

Ejercicio Resuelto
Luis M. Riquelme Q.
月日風猫犬狼虎

Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x < -1 \\ \frac{x+3}{x+2} & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

- 1) Determine su dominio.
- 2) Encuentre sus ceros y analice su signo.
- 3) Muestre que f es una función inyectiva para $x \in [-1, 1]$.
- 4) Muestre que $0 \leq f(x) \leq 2, \forall x \in \text{Dom}f$.
- 5) Esboce el gráfico de $g(x) = \text{sgn } f(x)$
- 6) Esboce el gráfico de $h(x) = [f(x)]$, donde $[.]$ denota parte entera.

SOLUCIÓN

Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x < -1 \\ \frac{x+3}{x+2} & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

1) Dominio:

Claramente $f(x) \in \mathbb{R}$ salvo si $x+2=0$, pero esto no ocurre pues la forma racional $\frac{x+3}{x+2}$ solo vale si $x \in [-1, 1]$.

Por lo tanto: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

2) Encuentre sus ceros y analice su signo.

- Si $x < -1 \Rightarrow f(x) = 2 > 0$
- Si $x > 1 \Rightarrow f(x) = 0$
- Si $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x+3}{x+2}$ y esta expresión es siempre positiva para $x \in [-1, 1]$, pues notemos que al analizar la variación de signo:

$-\infty$	$[-3]$	(-2)	$+\infty$
+	-	+	

De esta forma, concluimos que:

- $f(x) > 0$, $x \in]-\infty, 1]$
- $f(x) = 0$, $x \in]1, +\infty[$

• Notemos que:

$$\begin{aligned} f(x) = f(z) &\Rightarrow \frac{x+3}{x+2} = \frac{z+3}{z+2} \\ &\Rightarrow (x+3)(z+2) = (z+3)(x+2) \\ &\Rightarrow xz + 2x + 3z + 6 = xz + 2z + 3x + 6 \\ &\Rightarrow 2x + 3z = 2z + 3x \\ &\Rightarrow x = z \end{aligned}$$

Como $f(x) = f(z) \Rightarrow x = z$ como única posibilidad, entonces f es inyectiva.

3) Separando los casos:

- $x < -1 \Rightarrow f(x) = 2 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 2$
- $x > 1 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 2$
- $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x+3}{x+2} \Rightarrow f(x) \geq 0$

Por lo analizado en la parte del signo. Falta mostrar que, $f(x) \leq 2$

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{x+2} \leq 2 &\Leftrightarrow \frac{x+3}{x+2} - 2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x+3-2x-4}{x+2} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-x-1}{x+2} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x+1}{x+2} \geq 0 \end{aligned}$$

Al analizar la variación de signo:

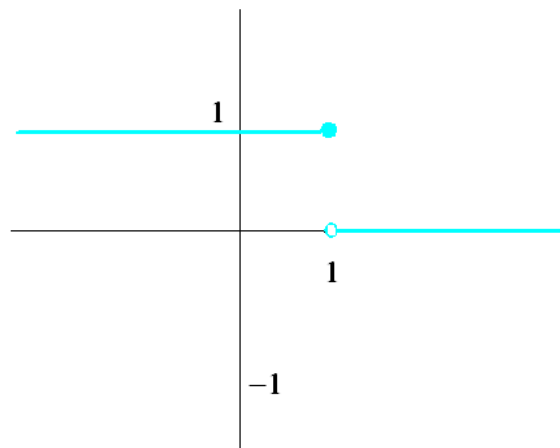
$-\infty$	(-2)	$[-1]$	$+\infty$
+	-	+	

Entonces, $\frac{x+3}{x+2} \leq 2 \Leftrightarrow x \in [-1, +\infty[\supseteq [-1, 1]$, por ende $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 2$

Y de esta forma $0 \leq f(x) \leq 2, \forall x \in \text{Dom}f$.

4) Gráfico de $g(x) = \text{sgn } f(x)$: Por el análisis de signo vemos que:

$$g(x) = \text{sgn } f(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$



5) Gráfico de $h(x) = [f(x)]$

- $x < -1 \Rightarrow f(x) = 2 \Rightarrow h(x) = [f(x)] = [2] = 2.$
- $x > 1 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow h(x) = [f(x)] = [0] = 0.$
- $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x+3}{x+2} \Rightarrow 0 < f(x) \leq 2$

Y no es difícil ver que, salvo si $x = -1$, $0 < \frac{x+3}{x+2} < 2$, esto se puede ver resolviendo la misma desigualdad del acotamiento, pero con menor estricto a 2, con lo cual $h(-1) = [f(-1)] = 2$.

Luego, $-1 < x \leq 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x+3}{x+2} \Rightarrow 0 < f(x) < 2$, por lo que su parte entera puede ser 0 o 1. Sin embargo notemos que:

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{x+2} \geq 1 &\Leftrightarrow \frac{x+3}{x+2} - 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x+3-x-2}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-2, +\infty[\supseteq]-1, 1] \end{aligned}$$

Luego, $-1 < x \leq 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x+3}{x+2} \Rightarrow 1 < f(x) < 2 \Rightarrow h(x) = [f(x)] = 1$

De esta forma:

$$h(x) = [f(x)] = \begin{cases} 2 & x \leq -1 \\ 1 & -1 < x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

Y su gráfico es:

