

GUÍA N°2 DE CÁLCULO - PEP 1

sección B-07

Profesores: Luis M. Riquelme Q. Felipe A. López B.

Ayudante: Mauricio S. Olivares A.

Martes 21 de Abril de 2009

1. Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ tal que X es acotado superiormente.
 - a) Demuestre que si $Y \subseteq X$, entonces Y es acotado superiormente.
 - b) Demuestre que el conjunto $L = \{y \in \mathbb{R} : y = ax + b, a, b > 0, x \in X\}$ no es acotado superiormente.
2. Pruebe que si $X \subseteq Y$, donde X e Y son acotados, entonces:
 - a) $\sup X \leq \sup Y$
 - b) $\inf X \geq \inf Y$

3. Considere los conjuntos:

$$\begin{aligned} \blacksquare M &= \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 19x + 18}{x^4 + 1} \leq 0 \right\}. \\ \blacksquare L &= \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 20x + 36}{x^4 - 1} \leq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Determine, si es que existen:

- a) $\sup M$.
- b) $\sup L$.
- c) $\sup M^c$.
- d) $\sup L^c$.
- e) $\sup (M \cup L)$.
- f) $\sup (M \cap L)$.
- g) $\sup (M \setminus L)$.
- h) $\sup (L \setminus M)$.
- i) $\sup (M \triangle L)$, donde $M \triangle L = (M \setminus L) \cup (L \setminus M)$.
- j) $\inf M$.
- k) $\inf L$.
- l) $\inf M^c$.
- m) $\inf L^c$.
- n) $\inf (M \cup L)$.
- ñ) $\inf (M \cap L)$.

- o*) $\inf (M \setminus L)$.
- p*) $\inf (L \setminus M)$.
- q*) $\inf (M \Delta L)$.

Determine, si es que existen:

- a*) $\text{máx } M$.
- b*) $\text{máx } L$.
- c*) $\text{máx } M^c$.
- d*) $\text{máx } L^c$.
- e*) $\text{máx } (M \cup L)$.
- f*) $\text{máx } (M \cap L)$.
- g*) $\text{máx } (M \setminus L)$.
- h*) $\text{máx } (L \setminus M)$.
- i*) $\text{máx } (M \Delta L)$.
- j*) $\text{mín } M$.
- k*) $\text{mín } L$.
- l*) $\text{mín } M^c$.
- m*) $\text{mín } L^c$.
- n*) $\text{mín } (M \cup L)$.
- ñ*) $\text{mín } (M \cap L)$.
- o*) $\text{mín } (M \setminus L)$.
- p*) $\text{mín } (L \setminus M)$.
- q*) $\text{mín } (M \Delta L)$.

4. Analice la monotonía de las siguientes sucesiones:

- a*) $a_n = n$.
- b*) $b_n = \frac{1}{n}$.
- c*) $c_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
- d*) $d_n = n^2$.
- e*) $e_n = \frac{1}{n^2 + 5}$.
- f*) $f_n = \frac{n+1}{n}$.
- g*) $g_n = \frac{n}{n+1}$.
- h*) $h_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

- i) $i_n = h_{2n}$.
- j) $j_n = h_{2n+1}$.
- k) $k_n = \frac{1}{n^2 + n}$.
- l) $l_n = \sum_{k=1}^n c_k$.
- m) $m_n = 2^n$
- n) $m_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$
- \tilde{n}) $m_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

5. Para las sucesiones definidas en el ítem anterior analice la existencia de cotas superiores e inferiores.

6. Para las siguientes sucesiones definidas por recurrencia

- Determine a_1, a_2, a_3 y a_4 .
- Demuestre que son monótonas.
- Demuestre que son acotadas.

a)
$$\begin{cases} a_1 = -20 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 9 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{3} \\ a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n} \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{1}{8}a_n + 1 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + 1 \end{cases}$$

7. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n^3 + 4n + 5)$.

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-2n^3 - 4n + 5)$.

- c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 - 3n^2 + 1)$.
- d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + n + 3n^2 - n^3 + 10n^4)$.
- e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + n + 3n^2 - n^3 - 10n^4)$.
- f) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^3 + 3n^2 + 1)$.
- g) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 - 3n^2}{2n^3 + 4n + 5}$.
- h) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 - 3n^2}{2n^3 + 4n + 5}$.
- i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^5 - 3n^2}{3n^3 + 4n + 5}$.
- j) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)(2n^2-1)^2}{(5n+9)^3(2n-1)(3n+4)}$.
- k) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)(2n^2-1)^2}{(5n+9)^3}$.
- l) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)(2n^2-1)^2}{(5n^3+9)^3}$.
- m) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n+5})$.
- n) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8n+3}{\sqrt{9n^2+8}}$.
- \tilde{n}) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+3}{\sqrt{3n^2+8}}$.
- o) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2+3n+1} - \sqrt{n^2+8n+1})$.
- p) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2+3n+1} - \sqrt{n^2-8n+1})$.
- q) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2-3n+1} - \sqrt{n^2-8n+1})$.
- r) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2-3n+1} - \sqrt{n^2+8n+1})$.

8. Analice los posibles valores de $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, según los posibles valores de c , para

$$a_n = \frac{n^3 - n}{n^2 + 1} - \frac{2cn^2 + 1}{n + 5}$$

9. Determine $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^2}{\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n k^3}$