GUÍA N°1 DE CÁLCULO
sección B-07
Profesores: Luis M. Riquelme Q. Felipe A. López B.
Ayudante: Mauricio S. Olivares A.

Viernes 10 de Abril de 2009

---

1. Resuelva las siguientes ecuaciones en $\mathbb{R}$:

   a) $x^3 + 6x^2 + 8x = 0.$
   b) $(x^2 - 1)^4 - 18(x^2 - 1)^2 + 80 = 0.$
   c) $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 0.$
   d) $\sqrt{x^2 + 9} = 5.$
   e) $\sqrt{\dfrac{x^2 - 3}{x + 5}} = 0.$
   f) $x^5 - x = 0.$
   g) $2x^4 + 3x^2 - 5 = 0.$
   h) $\dfrac{(x^3 - 2x^2)\sqrt{x + 5}}{(x^3 + 1)(x - 2)} = 0.$
   i) $\sqrt{x^2 - 1} = 4.$
   j) $\dfrac{(x - 3)(x + 4)(x^2 - 16)}{(x^2 - 9)(x^2 + 1)} = 0.$
   k) $x^3 + 8x^2 + 15x = 0$
   l) $x^3 - 10x^2 + x + 8 = 0$
   m) $2x^3 - 3x^2 - 10x + 8 = 0$

2. Resuelva las siguientes inecuaciones en $\mathbb{R}$:

   a) $x^3 + 6x^2 + 8x \geq 0.$
   b) $(x^2 - 1)^4 - 18(x^2 - 1)^2 + 80 \leq 0.$
   c) $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} < 0.$
   d) $\sqrt{x^2 + 9} > 5.$
   e) $\sqrt{\dfrac{x^2 - 3}{x + 5}} < 0.$
   f) $x^3 + 8x^2 + 10x - 19 \geq 0.$
   g) $x^5 - x \leq 0.$
   h) $2x^4 + 3x^2 - 5 \geq 0.$
   i) $\dfrac{(x^3 - 2x^2)\sqrt{x + 5}}{(x^3 + 1)(x - 2)} \geq 0.$

j) $\sqrt{x^2-1} \geq 4$.

k) $\dfrac{(x-3)(x+4)(x^2-16)}{(x^2-9)(x^2+1)} \leq 0$.

l) $x^3+3x^2-2x-6>0$

m) $x^3-5x^2-2x+10<0$

n) $x^5+x^4-16x-16 \leq 0$

ñ) $x^5+x^4-x-1 \geq 0$

3. Sean λ, $\mu \in \mathbb{R}^+$, demuestre que:

   a) $\dfrac{\lambda}{\mu}+\dfrac{\mu}{\lambda} \geq 2$.

   b) $\dfrac{\lambda^3}{\mu^3}+\dfrac{\mu^3}{\lambda^3} \geq \dfrac{\lambda}{\mu}+\dfrac{\mu}{\lambda}$.

4. Considere $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ un conjunto de números reales tales que $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$ y defina $\mu = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^n \lambda_j$. Demuestre que,

$$\lambda_1 \leq \mu \leq \lambda_n.$$

5. Considere los conjuntos:

   - $M = \left\{ x \in \mathbb{R} : \dfrac{x^2-19x+18}{x^4+1} \leq 0 \right\}$.
   - $L = \left\{ x \in \mathbb{R} : \dfrac{x^2-20x+36}{x^4-1} \leq 0 \right\}$.

   Determine:

   a) $M \cup L$.

   b) $M \cap L$.

   c) $M \setminus L$.

6. Considere los conjuntos:

   - $M = \{x \in \mathbb{R} : x^4-3x^3-10x^2 \geq 0\}$.
   - $L = \left\{ x \in \mathbb{R} : \dfrac{x^3-3x+2}{x^2+x+1} \leq 0 \right\}$.
   - $S = \left\{ x \in \mathbb{R} : \dfrac{x^2-18x+80}{x^4+5x^2-14} \leq 0 \right\}$.

   a) Demuestre que $1 \in L$.

Determine:

b) $S \cup M \cup L$.

c) $(M \cap L) \cup S$.

d) $(M \setminus L) \cap (M \cup L)$.

e) $(M \cup L \cup S)^c \setminus (M^c \cap L^c \cap S^c)$.

f) $M \cup L \cup S$.

7. Se define para todo $x \in \mathbb{R}^+$, $\sigma(x)$ el cual tiene las siguientes propiedades:

- $\sigma(1) = 0$.
- $\sigma(x) > 0$ si $x > 1$.
- $\sigma(x) < 0$ si $0 < x < 1$.

Determine los $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen

a) $\sigma(x^2 - 17) = 0$.

b) $\sigma\left(\dfrac{x-8}{x-10}\right) \leq 0$.

c) $\sigma\left(\dfrac{x+10}{x+8}\right) \geq 0$.

8. Dado el conjunto

$$\mathcal{S} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^3 - 14x^2 + 41x + 56}{x+4} \geq 0 \right\}.$$

a) Pruebe que $-1 \in \mathcal{S}$ y Determine todos los $x \in \mathcal{S}$ para los cuales se alcanza la igualdad a 0.

b) Determine el conjunto $\mathcal{S}$.

9. Resuelva las siguientes ecuaciones en $\mathbb{R}$:

a) $|x^3 + 6x^2 + 8x| = 0$.

b) $\dfrac{x|x-18|}{x^2+1} = 0$.

c) $\dfrac{x|x| - 3}{x+5} = 0$.

d) $|x-3| + |x-5| = 8$.

e) $|x| + |2x+5| = 3$.

f) $|x+1| + |x-8| + |x-10| - |5x+1| = 18$.

g) $x|x| - 18x + 80 = 0$.

h) $|2x + |x|| = 4$.

i) $||x| - 3| + ||x-1| + 4| = 8$.

j) $|x| + ||x| + 10| = 10$.

k) $|x| + |1 - x| = 2$.

l) $|x + 8| + |x - 10| = 18$.

m) $|x - 8| + |x - 10| = 18$.

10. Resuelva las siguientes inecuaciones en $\mathbb{R}$:

a) $|x^3 + 6x^2 + 8x| < 1$.

b) $\dfrac{x|x - 18|}{x^2 + 1} \leq 0$.

c) $\dfrac{x|x| - 3}{x + 5} > 2$.

d) $\dfrac{|x - 3| + |x - 5|}{x + 4} \geq 18$.

e) $|x| + |2x + 5| < 3$.

f) $|x + 1| + |x - 8| + |x - 10| - |5x + 1| \leq 18$.

g) $x|x| - 18x + 80 > 0$.

h) $|2x + |x|| > 4$.

i) $||x| - 3| + ||x - 1| + 4| \leq 8$.

j) $|x| + ||x| + 10| \leq 10$.

k) $|x| + |1 - x| > 2$.

l) $|x + 8| + |x - 10| \geq 18$.

m) $|x - 8| + |x - 10| \geq 18$.

11. Considere los conjuntos:

- $M = \left\{ x \in \mathbb{R} : \dfrac{x^2 - 19x + 18}{x|x| + 1} \leq 0 \right\}$.
- $L = \left\{ x \in \mathbb{R} : \dfrac{(x^2 - 20|x| + 36)\sqrt{x|x| - 1}}{x^4 - 1} \leq 0 \right\}$.

Determine:

a) $M \cup L$.

b) $M \cap L$.

c) $M \setminus L$.

12. Considere los conjuntos:

- $M = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x|^4 - 3|x|^3 - 10|x|^2 \geq 0 \right\}$.
- $L = \left\{ x \in \mathbb{R} : \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x|x|} \leq 0 \right\}$.

- $S = \left\{ x \in \mathbb{R} : \dfrac{x^2 - 18x + 80}{|x-3|+4} \leq 0 \right\}.$

Determine:

a) Demuestre que $2 \in L$.
b) $S \cup M \cup L$.
c) $(M \cap L) \cup S$.
d) $(M \setminus L) \cap (M \cup L)$.
e) $(M \cup L \cup S)^c \setminus (M^c \cap L^c \cap S^c)$.
f) $(M \cup L) \cap (S \cup L)$.
g) $(M \cap L) \cup (L \cap S)$.

13. Se define para todo $x \in \mathbb{R}^+$, $\sigma(x)$ el cual tiene las siguientes propiedades:

- $\sigma(8) = \sigma(10) = 0$.
- $\sigma(x) > 0$ si $x \in]8, 10[$.
- $\sigma(x) < 0$ si $x \in]-\infty, 8[\cup]10, +\infty[$.

Determine los $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen:

a) $\sigma(x^2 - 17) = 0$.
b) $\sigma\left(\dfrac{|x-8|}{x-10}\right) \leq 0$.
c) $\sigma\left(\left|\dfrac{x+10}{x+8}\right|\right) \geq 0$.

14. Dado el conjunto

$$\mathcal{S} = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x| + \frac{1}{|x|} \leq 18|x-5| \right\}.$$

Expreselo en notación de intervalos y determine $\mathcal{S}^c$.

15. Considere un conjunto de números reales $\{\lambda_m\}_{m=1}^n$ y defina las siguientes expresiones:

- $\mu = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{m=1}^{n} \lambda_m.$
- $\mu' = \left| \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{m=1}^{n} \lambda_m \right|.$
- $\mu'' = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{m=1}^{n} |\lambda_m|.$

Denuestre que $\mu \leq \mu' \leq \mu''$.