GUÍA N°3 DE CÁLCULO - PEP 1
sección B-07
Profesores: Luis M. Riquelme Q. Felipe A. López B.
Ayudante: Mauricio S. Olivares A.

Domingo 10 de Mayo de 2009

---

1. Calcule los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^3-3n^2}{2n^3+4n+5}$.

   b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6n^2-3n^2}{2n^3+4n+5}$.

   c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^5-3n^2}{n^3+4n+5}$.

   d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(5n+2)(2n^2-1)^2}{(5n+9)^3(2n-1)(3n+4)}$.

   e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(5n+2)(2n^2-n)^2}{(5n+9)^3}$.

   f) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(3n+2)(2n^2-1)^2}{(5n^3+9)^3}$.

   g) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lambda n+3}{\sqrt{\mu^2n^2+8}}$. Donde λ y μ son constantes reales positivas.

   h) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lambda^n-\mu^n}{\lambda^n+\mu^n}$. Donde λ y μ son constantes reales positivas. Note que debe separar los casos
   $\lambda>\mu$, $\lambda<\mu$, $\lambda=\mu$.

   i) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n+5}{n+3}\right)^n$.

   j) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2n+5}{2n+3}\right)^{3n}$.

   k) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\left(\dfrac{n^2+5n+6}{n^2+7n+12}\right)^n}$.

   l) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n}$.

   m) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3\cdot 2^{n+1}-2\cdot(-3)^{n+1}}{5\cdot 2^{n-1}-4\cdot(-3)^n}$

2. Determine S_n en cada uno de los siguientes casos:

   a) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2k.$

   b) $S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1).$

   c) $S_n = \displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{3^k}.$

   d) $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^{k-4}}.$

   e) $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^k.$

   f) $S_n = \displaystyle\sum_{k=3}^{n} 2^{3k}.$

   g) $S_n = 1 + \dfrac{1}{25} + \dfrac{1}{625} + \ldots + \dfrac{1}{5^{2n}}.$

   h) $S_n = \dfrac{1}{3\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 6} + \ldots + \dfrac{1}{(n+2)(n+3)}.$

   i) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+1)(n+3)}.$

   j) $S_n = \dfrac{3}{1\cdot 3} + \dfrac{3}{2\cdot 4} + \dfrac{3}{3\cdot 5} + \ldots + ?$ (encuentre usted el termino general).

   k) $S_n = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{16} + \ldots + ?$ (encuentre usted el termino general).

3. a) En cada uno de los casos anteriores determine el valor de $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

   b) Calcule $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3+6+9+\ldots+3n}{2+4+6+\ldots+2n}.$

   c) Calcule $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{3\cdot4\cdot5} + \frac{1}{4\cdot5\cdot6} + \ldots + \frac{1}{(n+2)\cdot(n+3)\cdot(n+4)}}{\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}}.$

   d) Calcule $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{9}{n}\right)^n \cdot \frac{(2n+1)^{2n}(n+1)^{4n}}{\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 6k^2\right)^n}$

e) Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ para
$a_n = \{0,69;\, 0,699;\, 0,6999;\, \ldots\}$

4. No siempre es posible desarrollar la sumatoria, en dicho caso es conveniente usar teorema de acotamiento. Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ para:

a) $a_n = \dfrac{1}{n^4+1} + \dfrac{8}{n^4+2} + \ldots + \dfrac{n^3}{n^4+n}$.

b) $a_n = \dfrac{1-n^2}{n^2\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \dfrac{n-n^2}{n^2\sqrt{n^2+n}}$

5. Para
$$a_n = \frac{-2n^4+3n^3+2n+1}{2n^3+5n} + \frac{cn^3}{2n^2+5}$$
determine $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ según los posibles valores de $c \in \mathbb{R}$.

6. Para las siguientes sucesiones definidas por recurrencia

- Determine a_1, a_2, a_3 y a_4.
- Demuestre que son monótonas.
- Demuestre que son acotadas.
- Calcule, justificando su existencia
  - $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$
  - $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$
  - $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

a) $\begin{cases} a_1 = -10 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_1 = \sqrt{3} \\ a_{n+1} = \sqrt{3+a_n} \end{cases}$

7. Dada la sucesión
$$\{a_n\} = \left\{\sqrt{3}, \sqrt{3\sqrt{3}}, \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}\right\}$$

   a) Demuestre que es creciente.

   b) Demuestre que es acotada superiormente por 8.

   c) Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ justificando su existencia.

8. Dada la sucesión
$$\{a_n\} = \left\{\sqrt{3}, \sqrt{3+\sqrt{3}}, \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}, \dots\right\}$$

   a) Demuestre que es creciente.

   b) Demuestre que es acotada superiormente por 3.

   c) Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ justificando su existencia.

9. Calcule:
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+\lambda n+5}-\sqrt{n^2+\mu n+5}\right)$$
   Donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ constantes.

10. Para la siguiente sucesión definida por recurrencia como
$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{8}a_n + 1 \end{cases}$$

   a) Demuestre que es decreciente

   b) Demuestre que es acotada inferiormente por 1.

   c) Indique una cota superior de ella.

   d) Determine, justificando su existencia:

   - $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$
   - $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

11. Considere la sucesión

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

a) Demuestre que es decreciente.

b) Demuestre que es acotada, i.e, que ella es acotada superior e inferiormente.

c) Determine, justificando su existencia:

- $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$
- $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

12. Sean $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $\mathbb{R}$ tal que:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty.$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = -2.$

Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n + \sqrt{u_n^2 + 3}}{u_n + \sqrt{v_n^2 + 2}}.$

13. Considere la sucesión definida como:

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \end{cases}$$

a) Demuestre que es creciente.

b) Demuestre que es acotada inferiormente por 1 y superiormente 3.

c) Determine, justificando su existencia:

- $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$
- $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$