

Un par de problemas resueltos:
Luis M. Riquelme Q.
月日風

1.- Muestre que:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{n}\right) \neq \operatorname{sgn}\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}\right)$, donde sgn denota la función signo.

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[2 - \frac{1}{n}\right] \neq \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right)\right]$, donde $[.]$ denota la función parte entera.

2.- Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x|x| - 4x}$$

Determine su dominio. Determine sus ceros.

- a) Determine su dominio.
- b) Determine sus ceros.
- c) Analice el signo de f
- d) Esboce el gráfico de $g(x) = \operatorname{sgn} f(x)$

3.- Calcule:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[x] + [2x] + \dots + [nx]}{n^2}$$

Donde $[.]$ denota función parte entera.

Solución:

1.- a) Notemos que por una parte:

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1.$$

Esto se debe a que $\frac{1}{n} > 0$, pues estamos trabajando con $n \in \mathbb{N}$, y luego entonces

$\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ y el límite de una constante es dicha constante.

Por otra parte:

$$\bullet \operatorname{sgn}\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}\right) = \operatorname{sgn} 0 = 0.$$

b) Notemos que por una parte:

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[2 - \frac{1}{n}\right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1.$$

Esto se debe a que $0 < \frac{1}{n} < 1$, pues estamos trabajando con $n \in \mathbb{N}$, y luego entonces

$\left[2 - \frac{1}{n}\right] = [1, \dots] = 1$ y el límite de una constante es dicha constante.

Por otra parte:

$$\bullet \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) \right] = [2] = 2.$$

Estos ejemplos ilustran que en general NO es verdad que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\right)$$

En los casos en que si es verdad, es por ejemplo en las potencias de exponente positivo, raíces si la sucesión es positiva, y de exponente negativo si la sucesión converge a algo diferente de cero. Para la segunda prueba estudiaremos esto con más detención.

2.- Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x|x| - 4x}$$

a) Dominio:

$$f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x|x| - 4x \neq 0$$

Y claramente:

$$x|x| - 4x = 0 \Leftrightarrow x(|x| - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee |x| = 4 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm 4.$$

Por lo tanto:

$$\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-4, 0, 4\}$$

b) Ceros:

Claramente, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

c) Signo de f :

Conviene notar que, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x|x| - 4x} = \frac{(x+1)(x-1)}{x(|x| - 4)}$

- Si $x < 0$:

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x(|x| - 4)} = \frac{(x+1)(x-1)}{x(-x-4)} = -\frac{(x+1)(x-1)}{x(x+4)}$$

Y notamos que para: $\frac{(x+1)(x-1)}{x(x+4)}$

$-\infty$	(-4)	[-1]	(0)	[1]	$+\infty$
+	-	+	-	+	

Luego para: $-\frac{(x+1)(x-1)}{x(x+4)}$

$-\infty$	(-4)	[-1]	(0)	[1]	$+\infty$
-	+	-	+	-	

Pero esto esta bajo la restricción $x < 0$, luego concluimos, en esta parte, que:

$$f(x) < 0, \quad x \in]-\infty, -4[\cup]-1, 0[$$

$$f(x) = 0, \quad x = -1$$

$$f(x) > 0, \quad x \in]-4, -1[$$

- Si $x > 0$:

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x(|x| - 4)} = \frac{(x+1)(x-1)}{x(x-4)}$$

Y notamos que para: $\frac{(x+1)(x-1)}{x(x-4)}$

$-\infty$	[-1]	(0)	[1]	(4)	$+\infty$
+	-	+	-	+	

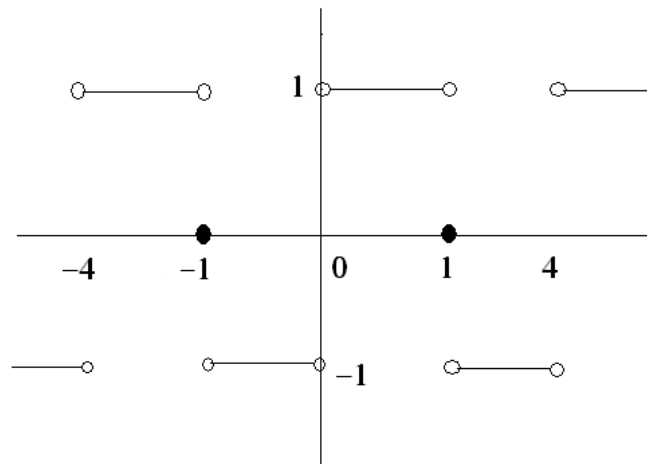
Pero esto esta bajo la restricción $x > 0$, luego concluimos, en esta parte, que:

$$\begin{aligned} f(x) < 0, & \quad x \in]1, 4[\\ f(x) = 0, & \quad x = 1 \\ f(x) > 0, & \quad x \in]0, 1[\cup]4, +\infty[\end{aligned}$$

Luego, concluimos que:

$$\begin{aligned} f(x) < 0, & \quad x \in]-\infty, -4[\cup]-1, 0[\cup]1, 4[\\ f(x) = 0, & \quad x = \pm 1 \\ f(x) > 0, & \quad x \in]-4, -1[\cup]0, 1[\cup]4, +\infty[\end{aligned}$$

d) Gráfico de $g(x) = \text{sgn } f(x)$



3.- Notemos en primer lugar que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[x] + [2x] + \dots + [nx]}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n [kx]}{n^2}$$

Este límite es un límite de una suma que en su rango (los contadores) depende de n , por lo tanto no se puede intercambiar límite y suma. La suma tampoco se muestra conocida y además sabemos del problema 1 que la parte entera no es intercambiable con el límite. Lo mejor entonces es proceder por teorema de acotamiento:

Notemos que, para cualquier $y \in \mathbb{R}$, es válida la desigualdad:

$$y - 1 \leq [y] \leq y$$

De esta forma:

$$\begin{aligned} x - 1 &\leq [x] \leq x \\ 2x - 1 &\leq [2x] \leq 2x \\ &\vdots \\ nx - 1 &\leq [nx] \leq nx \end{aligned}$$

Y entonces:

$$\begin{aligned} x - 1 + 2x - 1 + \dots + nx - 1 &\leq [x] + [2x] + \dots + [nx] \leq x + 2x + \dots + nx \\ &\Downarrow \\ x(1 + 2 + \dots + n) - n &\leq [x] + [2x] + \dots + [nx] \leq x(1 + 2 + \dots + n) \\ &\Downarrow \\ \frac{xn(n+1)}{2} - n &\leq [x] + [2x] + \dots + [nx] \leq \frac{xn(n+1)}{2} \\ &\Downarrow \\ \frac{xn^2 + (x-2)n}{2n^2} &\leq [x] + [2x] + \dots + [nx] \leq \frac{xn^2 + xn}{2n^2} \end{aligned}$$

Y claramente:

- $$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{xn^2 + (x-2)n}{2n^2} = \frac{x}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{xn^2 + xn}{2n^2}$$

Luego, por teorema de acotamiento:

- $$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[x] + [2x] + \dots + [nx]}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n [kx]}{n^2} = \frac{x}{2}$$