



Capítulo 4

Sistemas de ecuaciones lineales

4

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

El capítulo anterior trataba acerca de las matrices y los determinantes. Este capítulo trae un tema muy ligado con el del capítulo anterior ya que los sistemas de ecuaciones se pueden resolver por varios métodos, unos de ellos apoyados en el uso de determinantes o de matrices. Lo que se busca principalmente con un sistema de ecuaciones es modelar un escenario o situación real, y es ahí donde debe recaer la fortaleza del administrador público, ya que el procedimiento algorítmico matemático como veremos puede seguirse por diversos caminos con igual resultado e incluso puede y debe ser apoyado por el computador. Sin embargo, es necesario reconocer el procedimiento para hacer significativo lo que se está estudiando, por eso se abordarán aquí algunos métodos de solución de ecuaciones lineales además de la elaboración de las ecuaciones a partir de problemas.



PLAN DEL CAPÍTULO

- 1. MÉTODO GRÁFICO**
- 2. MÉTODO DE IGUALACIÓN**
- 3. MÉTODO DE SUSTITUCIÓN**
- 4. SOLUCIÓN POR DETERMINANTES**
- 5. SOLUCIÓN CON MATRICES**
- 6. CONVERSIÓN DE UN PROBLEMA EN UN SISTEMA DE ECUACIONES**

OBJETIVO GENERAL

- El estudiante podrá de un lado construir un sistema de ecuaciones que modele un problema aplicable a comportamientos lineales, y de otro podrá encontrar la solución a dicho sistema por el método de su preferencia.

1. ECUACIONES LINEALES

Las ecuaciones lineales son representaciones de funciones lineales ya estudiadas en el módulo de matemática 1, y que pueden representar ecuaciones de demanda, oferta, ingreso, etc. La solución de un sistema de ecuaciones lineales consiste en encontrar las coordenadas del punto en el cual se cortan las rectas de dicho sistema, tal es el caso de encontrar el punto de equilibrio entre oferta y demanda del ejemplo 25 de la página 95 del módulo de Matemática 1. Algunas situaciones se representan con ecuaciones lineales de más de dos variables, las cuales también solucionaremos en este capítulo.

La matemática cuenta con un buen número de métodos para resolver los sistemas de ecuaciones lineales. Queda a gusto del estudiante escoger con cual o cuales se quedará como herramienta.

El método gráfico tiene un fin más pedagógico que práctico ya que implica el proceso de trazado de las gráficas el cual para lograr precisión requiere de papel milimetrado, regla, escuadra y a pesar de ello siempre quedan algunos errores de paralaje. Aunque aporta una buena noción de lo que se está representando. **(explicación 1)**

Tanto el método de igualación **(explicación 2)** como el de sustitución **(explicación 3)**, resultan de simples operaciones algebraicas que consisten en aplicar unas propiedades de los polinomios y transponer algunos términos. Son sencillos, siempre y cuando se apliquen a sistemas de ecuaciones 2×2 .

Otro método bastante sencillo es el de eliminación de variable de Gauss o de sumas y restas, pero que ha quedado en desuso frente a la versatilidad de otros métodos. Este método es estudiado en el bachillerato pero aquí, lo omitiremos, por considerarse que está implícito dentro del método de Gauss - Jordan con matrices.

Los determinantes a través de la Regla de Cramer, aportan un camino muy interesante y de mucha acogida por los profesionales para la solución de sistemas de ecuaciones ya que usan sólo símbolos de tipo numérico y no de tipo letra. **(explicación 4)**. Este método es el favorito de los desarrolladores de software para programar aplicativos que requieran la solución de sistemas de ecuaciones.

Con el uso de matrices se pueden solucionar sistemas de ecuaciones lineales, de hecho es el método más aceptado para sistemas de gran tamaño. Hay dos variantes para el trabajo con matrices: una es el método del pivote y otra la eliminación de Gauss-Jordan a través de operaciones con filas. Este último se trabajará en este capítulo. **(explicación 5)**

Pero, más que el método escogido, es importante la adecuada interpretación de las situaciones y la correcta elaboración del sistema de ecuaciones. **(explicación 6)**

EXPLICACIÓN 1 MÉTODO GRÁFICO

Este método consiste en hallar el punto de intersección de las dos rectas a partir de la superposición de las gráficas. Si no tienen resolución, quiere decir que las rectas son paralelas; las ecuaciones incompatibles y tampoco hay solución si se trata de una misma línea recta.

Sustituimos en ambas ecuaciones con 0 en x y y.

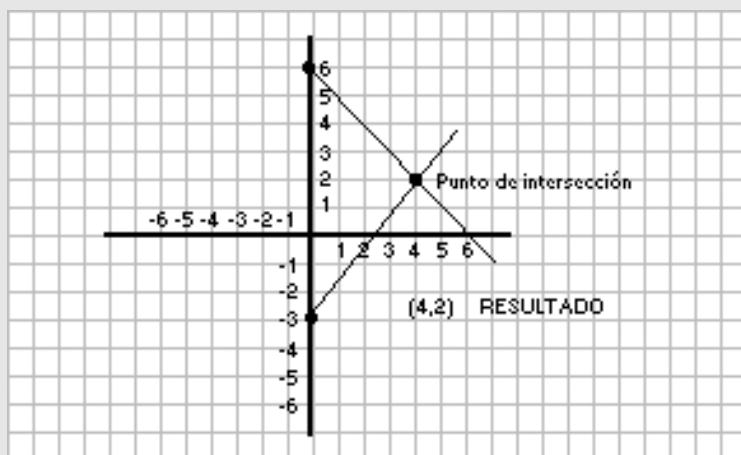


Figura 1. Solución gráfica de un sistema 2x2.

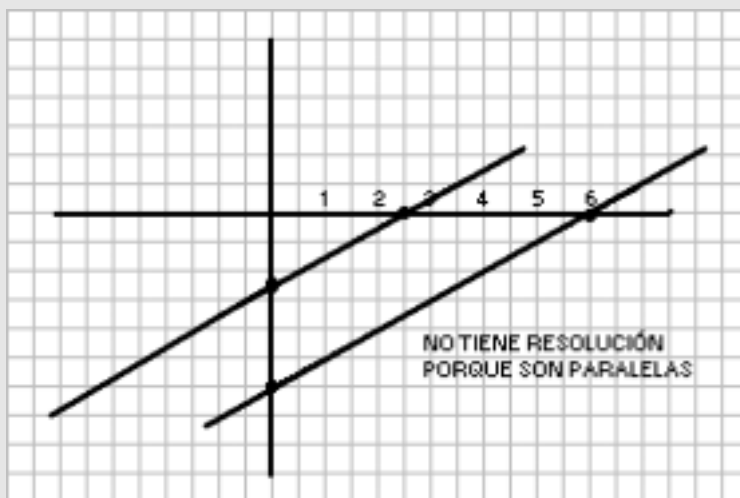
$$\begin{cases} x+y=6 \\ 5x-4y=12 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline x & y \\ \hline 0 & 6 \\ 6 & 0 \\ \hline \end{array}$$


Figura 2. Sistema sin solución posible

$$\begin{cases} x-2y=6 \\ 2x-4y=5 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline x & y \\ \hline 0 & -3 \\ 6 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline x & y \\ \hline 0 & -1.2 \\ 2.5 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{cases} x-2y=5 \\ 2x-4y=10 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline x & y \\ \hline 0 & -2.5 \\ 5 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline x & y \\ \hline 0 & -2.5 \\ 5 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Las dos representan la misma recta ya que una ecuación es un múltiplo de la otra, por tanto, conforman un sistema inconsistente.

EXPLICACIÓN 2 MÉTODO DE IGUALACIÓN

Este método consiste en despejar la misma variable de las dos ecuaciones y luego igualar las expresiones para obtener una nueva ecuación que ya solo contiene una incógnita, al despejarla obtenemos una de las coordenadas de la solución y reemplazando este resultado en una de las ecuaciones con que se hizo la igualación, se obtiene la otra coordenada. Este método es muy práctico para sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas (2x2), pero no resulta útil para sistemas con más de dos variables.

Verifiquemos el procedimiento con el siguiente sistema de ecuaciones lineales con dos variables.

$$\begin{cases} 7x + 4y = 13 \\ 5x - 2y = 19 \end{cases}$$

Despejamos la misma variable en las dos ecuaciones, se puede escoger cualquiera de las dos x ó y , pero se debe tomar la misma para las dos ecuaciones.

$$x = \frac{-4y + 13}{7},$$

$$x = \frac{2y + 19}{5}$$

Igualemos las dos expresiones:

$$\frac{-4y + 13}{7} = \frac{2y + 19}{5}$$

Despejamos y :

$$5(-4y + 13) = 7(2y + 19)$$

$$-20y + 65 = 14y + 133$$

$$-20y - 14y = 133 - 65$$

$$-34y = 68$$

$$y = \frac{68}{-34} = -2$$

Para sacar el valor de x , sustituimos el valor de y en cualquiera de las dos o x despejadas:

$$x = \frac{2(-2) + 19}{5} = 3$$

Luego las rectas se cortan en el punto (3, -2) el cual es la solución del sistema.

Otro ejemplo:

$$\begin{cases} x + 6y = 27 \\ 7x - 3y = 9 \end{cases}$$

$$x = \frac{27 - 6y}{1} = \frac{9 + 3y}{7}$$

$$7(27 - 6y) = 9 + 3y$$

$$189 - 42y = 9 + 3y$$

$$189 - 9 = 3y + 42y$$

$$180 = 45y$$

$$y = 36/9$$

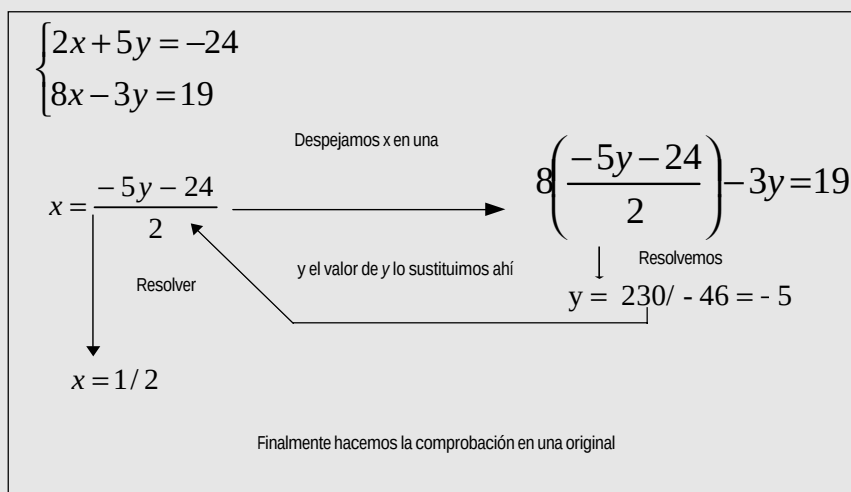
$$y = 4$$

$$x = 3$$

Solución (3, 4).

EXPLICACIÓN 3 MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Es quizás el método más usado para resolver sistemas pequeños, sin embargo, presenta los mismos inconvenientes del método de igualación, ya que aunque se puede aplicar a sistemas de ecuaciones con tres o más incógnitas, el proceso resulta largo y dispendioso.



Repasemos con otro ejemplo:

$$3x - 4y = 8$$

$$8x - 9y = 77$$

$$x = \frac{4y + 8}{3}$$

$$8(-4y - 8/3) - 9y = 77$$

$$24(-4y - 8) - 27y = 231$$

$$231 - 192 = 27y - 96y$$

$$39 = 123y$$

$$y = 3/41$$

$$x = \frac{4(3/41) + 8}{3}$$

$$x = \frac{12/41 + 8}{3}$$

$$x = \frac{340/41}{3}$$

Solución $(3/41, -340/123)$.



EXPLICACIÓN 3. Continuación

Un ejemplo más:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 5 \\ 4x + 10y = 7 \end{cases}$$

$$x = \frac{5 - 5y}{4}$$

$$4\left(\frac{5 - 5y}{4}\right) + 10y = 7$$

$$\frac{20 - 20y}{4} + 10y = 7$$

$$5 - 5y + 10y = 7$$

$$10y - 5y = 7 - 5$$

$$5y = 2$$

$$y = \frac{2}{5}$$

$$x = \frac{5 - 5(2/5)}{4}$$

$$x = \frac{5 - 10/5}{4}$$

$$x = \frac{25/5 - 10/5}{4}$$

$$x = \frac{15/5}{4}$$

$$x = \frac{3}{4}$$

EXPLICACIÓN 4 MÉTODO DE LOS DETERMINANTES

El origen de los determinantes, se dio con el propósito de solucionar sistemas de ecuaciones lineales. En efecto, proporcionaron un sistema efectivo para la solución de estas. Son ideales para quienes desprecian los símbolos algebraicos, ya que permiten obtener la solución usando exclusivamente cálculos numéricos. El proceso es el siguiente:

$$\begin{cases} 7x + 4y = 13 \\ 5x - 2y = 19 \end{cases}$$

Si tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:



EXPLICACIÓN 4. Continuación

Mire cuidadosamente de donde se formaron los determinantes:

$$x = \frac{\text{Det} \begin{bmatrix} 13 & 4 \\ 19 & -2 \end{bmatrix}}{\text{Det} \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}} = \frac{-26 - 76}{-14 - 20} = \frac{-102}{-34} = 3$$

$$y = \frac{\text{Det} \begin{bmatrix} 7 & 13 \\ 5 & 19 \end{bmatrix}}{\text{Det} \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}} = \frac{133 - 65}{-14 - 20} = \frac{68}{-34} = -2$$

Como se ve en el ejemplo, las soluciones de cada incógnita se consiguen como un cociente entre dos determinantes. Veamos que las ecuaciones estaban expresadas de la misma forma, es decir los términos dependientes o con variable a la izquierda del igual y el término independiente a la derecha.

Al construir los determinantes, el que será el denominador en todos los casos se construye con los coeficientes de la parte izquierda de los signos igual (=), en el mismo orden que aparece en el sistema de ecuaciones. Revise el ejemplo.

Al construir el numerador para hallar cada incógnita se procede así: note que los coeficientes de x no aparecen en el determinante del numerador para hallar x ya que en su lugar se han colocado los términos independientes es decir de la derecha del igual. Note también que los coeficientes de y no aparecen en el determinante para hallar y por que han sido cambiados por los términos independientes. Así se puede proceder también con sistemas de ecuaciones 3x3 y superiores.

EXPLICACIÓN 5

MÉTODO CON OPERACIONES DE FILAS ENTRE MATRICES

Emplea el sistema de eliminación de Gauss-Jordan y resulta aconsejable para sistemas de ecuaciones 3x3 y superiores. Cuando el número de variables se hace muy grande, lo aconsejable es recurrir al uso de un programa de computador.

Las operaciones que podemos llevar a cabo son: intercambiar filas; multiplicar una fila por un número; sumar o restar una fila de otra; multiplicar una fila por un número y sumarla al producto de otra fila por otro número. El procedimiento es el siguiente:

Si tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 3 \\ 3x + y - z = 7 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

1. Escribimos la matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{array} \right) \text{ a esta matriz le aplica-}$$

remos operaciones de filas hasta que quede en su forma reducida, es decir, que la parte de la matriz que está a la izquierda quede como la matriz identidad, las operaciones efectuadas las vamos mostrando al frente de la matriz con el único propósito de guiar la operación.

2. Se escoge la primera columna diferente de cero y se obtiene 1 en la parte superior. Si la columna vale cero en la parte superior se debe intercambiar la primera fila con otra que no tenga cero en su primer elemento. En este caso lo

más fácil para obtener uno en el primer término de la diagonal. La operación $F_1 \leftrightarrow F_3$ quiere decir que se intercambió la fila 1 con la fila 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right) F_1 \leftrightarrow F_3.$$

3. Se usan los múltiplos del primer renglón para obtener los ceros debajo del 1 que se obtuvo en el paso 1. La operación $F_2 \leftarrow F_2 - 3F_1$ quiere decir que multiplicamos la fila 1 por (-3) y se la sumamos a la fila 2, además colocamos ese resultado en el puesto de la fila 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & 7 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_2 + (-3)R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 + (-2)R_1 \rightarrow R_3 \end{array}$$

4. Ahora que la primera columna ya está como la primera columna de la matriz identidad 3x3, entonces, pasamos a buscar la estrategia para obtener el 1 en el segundo elemento de la segunda fila. Para ello debemos ahora usar un proceso diferente al del paso 2, pero que es el proceso más común para obtener los unos y es el dividir la fila por el elemento que está en el lugar donde necesitamos obtener el 1 en este caso 10, o lo que es lo mismo: multiplicar por (1/10) la fila 2 y el resultado colocarlo en el puesto de dicha fila.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{10} & \frac{7}{10} \\ 0 & 4 & -3 & 3 \end{array} \right) \frac{1}{10} F_2 \rightarrow F_2$$



EXPLICACIÓN 5. Continuación

5. Ahora debemos conseguir ceros arriba y abajo del 1 obtenido en el paso anterior. Para ello aprovechamos que esos elementos de la columna son múltiplos de uno y por tanto se le puede restar o sumar tantas veces la fila que tiene el 1 como sea necesario para obtener el cero.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{21}{10} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{10} & \frac{7}{10} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right) \begin{array}{l} F_1 + 3F_2 \rightarrow F_1 \\ F_3 - 4F_2 \rightarrow F_3 \end{array}$$

6. Ya vamos llegando a la meta. Ahora necesitamos el último 1 de la diagonal y usamos una estrategia similar al anterior 1, con la diferencia que tenemos ahora un elemento negativo. Si multiplicamos la fila 3 por (-5) entonces obtendremos el anhelado 1. (¡Nunca antes se había buscado tanto un uno o un cero!). Veamos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{21}{10} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{10} & \frac{7}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) (-5)F_3$$

7. Ya tenemos todos los unos y también ya tenemos completa la tercera fila de la matriz identidad, por lo que ya sabemos que el valor de z es (-1). Si ahora obtenemos los ceros, encima del último 1 calculado entonces el proceso de Gauss-Jordan habrá terminado.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_1 + \frac{1}{10}F_3 \rightarrow F_1 \\ F_2 + \frac{7}{10}F_3 \rightarrow F_2 \end{array}$$

8. Finalmente escribimos los valores de la solución que se obtienen convirtiendo la matriz reducida obtenida en ecuación nuevamente es decir: $x=2$, $y=0$, $z=-1$. Tenga en cuenta que en este caso como se trata de un ejemplo, las operaciones de fila y columna se indicaron al frente de la matriz en que ya se hicieron. Pero, cuando usted vaya a realizar un ejercicio, se le recomienda escribir las operaciones con filas al frente de la matriz sobre la cual las va a aplicar, así resulta más práctico.

EXPLICACIÓN 6

COMO CONVERTIR UN PROBLEMA EN UN SISTEMA DE ECUACIONES.

El ejercicio de modelar un problema con un sistema de ecuaciones simultáneas es de particular importancia, ya que abre la posibilidad de que el problema se pueda resolver. Una inadecuada interpretación del problema conduce a una inadecuada solución, aunque una adecuada interpretación tampoco es garantía de una solución consistente. Esto porque la solución depende además, de un conjunto de procedimientos que se deben seguir para llegar a la respuesta, estos son: la construcción de unas ecuaciones que modelan el problema y que son el fruto de la interpretación del problema, la aplicación de un método de solución a las ecuaciones y la interpretación de la respuesta matemática del modelo como una respuesta viable para el problema.

Para elaborar el modelo es necesario saber con que valores contamos, es decir cuales conocemos y cuales desconocemos, es decir las incógnitas. Hay que identificar los valores constantes y los variables, además,



EXPLICACIÓN 6. Continuación

cómo un cambio en un valor provoca un cambio en otro y de que magnitud. La destreza en estos procedimientos sólo se logra con la práctica activa de estos. Intentemos la interpretación y modelación de los siguientes problemas:

Una empresa que produce por una concesión, uniformes para las dotaciones de empleados públicos que ganan menos de dos salarios mínimos. En esta temporada se están produciendo sólo camisas, las cuales son de tres estilos. Cada estilo requiere de los servicios de tres departamentos, como se ve en la siguiente tabla. Los departamentos de corte, costura y empaque disponen de un máximo de 1.160, 1.560 y 480 horas de trabajo por semana, respectivamente. ¿Cuántas camisas de cada estilo debe producir la planta cada semana para que funcione a plena capacidad?

	Estilo A	Estilo B	Estilo C
Corte	0,2 h	0,4 h	0,3 h
Costura	0,3 h	0,5 h	0,4 h
Empaque	0,1 h	0,2 h	0,1 h

En este problema, la tabla ya aporta una parte del modelo, sin embargo en otras situaciones los datos se encuentran menos sistematizados. Vamos a bautizar las variables para poderlas representar en el modelo:

x = Número de camisas del estilo A producidas por semana.

y = Número de camisas del estilo B producidas por semana.

z = Número de camisas del estilo C producidas por semana.

Ahora construiremos una ecuación para cada departamento teniendo en cuenta la disponibilidad de horas y la proporción de servicio que cada estilo requiere:

$$\begin{cases} 0,2x + 0,4y + 0,3z = 1.160 & \text{Corte} \\ 0,3x + 0,5y + 0,4z = 1.560 & \text{Costura} \\ 0,1x + 0,2y + 0,1z = 480 & \text{Empaque} \end{cases}$$

Usando uno de los métodos indicados en el capítulo o con ayuda del Derive llegamos a que $x=1.200$, $y=800$ y $z=2.000$. La parte final del ejercicio, consiste en concluir gracias al resultado del modelo que: cada semana la empresa puede producir 1.200 camisas del estilo A, 800 del estilo B y 2.000 camisas del estilo C para funcionar a plena capacidad.

Una última cosa: es necesario notar que no toda la información que se nos proporciona para un problema, es útil. Vea como el hecho del número de salarios de los trabajadores que van a recibir los uniformes sea dos, resulta totalmente irrelevante para la solución del problema.

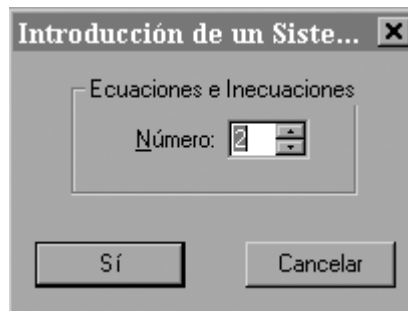
PRÁCTICA CON DERIVE

Ingresa al programa Derive

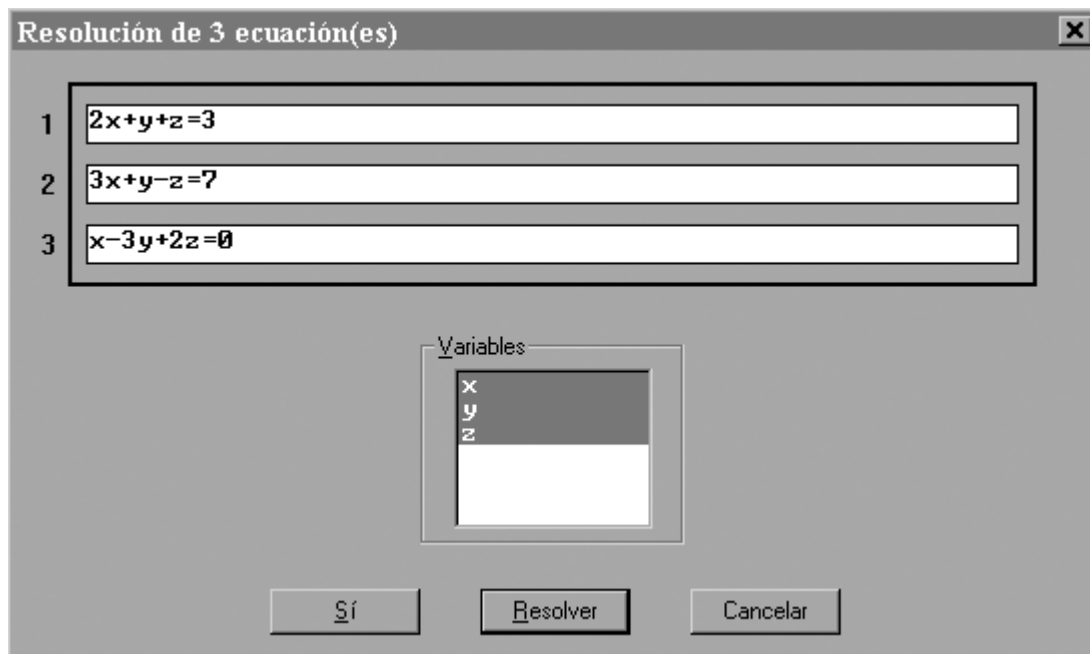
Digite la siguiente instrucción:

$\text{SOLVE}([2 \cdot x - 2 \cdot y + z = 3, 3 \cdot x + y - z = 7, x - 3 \cdot y + 2 \cdot z = 0], [x, y, z])$

Otra forma de ingresar al programa este sistema de ecuaciones se da usando la opción Sistema del menú Resolver, o pulsar las teclas Control+Shift+Y. Aparecerá la siguiente ventana que pregunta el número de ecuaciones del sistema:



Luego de que seleccione el número de ecuaciones (3) y haga clic en Sí, aparece una ventana con un campo para cada ecuación.



Si hacemos clic en resolver, Derive, habrá encontrado la solución del sistema.

PRÁCTICA DE ENTRENAMIENTO

1. Programación de la Producción. Una pequeña planta fabrica tres tipos de botes: modelos para una persona, dos personas y cuatro personas. Cada bote requiere los servicios de tres departamentos. Los departamentos de corte, montaje y empaque disponen de un máximo de 380, 330 y 120 horas de trabajo por semana, respectivamente. ¿Cuántos botes de cada tipo pueden producirse cada semana para que la planta funcione a plena capacidad?

	Bote personal	Bote de pareja	Bote para 4
Corte	0,5 h	1,0 h	1,5 h
Montaje	0,6 h	0,9 h	1,2 h
Empaque	0,2 h	0,3 h	0,5 h

2. Nutrición. Un nutricionista de un hospital regional desea preparar una dieta especial utilizando tres alimentos básicos. La dieta debe contener exactamente 340 unidades de calcio, 180 unidades de hierro y 220 unidades de vitamina A. El número de unidades por onza de cada ingrediente especial, de cada uno de los alimentos se indica en la tabla siguiente. ¿Cuántas onzas de cada alimento deben emplearse para cumplir los requisitos de la dieta?

Unidades por onza	Alimento A	Alimento B	Alimento C
Calcio	30	10	20
Hierro	10	10	20
Vitamina A	10	30	20

3. Sociología. Dos sociólogos consiguieron dinero para llevar a cabo estudios en una escuela de una ciudad. Desean conducir una encuesta mediante 600 llamadas telefónicas y 400 entrevistas en casas particulares. La empresa A que realizará la investigación cuenta con personal para efectuar treinta llamadas telefónicas y diez entrevistas en casas cada hora; la empresa B puede manejar veinte llamadas telefónicas y veinte entrevistas en casas cada hora. ¿Cuántas horas debe programar cada empresa para producir exactamente el número de entrevistas que se necesita?

4. En un establecimiento público, el personal con título profesional es de 10 personas y se divide en tres tipos: Profesional, Profesional especializado y Director. El salario del profesional es de \$ 1.500.000, el de el profesional especializado es de \$ 2.300.000 y el de director es de \$ 2.800.000. Si se sabe que dos veces el número de especializados mas el de directores supera en uno al número de profesionales, y además, el total de la nómina mensual para todos ellos es de \$ 18.000.000. Determine el número de cada tipo de funcionario con título profesional que hay en dicho establecimiento.

5. Una cafetería estudiantil tiene 24 mesas, x mesas con 4 asientos cada una, y mesas con 6 asientos cada una y z mesas con 10 asientos cada una. La capacidad total de asientos de la cafetería es de 148. Con motivo de una reunión estudiantil especial, se emplearán la mitad de las x mesas, un cuarto de las y mesas y una tercera parte de las z mesas, para un total de 9 mesas. Determinar x, y y z.

6. El salón de eventos de la casa de la cultura del municipio de Villanueva tiene 56 mesas, x mesas con 4 asientos cada una, y mesas con 8 asientos cada una, y z mesas con 10 asientos cada una. La capacidad de asientos de la cafetería es de 364. Durante una seminario - taller se ocuparon la mitas de las x mesas, un cuarto de las y mesas y un décimo de las z mesas, para un total de 19 mesas. ¿Cuántas de cada tipo se usaron en ese evento?

7. Se emitieron 23 bonos de deuda pública de tres tipos, por un total de 79,20 miles de dólares. Si el tipo A le cuesta al público 5, el tipo B cuesta 2,8 y el tipo C cuesta 1,6; todos en miles de dólares. La diferencia entre el número de bonos A y el número de bonos B es la mitad del número de bonos C. ¿Cuántos bonos de cada tipo fueron vendidos?

8. Una droguería comunitaria vende 100 unidades de vitamina A, 50 unidades de vitamina



PRÁCTICA DE ENTRENAMIENTO

C y 25 unidades de vitamina D por un total de U\$17,50; 200 unidades de vitamina A, 100 unidades de vitamina C y 100 unidades de vitamina D por U\$ 45,00; 500 unidades de vitamina A, 80 unidades de vitamina C y 50 unidades de vitamina D por U\$ 64,00. Encuentre el costo por unidad de cada una de las vitaminas A, C y D.

9. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, usando el método de su preferencia. Si tienen solución, confirme el resultado usando Derive.

A.
$$\begin{cases} x - 4y = 12 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 4x + 12y = 24 \end{cases}$$

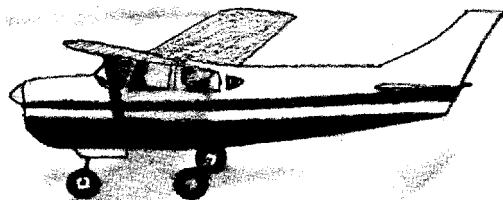
C.
$$\begin{cases} 8x - 3y = -34 \\ 2x + 5y = 26 \\ 14x - 11y = -94 \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - 3y + 4z = 1 \\ 3x + 2y + 5z = 8 \end{cases}$$

10. En una granja se crían gallinas y conejos. Si se cuentan las cabezas, son 50, si las patas, son 134. ¿Cuántos animales hay de cada clase?

11. Un obrero ha trabajado durante 30 días para dos patrones ganando US 207. El primero le pagaba U\$ 6,5 diarios y el segundo U\$ 8 diarios. ¿Cuántos días trabajó para cada patrón?

12. En un pueblo, hace muchos años, se utilizaba como unidad de medida de peso, la libra y la onza. Recientemente se encontró un documento del siglo pasado en el que aparecían los siguientes pasajes: «... pesando 3 libras y 4 onzas, es decir 1495 gramos...» y «... resultado 2 libras y ocho onzas, cuando el extranjero preguntó por el peso en gramos le contestaron: 1150 gramos». A partir de esta información, calcular el equivalente en gramos de la libra y la onza.



ALGUNAS RESPUESTAS

1. 20 botes de una persona, 220 botes de dos personas, 100 botes de cuatro personas.
2. 8 onzas de alimento A, 2 onzas de alimento B, 4 onzas de alimento C.
3. La compañía A: 10 horas, la compañía B: 15 horas.
4. Seis profesionales, tres profesionales especializados y un director.
5. $X=10$, $y=8$ y $z=6$.
6. $X=26$, $y=20$, $x=10$.
7. $A=10$, $B=7$, $C=6$.
10. 33 gallinas y 17 conejos.
11. Patrón A: 22 y Patrón B: 8
12. 1 Libra = 460 gramos. 1 onza = 28,75 gramos

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alan Beer Gerald. *Matemáticas Aplicadas para Economía y Negocios con una introducción a matrices*. Editorial Prentice Hall Internacional. Universidad del Valle (Cali), Madrid, 1984.
- Barnet Raymond A. *Matemáticas para Administración y Ciencias Sociales*. 2ª Edición. Nueva editorial Interamericana, México, 1983.
- Gerver Harvey. *Álgebra Lineal*. Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1992.
- Kleiman Ariel & de Kleiman Elena. *Matrices: Aplicaciones Matemáticas a la Economía y la Administración*. Editorial Limusa., México, 1973.