GUÍA N°1 DE ÁLGEBRA

sección B-08 Profesores: Luis M. Riquelme Q. Felipe A. López B.
Ayudante: Felipe E. Paredes G.

Viernes 10 de Abril de 2009

---

1. Resuelva las siguientes ecuaciones en $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$:

   a) $x^3 + 5x^2 + 6x = 0.$

   b) $(x^2 - 1)^4 - 17(x^2 - 1)^2 + 72 = 0.$

   c) $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 5} = 0.$

   d) $x^5 - 16x = 0.$

   e) $2x^4 + 3x^2 - 5 = 0.$

   f) $\dfrac{(x^3 - 2x^2)\sqrt{x + 5}}{(x^3 + 1)(x - 2)} = 0.$

   g) $x^3 - 3x + 6 = 4.$

   h) $\dfrac{(x - 3)(x + 4)(x^2 - 16)}{(x^2 - 9)(x^2 + 1)} = 0.$

   i) $x^3 + 8x^2 + 10x - 19 = 0$, usando que $x = 1$ es una solución.

   j) $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

   k) $2x^3 - 3x^2 - 4 = 0$

   l) $x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0$

   m) $x^3 - 5x^2 - 2x + 10 = 0$

   n) $x^5 + x^4 - 16x - 16 = 0$

   ñ) $x^5 + x^4 - x - 1 = 0$

2. Considere los conjuntos:

   - $M = \left\{ x \in \mathbb{R} : \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x^4 + 1} = 0 \right\}.$
   - $P = \left\{ x \in \mathbb{R} : \dfrac{x^2 + 2x - 15}{x^4 - 1} = 0 \right\}.$

   Determine:

   a) $M \cup P.$

   b) $M \cap P.$

   c) $M \setminus P.$

   d) $P \setminus M.$

   e) $M \triangle P$. Donde $M \triangle P = (M \setminus P) \cup (P \setminus M).$

3. Considere los conjuntos:

   - $P = \{x \in \mathbb{R} : x^4 - 3x^3 - 10x^2 = 0\}$.
   - $L = \{x \in \mathbb{R} : 4x^3 - 3x^2 = 1\}$.
   - $M = \{x \in \mathbb{R} : (x^2 - 18x + 80)(x^4 + 5x^2 - 14) = 0\}$.

   Determine:

   a) $M \cup P \cup L$.
   b) $(P \cap L) \cup M$.
   c) $(M \setminus L) \cap (P \cup L)$.
   d) $(P \cup L \cup M)^c \setminus (P^c \cap L^c \cap M^c)$.
   e) $P \cup L \cup M$.

4. Determine el cuociente y el resto entre $p(x)$ y $q(x)$ en cada uno de los siguientes casos:

   a) $p(x) = 3x^5 - 4x^3 + 2x^2$ $\quad q(x) = 7x^3 - 2x^3 - 2x - 2$
   b) $p(x) = 3x^8 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 7$ $\quad q(x) = -2x - 2$
   c) $p(x) = x^4 + 16x^2 + 64$ $\quad q(x) = x^2 + 8$
   d) $p(x) = x^4 - 50x^2 + 625$ $\quad q(x) = x - 5$
   e) $p(x) = x^4 - 50x^2 + 625$ $\quad q(x) = x + 5$
   f) $p(x) = x^4 - 50x^2 + 625$ $\quad q(x) = x^2 - 25$
   g) $p(x) = 5x^5 + 2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x - 1$ $\quad q(x) = 7x^3 - 2x^3 - 2x^2 + 3x - 1$
   h) $p(x) = 6x^4 + 3x^5 - 4x^3 + 2x^2$ $\quad q(x) = 3x^3 - 2x^2 - 2x + 2$
   i) $p(x) = 5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x$ $\quad q(x) = 3x^2 - 2x + 1$
   j) $p(x) = 5x^4 - x^3 - 3x^2 + x - 2$ $\quad q(x) = x - 1$
   k) $p(x) = 5x^4 - x^3 - 3x^2 + x - 2$ $\quad q(x) = 3$
   l) $p(x) = 5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x$ $\quad q(x) = -5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x$

5. Señale en cada uno de los casos anteriores en que casos $p(x)$ es divisible por $q(x)$, vale decir $q(x) \mid p(x)$

6. Determine los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ sean iguales

   a) $p(x) = (3a + 2b + c)x^3 + (a - 4b)x^2 + 3a$ $\quad q(x) = 4x^3 - 2x^2 + 6$.
   b) $p(x) = (a + b + c)x^3 + (a - b + c)x^2 + 3a - 2b - c$
   $q(x) = 4ax^3 - 2bx^2 + 6a - 2b + c$.
   c) $p(x) = (a^2 + b^2 + c^2)x^3 + (a^2 - b^2)x^2 + c^2$
   $q(x) = a^2x^3 + b^2x^2 + 4$.

d) $p(x) = x^3 + ax^2 + bx - c - 2$
$q(x) = ax^3 + (b+1)x^2 + 4.$

7. Determine el valor de α tal que si $p(x) = 3x^3 + \alpha x - 3$ y $q(x) = 3x - 2$, entonces $q(x) \mid p(x)$.

8. Escriba el número 18 en base:

    a) 2
    b) 3
    c) 4
    d) 5
    e) 6
    f) 7
    g) 8
    h) 9
    i) 10

9. Escriba en base 10 los siguientes números

    a) $(101011)_2$
    b) $(101011)_3$
    c) $(123)_4$
    d) $(1021)_3$
    e) $(140)_5$

10. Determine la base X en cada uno de los siguientes casos

    a) $(101)_X = 5$
    b) $(111)_X = 7$
    c) $(110)_X = 12$
    d) $(211)_X = 22$
    e) $(211)_X = 37$

11. Consideremos un sistema en base 12, en tal caso debemos disponer de 12 dígitos, los cuales adoptaremos como

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B\}$$

Donde A representa la magnitud diez, y B la magnitud once.

    a) Esbriba 18 en base 12.
    b) Esbriba 12 en base 12.
    c) Esbriba 144 en base 12.

d) Esbriba 10 en base 12.

e) Esbriba 8 en base 12.

f) Escriba en base 10 el número $(10AB)_{12}$

g) Escriba en base 10 el número $(1A0B)_{12}$

h) Escriba en base 10 el número $(1A2B)_{12}$

i) Escriba en base 10 el número $(AB)_{12}$

12. Dado el polinomio

$$L(x) = px^3 + qx^2 - x$$

Determine p y q tales que simultaneamente

- $x = 1$ sea una solución de $L(x) = 0$
- $L(x)$ sea divisible por $x + 1$

13. Si sobre $\mathbb{R}^2$ se define el producto

$$(x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu)$$

a) Muestre que este producto es conmutativo.

b) Verifique que la ecuación:

$$(x, y)^2 + (9, 0) = (0, 0)$$

Admite como soluciones $(x_1, y_1) = (0, 3)$, $(x_2, y_2) = (0, -3)$.

c) Resuelva en $\mathbb{R}^2$ la ecuación:

$$(x, y)^2 - (9, 0) = (0, 0)$$

d) Resuelva en $\mathbb{C}$ las ecuaciones:

$$z^2 - 9 = 0 \quad (1)$$
$$z^2 + 9 = 0 \quad (2)$$

Compare sus resultados con los obtenidos en los ítemes anteriores. ¿Nota alguna relación interesante?.

14. Define sobre $\mathbb{R}^{2\times 2}$ la siguiente operación:

$$A \diamond B = AB - BA$$

Muestre un contraejemplo que permitiva ver que esta operación no es asociativa, i.e, escoja $A, B, C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que

$$(A \diamond B) \diamond C \neq A \diamond (B \diamond C)$$