

GUÍA N°4 DE ÁLGEBRA- PEP 1
sección B-07

Profesores: Luis M. Riquelme Q. Felipe A. López B.
Ayudante: Felipe E. Paredes G.

Martes 19 de Mayo de 2009

1. Se define en \mathbb{Z} la relación $\equiv (\text{mod } 3)$ como:

$$x \equiv y(\text{mod } 3) \iff y - x \in 3\mathbb{Z}$$

Denominada congruencia en módulo 3.

- a) Muestre que la congruencia módulo 3 es una relación de equivalencia en \mathbb{Z} .
 - b) Determine $\bar{0}$
 - c) Determine $\bar{1}$
 - d) Determine $\bar{2}$
 - e) Determine $\bar{3}$
 - f) Determine $\bar{4}$
 - g) Determine $\bar{5}$
 - h) Determine $\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$.
2. Se define sobre \mathbb{R}^2 la relación R como

$$(x, y)R(z, w) \iff xy = zw.$$

Determine si R es o no una relación de equivalencia.

3. Se define sobre \mathbb{R} la relación R como

$$xRy \iff \exists m \in \mathbb{Z} : y = 5e^m.$$

Determine si R es o no una relación de equivalencia. ¿Cual es su respuesta si la condición se cambia por $m \in \mathbb{N}$.?

4. Se define sobre \mathbb{R}^3 la relación R como

$$(x, y, z)R(u, v, w) \iff \exists m \in \mathbb{R} - \{0\} : (x, y, z) = m(u, v, w).$$

Donde $m(u, v, w) = (mu, mv, mw)$ Determine si R es o no una relación de equivalencia. ¿Cual es su respuesta si la condición se cambia por $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$.?

5. Sea $X \neq \emptyset$ y sean R y S relaciones de orden sobre él. Sea $G = R \cap S$. ¿Es G una relación? ¿Es G una relación de orden.?
6. Sea $X \neq \emptyset$ y sean R y S relaciones de equivalencia y orden sobre él respectivamente. ¿Es R^{-1} una relación de equivalencia? ¿Es S^{-1} una relación de orden.?

7. Sea $X \neq \emptyset$ y sean R y S relaciones de equivalencia sobre él ¿Es $(R \circ S)$ una relación de equivalencia.?
8. Sea $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$ y se define en \mathbb{R}^3 la relación

$$(x, y, z)R(a, b, c) \iff (x - a, y - b, z - c) \in W$$

- a) Demuestre que R es una relación de equivalencia.
- b) Determine $\overline{(0, 0, 0)}$
- c) Determine $\overline{(0, 1, 2)}$
- d) Determine $\overline{(1, 1, 0)}$
- e) Muestre que $\overline{(0, 0, 0)} = W$.
- f) Determine $\overline{(x, x, x)}$ con $x \neq 0$ ¿Cuál es su respuesta si $x = 0$?
- g) Determine $\overline{\mathbb{R}^3} = \left\{ \overline{(x, y, z)} : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$
9. Sea $W = \{a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] : a_0 + a_1 + a_2 = 0\}$ y se define en $\mathbb{R}_2[x]$ la relación

$$a(x)Rb(x) \iff b(x) - a(x) \in W$$

- a) Demuestre que R es una relación de equivalencia.
- b) Determine $\overline{0} = \overline{0 + 0x + 0x^2}$
- c) Determine $\overline{x - x^2}$
- d) Determine $\overline{1 + x + x^2}$
- e) Muestre que $\overline{0} = W$.
- f) Determine $\overline{m + mx + mx^2}$ con $m \neq 0$ ¿Cuál es su respuesta si $m = 0$?
- g) Determine $\overline{\mathbb{R}_2[x]} = \left\{ \overline{a + bx + cx^2} : a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[t] \right\}$
10. Considere el espacio de las sucesiones reales estrictamente positivas, convergentes en $\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$, vale decir, sucesiones cuyo límite existe, pero no es ni 0, ni $+\infty$. Se define

$$a_n \sim b_n \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

Muestre que R es una relación de equivalencia.

Indicación: Depende como se aborde, puede ser útil Recordar que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n}$$

O bien, usar adecuadamente la aritmética de límites.

11. Sobre $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ se define la relación:

$$xRy \iff \frac{x}{y} \in \mathbb{Z} \vee \frac{y}{x} \in \mathbb{Z}$$

¿es esta una relación de equivalencia? muéstrelo o bien presente un contraejemplo.

12. Muestre ejemplos de relaciones sobre el conjunto $X = \{-1, 0, 1\}$ tales que:

- a) R sea relación de equivalencia.
- b) R sea refleja, pero no sea simétrica ni transitiva.
- c) R sea simétrica, pero no sea refleja ni transitiva.
- d) R sea transitiva, pero no sea refleja ni simétrica.
- e) R no cumpla ninguna de las tres propiedades, es decir, no sea ni refleja, ni simétrica, ni transitiva.

13. Sea $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ y se define en \mathbb{R}^2 la relación:

$$(x, y)R(a, b) \iff (x, y) - (a, b) \in W$$

- a) Muestre que R es una relación de equivalencia.
- b) Determine $\overline{(0, 0)}$
- c) Determine $\overline{\mathbb{R}^2}$

14. Se define sobre \mathbb{R} la relación T como

$$xTy \iff \exists m \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge n \in \mathbb{R} : y = mx + n.$$

Sea además R una relación sobre \mathbb{R}^2 definida como

$$(x, y)R(z, w) \iff xTz \wedge yTw.$$

Demuestre que T y R son relaciones de equivalencia.
