

**GUÍA N°2 DE ÁLGEBRA- PEP 1**  
sección B-07

**Profesor: Luis M. Riquelme Q.      Ayudante: Felipe E. Paredes G.**

Martes 21 de Abril de 2009

---

1. Analice el valor de verdad de las siguientes proposiciones mediante el uso de tablas de verdad

- a)  $[(P \wedge Q) \implies P] \iff [\sim P \vee P]$   
 b)  $[P \implies (P \vee Q)] \iff [Q \vee \sim Q]$   
 c)  $[(P \vee Q) \implies \sim P] \iff [(P \wedge Q) \implies P]$   
 d)  $[(P \vee Q) \iff (P \wedge Q)] \iff [(P \implies C) \vee (\sim P \implies T)]$   
 e)  $(P \boxtimes Q) \implies (P \vee \sim Q)$ . Donde aceptaremos que  $P \boxtimes Q$  es verdadera solo si  $P$  es verdadera y  $Q$  es falsa.  
 f)  $[(P \boxtimes Q) \implies (P \vee \sim Q)] \iff [\sim Q \wedge (\sim P \implies \{P \downarrow Q\})]$ . Donde aceptaremos que el valor de verdad de  $P \boxtimes Q$  esta definido tal como en el ítem anterior y  $P \downarrow Q$  es verdadera solo si ambas proposiciones son falsas.  
 g)  $[R \vee (P \implies Q) \wedge (Q \implies \sim R)] \iff \sim [P \wedge R]$ .  
 h)  $[(P \vee Q) \wedge R] \implies [\sim R \vee \sim (Q \implies \sim P)]$ .

2. Demuestre que las siguientes proposiciones son inferencias lógicas, sin el uso de tablas verdad, vale decir, usando solo propiedades.

- a)  $[(P \wedge \sim Q) \vee (P \wedge Q)] \implies P$ .  
 b)  $[(\sim P \vee Q) \wedge (Q \vee P)] \implies Q$ .  
 c)  $[(P \implies Q) \wedge (\sim Q \vee R \vee S) \wedge \sim R \wedge \sim S] \implies \sim P$ .  
 d)  $P \implies [\sim (P \implies Q) \vee (\sim Q \vee R \vee S) \vee R \vee S]$ .  
 e)  $\left\{ (\sim P \implies C) \wedge [(\sim P \implies Q) \wedge \sim Q] \wedge [(R \implies P) \wedge (P \vee R)] \right\} \implies P$ .  
 f)  $\left\langle \left\{ [P \wedge (P \implies \sim Q)] \wedge [(P \implies R) \wedge (R \implies Q)] \right\} \implies [\sim (S \implies R) \wedge R] \right\rangle \implies P$ .

3. Determine el valor de verdad de las proposiciones involucradas sabiendo que

- a)  $(P \wedge Q) \implies R$  es falsa.  
 b)  $(P \vee Q) \iff \sim Q$  es verdadera.  
 c)  $(P \vee Q) \wedge Q$  es verdadera.  
 d)  $\left[ (P \downarrow Q) \vee (P \boxtimes Q) \right] \implies P$  es falsa.

Los conectivos  $\downarrow$  y  $\boxtimes$  están definidos como antes.

4. Demuestre las siguientes propiedades de conjuntos usando las propiedades de conectivos lógicos.

a)  $A \cup A = A$ .

b)  $A \cap A = A$ .

c)  $[A \subseteq B \wedge B \subseteq C] \implies A \subseteq C$ .

d)  $A \subseteq (A \cup B)$ .

e)  $(A \cap B) \subseteq A$ .

f)  $(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$ .

g)  $(A^c \cup B^c) = (A \cap B)^c$ .

h)  $(A^c \cap B^c) = (A \cup B)^c$ .

i)  $A \cup A^c = \Omega$ .

j)  $A \cap A^c = \emptyset$ .

k)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

l)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

m)  $A - B \subseteq A \Delta B$ .

5. Determine las siguientes sumas y luego demuestre sus resultados mediante inducción matemática.

a)  $\sum_{k=1}^n 2k$ .

b)  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ .

c)  $\sum_{k=3}^n \frac{1}{3^k}$ .

d)  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{3^{k-4}}$ .

e)  $\sum_{k=2}^n \left(-\frac{1}{3}\right)^k$ .

f)  $\sum_{k=3}^n 2^{3k}$ .

g)  $1 + \frac{1}{25} + \frac{1}{625} + \dots + \frac{1}{5^{2n}}$ .

h)  $\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(n+2)(n+3)}$ .

i)  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+1)(n+3)}$ .

j)  $\frac{3}{1 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 4} + \frac{3}{3 \cdot 5} + \dots + ?$  (encuentre usted el termino general).

k)  $-\frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots + ?$  (encuentre usted el termino general).

l)  $\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k j^2$ .

m)  $\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k \pi^j$ .

6. Utilice inducción matemática para demostrar las siguientes desigualdades:

a)  $a^n \leq b^n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , con  $0 \leq a \leq b$ .

b)  $(2 + j)^n > 2^n + j^n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , con  $j > 0$ .

7. Utilice inducción matemática para demostrar que:

a)  $3^n + 2^n + 1$  es divisible por 2.

b)  $3^{2n-1} + 2^{2n-1}$  es divisible por 5.

8. Considere la sucesión definida como:

$$\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 5; n \geq 1. \end{cases}$$

a) Demuestre que  $a_n \leq a_{n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

b) Demuestre que  $a_n \leq 8$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

9. Considere  $S_n = \sum_{k=1}^n kr^{k-1}$ , con  $r \neq 1$ .

a) Demuestre usando inducción matemática que

$$S_n = \frac{(n+1)r^n(r-1) + 1 - r^{n+1}}{(r-1)^2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

b) Calcule  $\sum_{k=1}^n k2^{k-1}$

c) Calcule  $\sum_{k=1}^n k2^k$

d) Determine el valor de  $\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3^k} + k\right)^2$ .

10. Se define  $n$  factorial, denotado como  $n!$ , como

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2)(n-1)n & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

a) Calcule  $3!$

b) Calcule  $\prod_{k=1}^n k$

c) Si se define  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ , pruebe que  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

11. Determine los siguientes productos y luego demuestre sus resultados mediante inducción matemática.

a)  $\prod_{k=1}^n k^2$

b)  $\prod_{k=1}^n 3k$

c)  $\prod_{k=1}^{3n} k$

d)  $\prod_{k=1}^n k^p$  con  $p \in \mathbb{N}$

e)  $\prod_{k=1}^n p^k$  con  $p \in \mathbb{N}$

f)  $\prod_{k=1}^n \pi^{k^2}$

g)  $\prod_{k=1}^n e^{\frac{1}{k(k+1)}}$

12. Pruebe que  $\prod_{k=1}^n (2k-1) = \frac{(2n)!}{n!2^n}$

a) Usando inducción matemática.

b) Sin Usar inducción matemática. Indicación: Considere previamente  $\prod_{k=1}^m k$

y  $\prod_{k=1}^m 2k$  para algún  $m$  "conveniente".

13. Calcule

$$a) \sum_{m=1}^n \prod_{k=1}^m \frac{3k+5}{3k+2}.$$

$$b) \prod_{m=1}^n \sum_{k=1}^m 8k.$$

14. Demuestre la veracidad de las siguientes afirmaciones o de un contraejemplo para mostrar su falsedad:

$$a) \sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n a_k \cdot \sum_{k=1}^n b_k$$

$$b) \prod_{k=1}^n (a_k + b_k) = \prod_{k=1}^n a_k + \prod_{k=1}^n b_k$$

$$c) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

$$d) \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

$$e) \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = 1 + \frac{1}{n}$$

$$f) \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n + 1$$

---