cuántos ceros tiene f ?
- e) Sea f una función de periodo 3, tal que sobre $[0, 3[$ el único cero de f es $x = 1$ ¿Cuales son los ceros de f sobre \mathbb{R} ?
9. Se define función signo, denotada por $f(x) = \text{sgn}(x)$ como

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

- a) Determine dominio, ceros, signo y recorrido de $\text{sgn}(x)$.
- b) Esboce el gráfico de $\text{sgn}(x)$.
- c) Determine dominio, ceros, signo y recorrido de $h(x) = \text{sgn}(x^2 - 6x + 8)$. Además esboce su gráfico.

10. Dada $f(x) = \frac{5x + 3}{2x - 7}$.
- Determine su dominio, ceros, signo y recorrido.
 - Analice su biyectividad y paridad.
 - Determine, en una región apropiada, $f^{-1}(x)$.
 - Analice la existencia de asíntotas horizontales de f y de f^{-1} .
11. Dada $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2}$.
- Determine su dominio, ceros, signo y recorrido.
 - Analice su biyectividad y paridad.
 - Determine, en una región apropiada, $f^{-1}(x)$.
 - Analice la existencia de asíntotas horizontales de f y de f^{-1} .
12. Dada $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$.
- Determine su dominio, ceros, signo y recorrido.
 - Analice su biyectividad y paridad.
 - Determine, en una región apropiada, $f^{-1}(x)$.
 - Analice la existencia de asíntotas horizontales de f y de f^{-1} .
13. Dada $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$.
- Determine su dominio, ceros, signo y recorrido.
 - Analice su biyectividad y paridad.
 - Determine, en una región apropiada, $f^{-1}(x)$.
 - Analice la existencia de asíntotas horizontales de f y de f^{-1} .
14. Dada $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$.
- Determine su dominio, ceros, signo y recorrido.
 - Analice su biyectividad y paridad.
 - Determine, en una región apropiada, $f^{-1}(x)$.
 - Analice la existencia de asíntotas horizontales de f y de f^{-1} .
15. Dada $f(x) = \frac{2x - 1}{\sqrt{3x^2 + 1}}$.
- Determine su dominio, ceros, signo y recorrido.
 - Analice su biyectividad y paridad.
 - Determine, en una región apropiada, $f^{-1}(x)$.

- d) Analice la existencia de asíntotas horizontales de f y de f^{-1} .
16. Dada $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-1}}$.
- Determine su dominio, ceros signo y recorrido.
 - Analice su biyectividad y paridad.
 - Determine, en una región apropiada, $f^{-1}(x)$.
 - Analice la existencia de asíntotas horizontales de f y de f^{-1} .
17. Dada $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.
- Determine su dominio, ceros, signo y recorrido.
 - Analice su biyectividad y paridad.
 - Determine, en una región apropiada, $f^{-1}(x)$.
 - Analice la existencia de asíntotas horizontales de f y de f^{-1} .
18. Para la función $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+x^n}{1-x^n}$, determine su dominio, ceros, signo y recorrido.
19. Grafique, justificando sus pasos principales:
- $f(x) = [x^2]$. Donde $[\cdot]$ denota la función parte entera.
 - $g(x) = \text{sgn}(x^3 - 8x^2 + 7x)$.
 - $h(x) = |2x + 1|$.
 - $u(x) = (h \circ g)(x)$
20. Considere las funciones
- $$f(x) = \frac{2x-1}{3x+2}$$
- $$g(x) = \frac{3x^2-1}{\sqrt{64x^2-9}}$$
- Determine su dominio, ceros y signo.
 - Estudie su paridad e inyectividad.
 - Analice la existencia de asíntotas horizontales.
21. Dada $f(x) = x^2$, con $x \in [0, 1]$.
- Esboce el gráfico de f .
 - Defina $g(x)$ sobre el intervalo $[-1, 1]$ tal que g sea una extensión impar de f sobre dicho intervalo. Esboce el gráfico de g .
 - Defina $h(x)$ sobre el intervalo $[-1, 1]$ tal que h sea una extensión par de f sobre dicho intervalo. Esboce el gráfico de h .

- d) Defina $w(x)$ como una extensión periódica de f sobre la recta real, determine dicho periodo. Esboce el gráfico de w .
- e) Defina $u(x)$ como una extensión periódica de g sobre la recta real, determine dicho periodo. Esboce el gráfico de u .
- f) Defina $v(x)$ como una extensión periódica de h sobre la recta real, determine dicho periodo. Esboce el gráfico de v .

22. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función arbitraria.

- a) Muestre que $f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ es una función par. Llamaremos a f_p la parte par de f .
- b) Muestre que $f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ es una función impar. Llamaremos a f_i la parte impar de f .
- c) Muestre que $f(x) = f_p(x) + f_i(x)$
- d) Determine las partes par e impar de $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 5x + 1$
- e) Determine las partes par e impar de $f(x) = x^4 + x^2 + 1$
- f) Determine las partes par e impar de $f(x) = 3x^3 - 5x$

23. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función arbitraria.

- a) Muestre que $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ es una función positiva o cuando menos nula. Llamaremos a f^+ la parte positiva de f .
- b) Muestre que $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ es también una función positiva o cuando menos nula. Llamaremos a f^- la parte negativa de f .
- c) Muestre que $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$
- d) Muestre que $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$
- e) Determine las partes positiva y negativa de $f(x) = x^2 - 1$
- f) Esboce el gráfico de f, f^+, f^- y $|f|$.

24. Determine el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - 5x}{x^2 + x - 56}$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3} \right)$.

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x|x|}{x^2 + x - 56}$.

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x|x|}{x^2 + x - 56}$.

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x - 3}{\sqrt{4x^2 - 3x + 7}}$.

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x - 3}{\sqrt{4x^2 - 3x + 7}}$.

g) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{7x - 3}{\sqrt{64x^2 - 3x + 5}}$.

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8\lambda x + 3}{\sqrt{100\mu x^2 + 3x + 1}}$. Donde λ y μ son constantes reales positivas.

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8\lambda x + 3}{\sqrt{100\mu x^2 + 3x + 1}}$. Donde λ y μ son constantes reales positivas.

j) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 9x + 15} \right)$.

k) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} - 3x - 5 \right)$.

l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x} - 1}{2\sqrt{x} + 1}$.

m) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 + \lambda x + 3} - \sqrt{x^2 + \mu x - 3} \right)$. Donde λ y μ son constantes reales.

n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda x + 23}{\sqrt{\mu^2 x^2 + 28}}$. Donde λ y μ son constantes reales positivas.

\tilde{n}) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\lambda x + 23}{\sqrt{\mu^2 x^2 + 28}}$. Donde λ y μ son constantes reales positivas.

25. Dada $f(x) = \frac{|x|(x-1)}{x^2 - 4x + 3}$, calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Interprete geoméricamente sus resultados

26. Analice la existencia de los siguientes límites, es decir, calcule su valor o bien justifique porque no existen.

a) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{(x - \pi)^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{x - \pi}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(\sqrt{x} - 1)}{x - 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 5x^2 - 6}{2x^3 - 3x^2 + 2x - 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + \sqrt{x + 2}}{\sqrt{x + 5} - \sqrt{2x + 6}}$

f) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{|3 - x|}$.

g) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{x - 3}$.

h) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x|x - 2| + x^2 - 4}{x - 2 + |x - 2|}$

i) $\lim_{x \rightarrow 4} (x - [x])$, donde $[\cdot]$ denota función parte entera.

j) $\lim_{x \rightarrow 1/4} (x - [x])$, donde $[\cdot]$ denota función parte entera.

k) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^n - x^n}{h}$. Recuerde el Teorema del Binomio, i.e,

$$(z + w)^n = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} z^{n-m} w^m.$$

l) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, donde

$$f(x) = \begin{cases} x - [x] & \text{si } x < 3 \\ \text{sgn}(x - 3) & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

m) $\lim_{x \rightarrow 3/5} \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{x \left(\sqrt{2y^2 - 3y + x} - \sqrt{2y^2 + 5xy + 4} \right)}{5x^2 + 7x - 6}$
