Ecuaciones cuadráticas

Objetivos: Al terminar esta lección podrás definir lo que es una ecuación cuadrática y podrás resolver ecuaciones cuadráticas.

En la lección previa aprendimos lo que es una ecuación y lo que es una ecuación lineal. Aprendimos que en las ecuaciones lineales las variables sólo aparecen a la primera potencia. *En las ecuaciones cuadráticas aparece la segunda potencia de la(s) variable(s)* y podrían también aparecer primeras potencias. *Una ecuación **cuadrática** es una ecuación que puede escribirse en la forma* $ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$. La siguiente tabla muestra ejemplos y contraejemplos de ecuaciones cuadráticas.

Ecuaciones cuadráticas	**Ecuaciones no-cuadráticas**
$3x^2 + 5x + 2 = 0$	$\frac{-4}{x^2} = 2 + x$
$-\frac{1}{2}y^2 + 2y = 8 + 10y$	$\sqrt{9 - x} = 3x$
$2t^2 - 1 = 4$	$12x = 45 = 9 - 2x$

Conviene notar que en el primero de los ejemplos de las ecuaciones no-cuadráticas, la ecuación no es cuadrática a pesar de contener una segunda potencia de la variable. La explicación es que al estar en un denominador es como si la variable estuviera elevada a la -2, no a la 2.

Las ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 = a$, son las más fáciles de resolver. Si a es negativo, no hay soluciones en los números reales. Recordemos que el cuadrado de un número real nunca es negativo. Por eso no hay soluciones si a es negativo. Si a es cero, sólo hay una solución: $x = 0$. Finalmente, si a es positivo, hay dos soluciones: $x = \sqrt{a}$ y $x = -\sqrt{a}$. Como las dos soluciones sólo difieren en el signo podemos escribir $x = \pm\sqrt{a}$.

Ejemplos

1) $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3$

2) $u^2 = 64 \Rightarrow u = \pm\sqrt{64} \Rightarrow u = \pm 8$

3) $(2t+1)^2 = 25 \Rightarrow 2t + 1 = 5$ ó $2t + 1 = -5$

$\Rightarrow 2t = 4$ ó $2t = -6$

$\Rightarrow t = 2$ ó $t = -3$

4) $(3y+5)^2 = 0 \Rightarrow 3y+5=0 \Rightarrow 3y=-5 \Rightarrow y = -5/3$

5) $2m^2+5=3 \Rightarrow 2m^2=-2 \Rightarrow m^2=-1 \Rightarrow$ no hay solución

El tercer ejemplo arriba es importante porque muestra cómo a veces conviene tratar a una expresión como si fuera una variable. En ese caso tomamos a la expresión $(2t+1)$ como si fuera la x del párrafo previo. El quinto ejemplo ilustra el hecho de que aunque una ecuación cuadrática no luzca inicialmente como de la forma $x^2=a$, puede ser re-escrita, usando las propiedades de ecuaciones, para que tenga esa forma.

Solución por factorización

Una propiedad importante de los números reales es que el producto de dos números sólo puede ser igual a 0 si al menos uno de ellos es 0. Simbólicamente: $ab=0 \Rightarrow a=0$ ó $b=0$. Esto implica que si podemos re-escribir la ecuación cuadrática en la forma $ab = 0$, podemos obtener dos ecuaciones más fáciles de resolver: $a = 0$ y $b = 0$.

Ejemplos

6) $(2x+1)(x-3)=0$

$\Rightarrow 2x+1=0$ ó $x-3=0$

$\Rightarrow 2x=-1$ ó $x=3$

$\Rightarrow x=\frac{-1}{2}$ ó $x=3$

Por lo tanto la ecuación tiene dos soluciones y el conjunto de soluciones o *conjunto solución* es $\left\{\frac{-1}{2}, 3\right\}$.

7) $6x^2+19x+10=0$

$\Rightarrow (3x+2)(2x+5)=0$

$\Rightarrow 3x+2=0$ ó $2x+5=0$

$\Rightarrow 3x=-2$ ó $2x=-5$

$\Rightarrow x=-\frac{2}{3}$ ó $x=-\frac{5}{2}$

$\Rightarrow$ el conjunto solución es $\left\{-\frac{2}{3}, -\frac{5}{2}\right\}$

8) $9y^2+4=12y$

$\Rightarrow 9y^2-12y+4=0$

$\Rightarrow (3y-2)(3y-2)=0$

$\Rightarrow 3y-2=0$

$\Rightarrow 3y=2 \Rightarrow y=2/3 \Rightarrow$ el conjunto solución es $\{2/3\}$

El ejemplo 8 de arriba muestra que antes de aplicar la técnica de resolver mediante factorización es necesario que la ecuación esté en forma *estándar*, esto significa que uno de los lados de la ecuación es 0. Cuidándonos siempre de tener la ecuación en forma estándar antes de factorizar, podemos usar esta técnica de resolver ecuaciones aún en algunas ecuaciones de mayor grado, como veremos en el siguiente ejemplo.

9) $u^4 + 5u^3 = -6u^2$

$\Rightarrow \quad u^4 + 5u^3 + 6u^2 = 0$

$\Rightarrow \quad u^2\left(u^2 + 5u + 6\right) = 0$

$\Rightarrow \quad u^2(u+3)(u+2) = 0$

$\Rightarrow \quad u = 0$ ó $u = -3$ ó $u = -2$

$\Rightarrow$ el conjunto solución es $\{0, -3, -2\}$

Ejercicios

Resuelva por factorización las siguientes ecuaciones

1) $2x^2 + 5x - 12 = 0$

2) $a^2 - 5a + 6 = 0$

3) $4s^2 + 15 = 17s$

4) $x^5 = x^3$

Respuestas

Solución por el completamiento del cuadrado

Es siempre posible manipular algebraicamente una ecuación cuadrática para expresarla en la forma $u^2 = a$, la cual aprendimos a resolver al principio de esta lección. Es más fácil conseguir esto si el coeficiente del término cuadrado es 1. En ese caso, determinamos qué constante hay que añadir a los términos que contienen la variable para tener un cuadrado perfecto de la forma $u^2 + 2ku + k^2$. Recordemos que ese es el resultado de expandir $(u+k)^2$, Entonces podremos formar el cuadrado perfecto $(u+k)^2$ si a los términos que tienen la variable añadimos una constante que es el <u>cuadrado de la mitad del coeficiente del término lineal</u>. Ilustramos la técnica en el siguiente ejemplo.

10) $x^2 + 5x + \frac{9}{4} = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 + 5x = -\frac{9}{4}$ Procuramos dejar en un lado sólo los términos con la variable.

$\Rightarrow \quad x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{9}{4} + \left(\frac{5}{2}\right)^2$ Completando el cuadrado, con el cuidado de que lo añadido a un lado de la ecuación debe también ser añadido al otro lado.

$\Rightarrow \quad \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{9}{4} + \frac{25}{4}$ Factorizamos el cuadrado perfecto que formamos en el lado izquierdo.

$\Rightarrow \quad \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{16}{4}$ Simplificamos el lado derecho de la ecuación.

$\Rightarrow \quad x + \frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{16}{4}} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$ Procedemos como al resolver la ecuación $u^2 = a$.

$\Rightarrow \quad x = 2 - \frac{5}{2}$ ó $x = -2 - \frac{5}{2}$

$\Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$ ó $x = -\frac{9}{2}$

Si el coeficiente del término cuadrado en una ecuación cuadrática no es 1, podemos proceder como en el ejemplo previo para completar el cuadrado, después de factorizar ese coeficiente. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento.

11) $3x^2 + 2x - 1 = 0$

$\Rightarrow \quad 3x^2 + 2x = 1$ En un lado de la ecuación sólo ponemos los términos con x.

$\Rightarrow \quad 3\left(x^2 + \frac{2}{3}x\right) = 1$ Factorizamos el coeficiente del término cuadrado para conseguir que el término cuadrado tenga coeficiente 1.

$\Rightarrow \quad x^2 + \frac{2}{3}x = \frac{1}{3}$ Dejamos en un lado de la ecuación sólo un polinomio cuadrático con coeficiente principal 1.

$\Rightarrow \quad x^2 + \frac{2}{3}x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2$ Completamos el cuadrado

$\Rightarrow \quad \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$ Factorizamos el cuadrado perfecto.

$\Rightarrow \quad \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{3+1}{9}$ Simplificamos.

$\Rightarrow \quad x + \frac{1}{3} = \pm\sqrt{\frac{4}{9}}$ Procedemos como para resolver la ecuación $u^2 = a$

$\Rightarrow \quad x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$ ó $x = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}$ ó $x = -1$

El siguiente ejemplo muestra cómo es posible simplificar una ecuación mediante el uso de una nueva variable que encapsule parte de la ecuación para hacer que la ecuación luzca más sencilla.

12) $(2z)^2 + 3(2z) = 1$

$\Rightarrow \quad u^2 + 3u = 1$ Usamos u para encapsular a $2z$ y simplificar la ecuación.

$\Rightarrow \quad \left(u + \frac{3}{2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$\Rightarrow \quad u + \frac{3}{2} = \pm\sqrt{1 + \frac{9}{4}}$

$\Rightarrow \quad u = \sqrt{\frac{13}{4}} - \frac{3}{2}$ ó $u = -\sqrt{\frac{13}{4}} - \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \quad u = \frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{3}{2}$ ó $u = \frac{-\sqrt{13}}{2} - \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \quad 2z = \frac{\sqrt{13}-3}{2}$ ó $2z = \frac{-\sqrt{13}-3}{2}$ Siempre debemos regresar a la variable original de la ecuación.

$\Rightarrow \quad z = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{13}-3}{2}$ ó $z = \frac{1}{2} \cdot \frac{-\sqrt{13}-3}{2}$

$\Rightarrow \quad z = \frac{\sqrt{13}-3}{4}$ ó $z = \frac{-\sqrt{13}-3}{4}$

Ejercicios

Resuelva, usando el método de completar el cuadrado, las siguientes ecuaciones.

5) $7x^2 - 3x - 4 = 0$

6) $2x - 9 = 6x^2 - 11$

7) $10 - 8y = 4y^2$

8) $(3m + 7)^2 + 5(3m + 7) - 150 = 0$

Respuestas

Si aplicamos la técnica de completar el cuadrado a una ecuación cuadrática general obtendremos una fórmula general para resolver todas las ecuaciones cuadráticas. Consideremos la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$. Resolviendo mediante el completamiento del cuadrado obtendremos:

$$ax^2 + bx = -c$$

$$\Rightarrow \quad a\left(x^2 + \tfrac{b}{a}x\right) = -c$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + \tfrac{b}{a}x = -\tfrac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + \tfrac{b}{a}x + \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2 = -\tfrac{c}{a} + \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 = -\tfrac{c}{a} + \tfrac{b^2}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 = \tfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \quad x + \tfrac{b}{2a} = \pm\sqrt{\tfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\Rightarrow \quad x = \tfrac{-b}{2a} \pm \tfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

$$\Rightarrow \quad x = \tfrac{-b}{2a} \pm \tfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Note que $\sqrt{4a^2} = |2a|$, pero como la fracción que contiene a $\sqrt{4a^2}$ está precedida de ±, el signo de a no tiene efecto en la fórmula.

Finalmente conseguimos la fórmula cuadrática:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

No olvidemos que esta fórmula **sólo sirve para resolver ecuaciones cuadráticas**. Con ella podemos resolver cualquier ecuación cuadrática.

Ejemplos:

13) $3x^2 - 7x + 2 = 0$

$\Rightarrow \quad a = 3,\ \ b = -7,\ \ c = 2$ en la fórmula cuadrática.

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2(3)}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{6}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{12}{6} \quad \text{ó} \quad x = \frac{2}{6}$$

$$\Rightarrow \quad x = 2 \quad \text{ó} \quad x = \frac{1}{3}$$

14) $3y^2 + 4y = y + 5$

$\Rightarrow \quad 3y^2 + 3y - 5 = 0$ Nótese que antes de usar la fórmula cuadrática es necesario que la ecuación esté en forma estándar.

$\Rightarrow \quad a = 3, \ \ b = 3, \ \ c = -5$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{2 \cdot 3}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{-3 + \sqrt{69}}{6} \quad \text{ó} \quad y = \frac{-3 - \sqrt{69}}{6}$$

15) $4z^2 - 4z + 1 = 0$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4}$$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{8}$$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

En esta ecuación las dos soluciones son iguales, por lo que decimos que sólo hay una solución.

16) $u^2 + u + 1 = 0$

$$\Rightarrow \quad u = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad u = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \quad \text{ó} \quad u = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

$\Rightarrow$ no hay soluciones reales pues $\sqrt{-3}$ no es un número real (es imaginario).

En los ejemplos previos vimos que una *ecuación cuadrática puede tener dos, una, o ninguna solución (real)*. El número de soluciones lo podemos determinar evaluando solamente el radicando que aparece en la fórmula cuadrática: $b^2 - 4ac$, al que llamaremos el *discriminante* de la ecuación porque nos permite discriminar cuántas y de qué tipo son las soluciones de la ecuación. Si el discriminante es negativo, tendremos en la fórmula la raíz de un negativo y eso significa que las soluciones son números *complejos* o *imaginarios*. La siguiente tabla muestra la relación entre el signo del discriminante y las soluciones a la ecuación.

$b^2 - 4ac$	Soluciones
>0	2 reales
=0	1 real
<0	2 complejas

Ejercicios:

Resuelva las ecuaciones usando la fórmula cuadrática.

9) $3x^2 + 10x + 2 = 0$

10) $-v^2 - v = -1$

11) $3m = 2m^2 - \frac{9}{8}$

12) $\frac{2}{3}x^2 - \sqrt{8}\,x + 3 = 0$

13) $2(3m-1)^2 + (3m-1) = 1$

Respuestas

Asignación del texto:

- **Leer págs. 40-46;**
- **Hacer los ejercicios 1-51 (impares), página 46**