

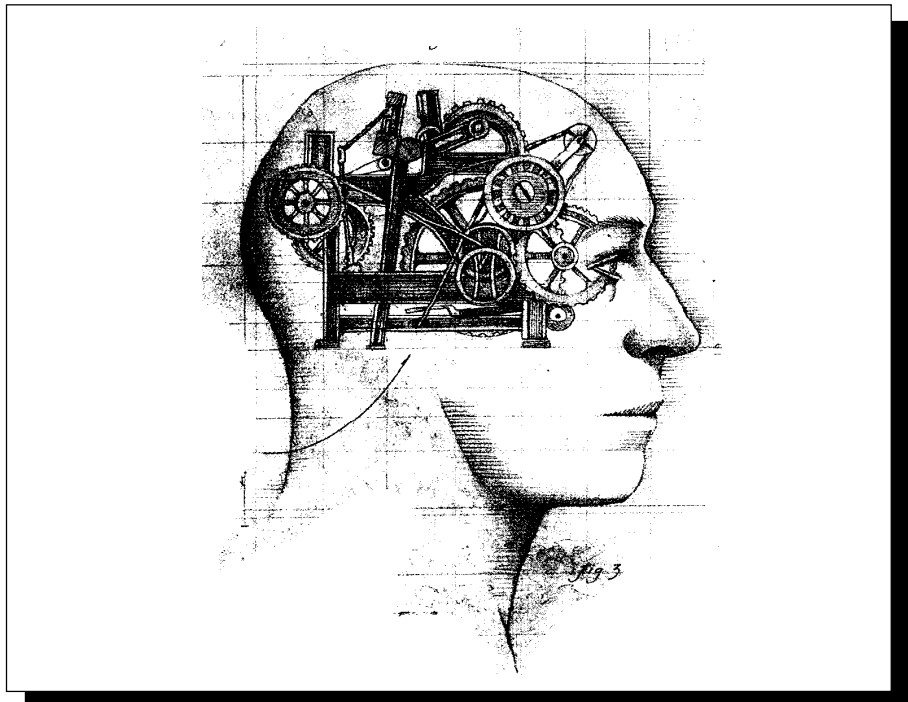
apítulo 2

Integral definida

2

INTEGRAL DEFINIDA

En el capítulo anterior estudiamos la integral indefinida, la cual permitía a través de un proceso inverso a la derivación, llegar a una función primitiva que se llamó anti-derivada. Este proceso permitió partir de funciones como el ingreso marginal, el costo marginal y la utilidad marginal respectivamente a las funciones de ingreso total, costo total y utilidad total. En este capítulo se estudiará el proceso de integración definida el cual nos lleva a determinar un área limitada por curvas, que nos servirá para estudiar otras aplicaciones como el excedente del consumidor y del productor.



PLAN DEL CAPÍTULO

- 1. CÁLCULO DEL ÁREA MEDIANTE RECTÁNGULOS Y TRAPECIOS**
- 2. INTEGRACIÓN DEFINIDA**
- 3. APLICACIONES DE LA INTEGRACIÓN DEFINIDA**
- 4. PRÁCTICAS CON INTEGRAL Y DERIVE**

OBJETIVO GENERAL

- El estudiante podrá desarrollar problemas sencillos de aplicación de la integral definida en el campo de la economía y la administración, apoyado en el uso de un software de matemática.

1. INTEGRACIÓN DEFINIDA

La necesidad de evaluar las áreas de figuras fue uno de los factores que motivó hacia el desarrollo del cálculo integral. En la geometría euclidiana o plana existen fórmulas que nos permiten determinar las áreas respectivas, tal es el caso de rectángulos, triángulos, cuadrados, etc. Sin embargo, no hay fórmulas para calcular el área de figuras limitadas por curvas. Podemos lograr una aproximación por métodos gráficos convirtiendo el área en múltiples rectángulos o trapecios, y haciendo la suma de las áreas de estos. Esto último nos lleva a la interpretación de la integral definida como el área entre curvas.

Básicamente la integral definida nos indica un área entre unas curvas, aunque esta área nos sirva como modelo para representar otros fenómenos. Partiremos del estudio de la obtención de la derivada por métodos gráficos. Los métodos gráficos incluyen aproximación por rectángulos, (Véase el ejemplo 1), los cuales se pueden aplicar como rectángulos de un ancho determinado y como altura el valor de la función en el punto medio, o como el promedio entre el área entre el rectángulo conformado por la altura máxima de la función en el subintervalo y el conformado por la altura con el valor mínimo; y la aproximación por trapecios. (véase el **ejemplo 2**).

La integración a partir de métodos gráficos nos proporciona una clara idea del área que estamos calculando, sin embargo resulta ser imprecisa y si queremos un alto grado de precisión el proceso se hace muy largo. Frente a esto existe el proceso de integración indefinida por medio de reglas algebraicas, a través del uso de unos teoremas conocidos como el teorema fundamental del cálculo y el teorema de Barrow. No nos detendremos en lo específico de estos teoremas sino que veremos en que consiste el proceso de hallar la integral definida en la **explicación 1 y el ejemplo 3**.

La idea de estudiar el proceso de integración en este módulo apunta a su aplicación en el estudio de algunos fenómenos administrativos como gastos de mantenimiento y recaudo de fondos, y económicos como el excedente del consumidor (véanse la **explicación 2** y los **ejemplos 4 al 6**), del productor (véanse la **explicación 3** y los **ejemplos 7 al 9**) y la relación ingreso - costo. En tales casos puede determinarse el punto, en el tiempo, donde el ingreso producido se iguale con el costo del factor. Véanse la **explicación 4** y los **ejemplos 10** (utilidad máxima), **11** (valor de salvamento) y **12** (ingreso total).

VOCABULARIO

Oferta. Número de artículos de un producto que es puesto en el mercado para la venta.

Demanda. Número de artículos de un producto, que los consumidores están dispuestos a comprar en un momento dado.

Ingreso Marginal. Ingreso adicional que se recibe por producir y poner en el mercado un artículo más. Matemáticamente se entiende como la variación del ingreso total en función de las variaciones unitarias de la cantidad de artículos vendidos.

Costo marginal. Costo adicional de producir un artículo adicional. Se entiende como la variación del costo total respecto a variaciones unitarias de la cantidad producida.

Ejemplo 1. Cálculo mediante rectángulos

Supongamos que se necesita saber el área que hay bajo la recta $y = \frac{1}{2}x + 3$, y entre los valores $x=5$ y $x=10$. Se entiende entonces que nos referimos al área encerrada entre la recta indicada y el eje horizontal x , que por los lados está limitada por rectas verticales que cortan los valores de x : 5 y 10. Véase la figura 1.

Cuente cuantas cuadrículas quedaron sombreadas: 31 completas, más otros fragmentos que podrían sumar entre dos y tres. Intuitivamente diremos que el área que intentamos medir tiene un valor entre 33 y 34.

Como no siempre es posible construir cuadrículas con altura entera, entonces podemos hacerlo calculando rectángulos de un ancho determinado y de altura correspondiente al valor medio de la función para obtener una aproximación. Así, tomemos esta vez un ancho de rectángulo de uno. El primer rectángulo irá de cinco a seis y tendrá como ancho el valor de y para el promedio entre 5 y 6 es decir para 5,5 será $y = \frac{1}{2}5,5 + 3 = 5,75$.

Así, el valor del área del primer rectángulo es $(5,75) \cdot 1 = 5,75$;

El área para $x = 6,5$: $y = \frac{1}{2}6,5 + 3 = 6,25$, será $(6,25) \cdot (1) = 6,25$

El área para $x = 7,5$: $y = \frac{1}{2}7,5 + 3 = 6,75$, será $(6,75) \cdot (1) = 6,75$

y así sucesivamente:

$$\text{Área} = 5,75 + 6,25 + 6,75 + 7,25 + 7,75 = 33,75$$

Revise el ejemplo y compare con la figura 2. Este tipo de aproximación con rectángulos resulta ser exacta para el trabajo con funciones lineales como la del ejemplo, sin embargo, en áreas delimitadas por curvas, presenta un considerable grado de error.

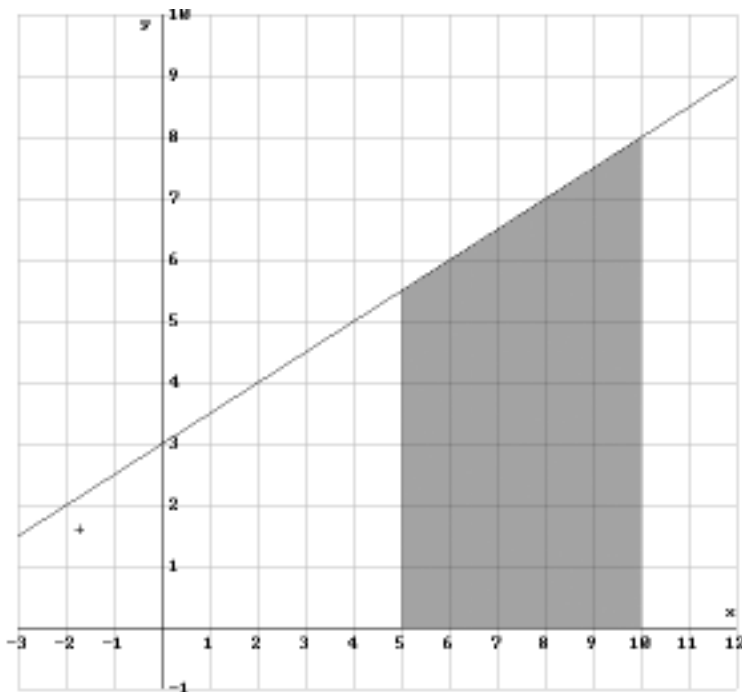


Figura 1. Área bajo la recta $y=0.5x+3$

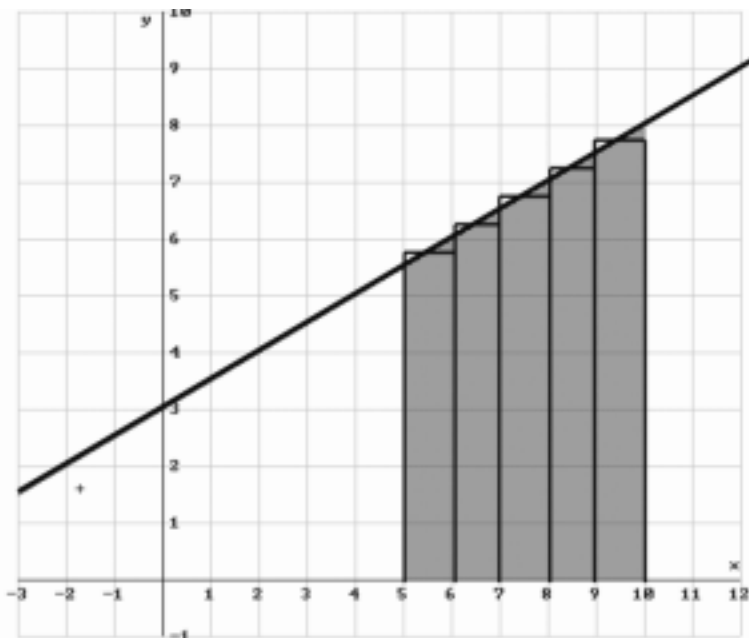


Figura 2. Aproximación usando rectángulos.

Ejemplo 2

Cálculo del área usando trapezios

Intentemos calcular ahora el área entre la curva $y = 5\sqrt{x}$, el eje x y los valores de x : 2 y 8.

Podemos formar rectángulos, como en el ejemplo 1, sin embargo para lograr una mejor aproximación, usaremos ahora los trapezios. Recordemos que la fórmula para hallar el área del trapecio es $A = \frac{(B + b)h}{2}$. Revise la gráfica de la figura 3 y verifique además que uno de los lados del trapecio corresponde con uno de los lados del trapecio siguiente. Si contamos las cuadrículas, podemos aproximar que el área esté entre 62 y 66 unidades cuadradas. En la parte izquierda del eje y se ha aclarado los valores que toma la función a los lados de cada trapecio.

Para calcular el área del primer trapecio, tenemos que la base menor $b = 5\sqrt{2} = 7,07$ es decir el valor de la función calculada en $X = 2$; la base mayor $B = 5\sqrt{3} = 8,66$ o el valor de la función calculado en $X = 3$. Esta base mayor corresponde con la base menor del siguiente trapecio, y como se vio cada base de trapecio se calcula encontrando el valor de la componente y para el valor x correspondiente al límite de cada intervalo tomado.

El primer trapecio tiene como área

$$A_1 = \frac{(B + b)h}{2} = \frac{(7,07 + 8,66) \cdot 1}{2} = 7,87$$



Ejemplo 2
Continuación

Para el siguiente trapecio la base menor es 8,66 y la mayor $B = 5\sqrt{4} + 3 = 10$.

El segundo trapecio tiene como área

$$A_2 = \frac{(B+b)h}{2} = \frac{(8,66+10) \cdot 1}{2} = 9,33$$

El tercer trapecio tiene como base mayor $B = 5\sqrt{5} + 3 = 11,18$, y

$$\text{área } A_3 = \frac{(10+11,18) \cdot 1}{2} = 10,59$$

El cuarto trapecio tiene como base mayor $B = 5\sqrt{6} + 3 = 12,25$, y área

$$A_4 = \frac{(11,18+12,25) \cdot 1}{2} = 11,71$$

El quinto trapecio tiene como base mayor $B = 5\sqrt{7} + 3 = 13,23$, y área

$$A_5 = \frac{(12,25+13,23) \cdot 1}{2} = 12,74$$

El sexto trapecio tiene como base mayor $B = 5\sqrt{8} + 3 = 14,14$, y área

$$A_6 = \frac{13,23+14,14}{2} \cdot 1 = 13,69$$

Por tanto el área total a medir es $A = 7,87 + 9,33 + 10,59 + 11,71 + 12,74 + 13,69 = 65,93$. Lo cual es una buena aproximación ya que el valor real es muy cercano a 66.

Conclusión: La integral definida de $y = 5\sqrt{x}$ entre 2 y 8 es 66, ó $\int_2^8 5\sqrt{x} dx = 66$.

Una mejor aproximación se logra si se toma un mayor número de trapecios ya que logramos delimitar mejor el área a medir. En este caso hemos tomado 6 pero podríamos tomar 32 por ejemplo y para no demorar en el procedimiento usamos un programa de computador y obtenemos un área de 65,99 que constituye una mejor aproximación. La actividad 1, le permitirá verificar también esta forma de aproximación con el apoyo del software.

EXPLICACIÓN 1 INTEGRAL DEFINIDA.

La integral definida de una función continua f en un intervalo desde $x=a$ hasta $x=b$ es el cambio neto de una antiderivada de f en ese intervalo. En forma simbólica, si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

donde $F'(x) = f(x)$, el integrando es $f(x)$, el límite superior es b y el límite inferior es a .

En otras palabras más coloquiales, la integral definida la obtenemos ejecutando el proceso de integración usando la regla que aplique al caso, luego reemplazamos en el resultado el límite superior, y por otro lado reemplazamos también el límite inferior. Por último restamos estos últimos valores y obtendremos la integral definida.

Tenga en cuenta que no puede haber integral definida si no hay unos límites de integración superior e inferior.

No se debe confundir una integral definida con una integral indefinida. La integral definida $\int_a^b f(x)dx$ es un número

real; la integral indefinida $\int f(x)dx$ es un conjunto de funciones, todas antiderivadas de $f(x)$ que entre ellas sólo se diferencian en el valor de la constante de integración.

La integral indefinida $\int f(x)dx$ es un conjunto de funciones, todas antiderivadas de $f(x)$ que entre ellas sólo se diferencian en el valor de la constante de integración.

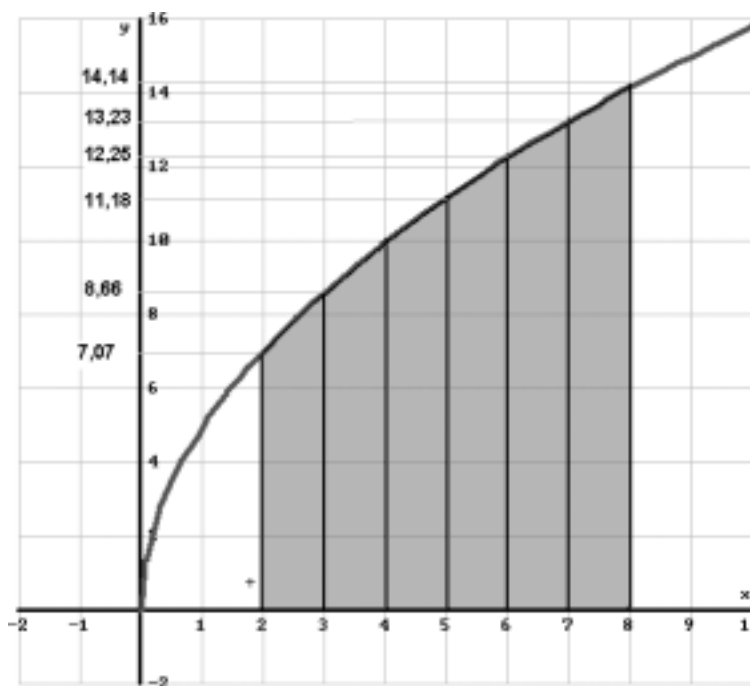


Figura 3. Área bajo la curva $y = 5\sqrt{x}$, la recta x y los valores 2 y 8.

Ejemplo 3. Integración Definida

Volvamos a los casos de los ejemplos uno y dos. En el primero se calculó gráficamente la integral definida correspondiente al área bajo la curva $y=0,5x+3$ entre los

valores de x : 5 y 10 es decir $\int_5^{10} (\frac{1}{2}x + 3)dx$.

Siguiendo el proceso indicado en la definición 1, tenemos que aplicando la regla de integración de la potencia llegamos a:

$$\int_5^{10} (\frac{1}{2}x + 3)dx = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + 3x + K \right]_5^{10} = \left[\frac{x^2}{4} + 3x + K \right]_5^{10},$$

Ahora reemplazamos los valores extremos:

$$\left(\frac{10^2}{4} + 3 \cdot 10 + K \right) - \left(\frac{5^2}{4} + 3 \cdot 5 + K \right) = 55 - 21,25 = 33,75$$

por otro camino hemos llegado a que $\int_5^{10} (\frac{1}{2}x + 3)dx = 33,75$.



Ejemplo 3. Continuación

En el ejemplo 2 se calculó gráficamente la integral definida que corresponde al área bajo la curva de

$y = 5\sqrt{x}$ entre 2 y 8 es 66, ó $\int_2^8 5\sqrt{x} dx$. Incorporando a este ejercicio nuestro nuevo método, tenemos que:

$\int_2^8 5\sqrt{x} dx = \int_2^8 5x^{\frac{1}{2}} dx$, re-expresando según la definición de raíz. Ahora aplicando la regla de la integral de una

potencia tenemos $\int_2^8 5x^{\frac{1}{2}} dx = \left[5 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_2^8 = \left[10 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_2^8$. Ahora reemplazamos los límites superior e inferior y

tenemos:

$$\left[10 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_2^8 = 10 \frac{8^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 10 \frac{2^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = 75,93 - 9,43 = 66$$

Es decir $\int_2^8 5\sqrt{x} dx = 66$. En este caso se nota que el segundo proceso resulta más sencillo.

EXPLICACIÓN 2 EXCEDENTE DEL CONSUMIDOR¹

Una función de demanda representa las cantidades de un artículo que podrían comprarse a varios precios. Si el precio en el mercado es p_0 y la correspondiente demanda en el mercado es q_0 , entonces aquellos consumidores que estuviesen dispuestos a pagar un precio mayor que el de este mercado, ganan, por el hecho de que el precio es solamente p_0 . Véase la figura 4.

¹ Adaptado de DRAPER Jean E. "Matemáticas para la Administración y Economía", obra citada. Págs. 426-428.



Explicación 2. Continuación

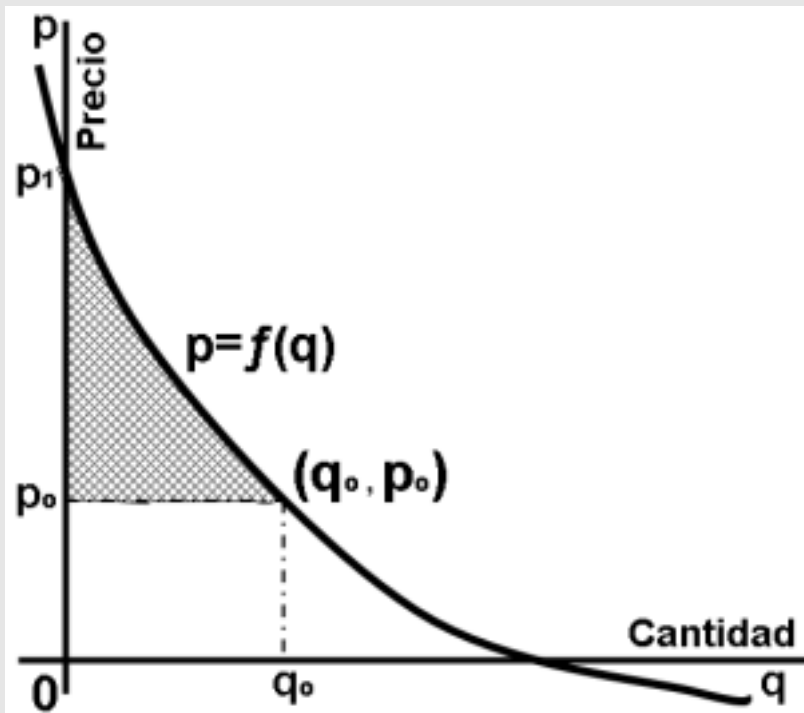


Figura 4. Excedente del consumidor.

El excedente del consumidor mide la riqueza económica desde el lado del comprador.

Bajo ciertas hipótesis económicas la ganancia del consumidor se representa por el área situada debajo de la curva de demanda y por encima de la recta $p = p_o$. Marshall denomina a esta área Excedente del consumidor y se evalúa como:

Excedente del consumidor = $\int_0^{q_o} f(q) dq - q_o p_o$, donde la función de de-

manda es $p = f(q)$, o también como: $\int_{p_o}^{p_1} g(p) dp$, donde la función de demanda es $q = g(p)$ y p_1 es el valor de p cuando $q = 0$, es decir, p_1 es la ordenada del intercepto con el eje y , de la función de demanda:

Excedente del consumidor = $\int_0^{q_o} f(q) dq - q_o p_o = \int_{p_o}^{p_1} g(p) dp$. Véanse

los ejemplos 4 al 6.

Ejemplo 4. Excedente del consumidor

Si la función de demanda es $p = 85 - 4q - q^2$, hallar el excedente del consumidor (a) si $q_0 = 5$, (b) si $p_0 = 64$. Véase la figura 5.

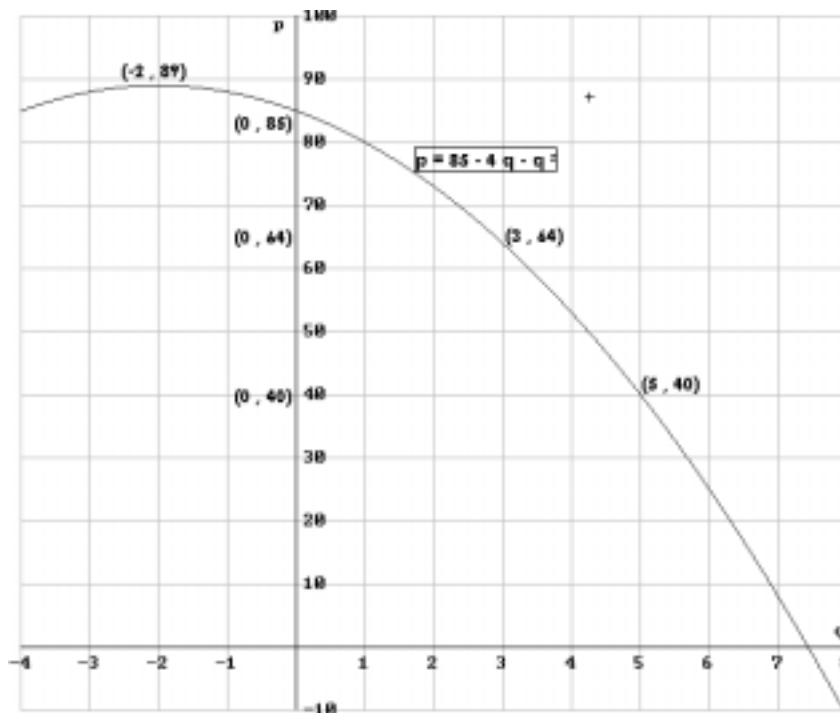


Figura 5. Gráfica de la demanda para el ejemplo 4

$$(a) \text{ Excedente del consumidor} = \int_0^5 (85 - 4q - q^2) dq - (5)(40) =$$

$$\left[85q - 2q^2 - \frac{q^3}{3} \right]_0^5 - 200 = 333,33 - 200 = 133,33$$

$$(b) \text{ Excedente del consumidor} = \int_0^3 (85 - 4q - q^2) dq - (3)(64) =$$

$$\left[85q - 2q^2 - \frac{q^3}{3} \right]_0^3 - 192 = 228 - 192 = 36$$

Ejemplo 5. Excedente del Consumidor

Si la función de demanda es $p = \sqrt{9 - q}$, y $q_0 = 5$, hallar el excedente del consumidor por dos métodos. Véase la Figura 6.

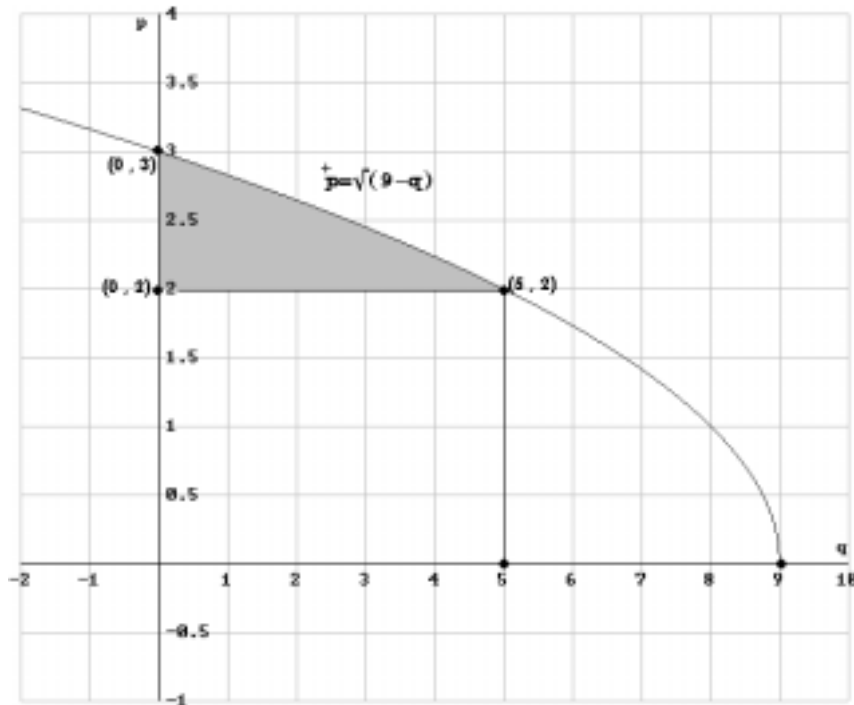


Figura 6. Gráfica de la demanda para el ejemplo 5.

$$\text{Excedente del consumidor} = \int_0^5 (9 - q)^{\frac{1}{2}} dq - (5)(2) =$$

$$\left[-\frac{2}{3} (9 - q)^{\frac{3}{2}} \right]_0^5 - 10 = -\frac{16}{3} + 18 - 10 = \frac{8}{3} =$$

$$\text{O también, Excedente del consumidor} = \int_2^3 (9 - p^2) dp = \left[9p - \frac{p^3}{3} \right]_2^3 =$$

$$27 - 9 - 18 + \frac{8}{3} = \frac{8}{3}, \text{ igual que por el otro procedimiento.}$$

Ejemplo 6. Demanda en situación de monopolio

La cantidad vendida y el correspondiente precio, en situación de monopolio, se determinan por medio de la función de demanda $p = 16 - q^2$ y por el costo marginal $MC = \frac{dp}{dq} = 6 + q$ de tal manera que se maximice la ganancia. Determinar el correspondiente excedente del consumidor. Véase la figura 7.

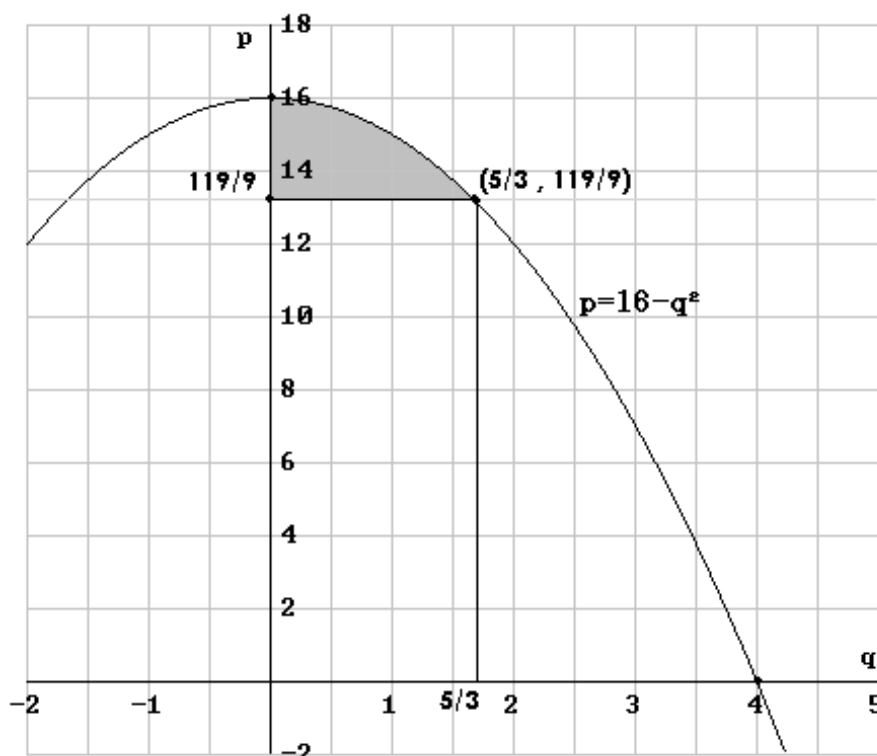


Figura 7. Gráfica del excedente del consumidor para el ejemplo 6.

$$\text{Ingreso} = 16q - q^3$$

$$\text{Ingreso Marginal} = 16 - 3q^2$$

La ganancia se maximiza cuando el ingreso marginal se hace igual al costo marginal, es decir $16 - 3q^2 = 6 + q$, transponemos los términos hacia la izquierda: $3q^2 + q - 10 = 0$

$(3q - 5)(q + 2) = 0$, los valores para q son -2 y $5/3$, sin embargo el que tiene sentido para nuestro fin es $5/3$.
 $P(5/3) = 16 - (5/3)^2 = 119/9$, entonces $q_0 = 5/3$, $p_0 = 119/9$.

$$\text{Excedente para el consumidor} = \int_0^{5/3} (16 - q^2) dq - \left(\frac{5}{3} \right) \left(\frac{119}{9} \right) = \left[16q - \frac{q^3}{3} \right]_0^{5/3} - \frac{595}{27} =$$

$$\frac{80}{3} - \frac{125}{81} - \frac{595}{27} = \frac{250}{81} \approx 3,09$$

EXPLICACIÓN 3 EXCEDENTE DEL PRODUCTOR²

Cuando se establece un precio de mercado, todos los productores ofrecen ese producto al precio del mercado; pero hay n productores que estarían dispuestos a ofrecer el producto a un precio menor. El excedente del productor es la diferencia entre el precio que percibe el productor y el precio al que estaría dispuesto a ofrecer cada una de las unidades de producto.

El excedente del productor mide la riqueza económica desde el lado del productor.

Una función de oferta representa las respectivas cantidades de un artículo que podrían venderse a varios precios. Si el precio en el mercado es p_o y la correspondiente oferta en dicho mercado es q_o , entonces aquellos productores que estuviesen dispuestos a vender el artículo a un precio inferior al de este mercado, ganan, por el hecho de que el precio es p_o .

Bajo ciertas hipótesis económicas la ganancia total del productor se representa por el área situada encima de la curva de oferta y debajo de la recta $p = p_o$, llamándose esta área el excedente del productor (véase la figura 8) cuya evaluación se hace como

Excedente del productor

$= q_o p_o - \int_0^{q_o} f(q) dq$, donde la función de oferta es $p = f(q)$, o también como

Excedente del productor $= \int_{p_0}^{p_1} g(p) dp$, donde la función de oferta es $q = g(p)$ y p_1 es el valor de y cuando $x = 0$ (es decir, p_1 es el intercepto con p de la función de oferta)

$$\text{Excedente del productor} = q_o p_o - \int_0^{q_o} f(q) dq =$$

$$\int_{p_0}^{p_1} g(p) dp.$$

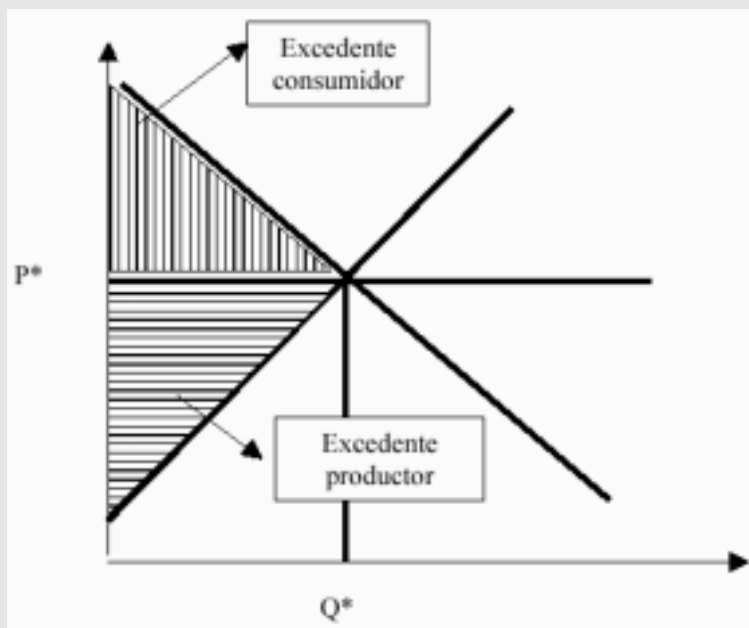


Figura 8. Excedentes del productor y del consumidor.

La suma de los excedentes constituye la contribución que el mercado hace al bienestar general. En competencia perfecta, dicha contribución es máxima. De esta forma, el punto A es un punto de eficiencia pero no un criterio de equidad. El área del triángulo inferior a las áreas rayadas representa los recursos productivos empleados en la producción de equilibrio. De esta forma, los recursos productivos están medidos en costos, ya que representan la integral del costo marginal. Por otra parte, si se multiplica base por altura de esa área, se obtiene el costo de los consumidores, o sea, el precio pagado por la cantidad consumida.

Ejemplo 7. Excedente del productor

Si la ecuación de oferta es $p = (q + 2)^2$ y el precio se fija en $p_1 = 25$ hallar el excedente del productor por dos métodos. Véase la figura 9.

$$\text{Excedente del productor} = (3)(25) - \int_0^3 (q + 2)^2 dq = \int_4^{25} (p^{1/2} - 2) dp$$

$$75 - \int_0^3 (q + 2)^2 dq = 75 - \left[\frac{(q + 2)^3}{3} \right]_0^3 = 75 - \frac{125}{3} + \frac{8}{3} = 36$$

Como alternativa,

$$\int_4^{25} (p^{1/2} - 2) dp = \left[\frac{2p^{3/2}}{3} - 2p \right]_4^{25} = \frac{250}{3} - 50 - \frac{16}{3} + 8 = 36$$

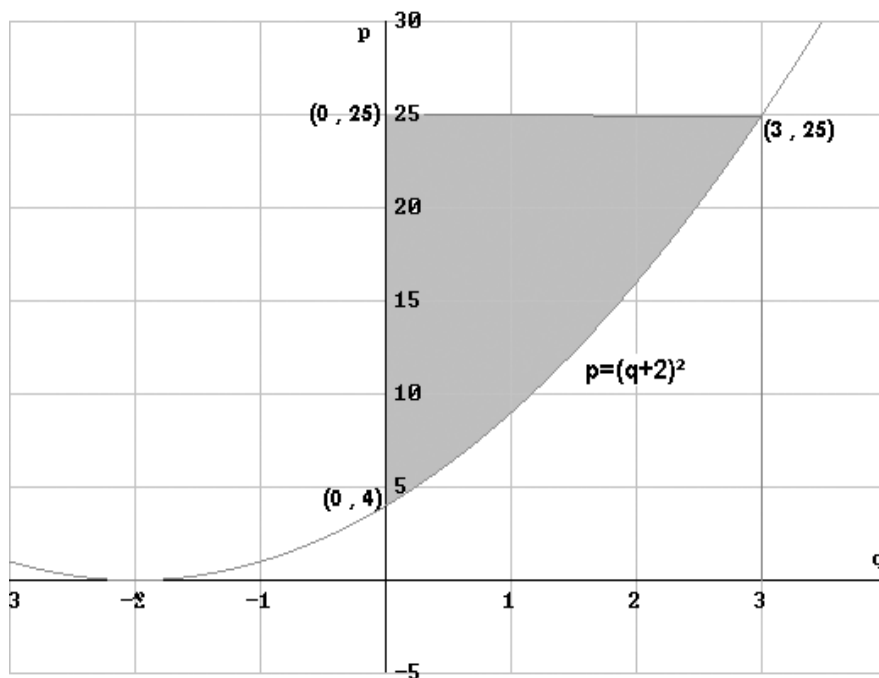


Figura 9. Excedente del productor para el ejemplo 7.

Ejemplo 8. Excedente del productor en el punto de equilibrio.

La cantidad demandada y el precio correspondiente, en situación de competencia pura se determinan por medio de las funciones de demanda y de oferta, $p = 16 - q^2$ y $P = 4 + q$, respectivamente. Determinar el correspondiente excedente del productor (véase la figura 10).

$$p = 16 - q^2 = 4 + q$$

$$q^2 + q - 12 = 0$$

$$(q + 4)(q - 3) = 0$$

$q = -4$ y $q = 3$, sólo nos interesa el valor que aplica es decir $q = 3$.

$q_1 = 3$ reemplazando en una de las ecuaciones de oferta o de demanda: $p_1 = 7$.

$$\text{Excedente del productor} = (3)(7) - \int_0^3 (4 + q) dq = 21 - \left[4q + \frac{q^2}{2} \right]_0^3 = 21 - 12 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$$

El área representada por $\int_0^3 (4 + q) dq$ habría podido evaluarse también como por la fórmula del

área del trapecio, $A = \frac{(b + B)h}{2} = \frac{(4 + 7)3}{2} = \frac{33}{2}$. ¿Cuál es el excedente del consumidor?

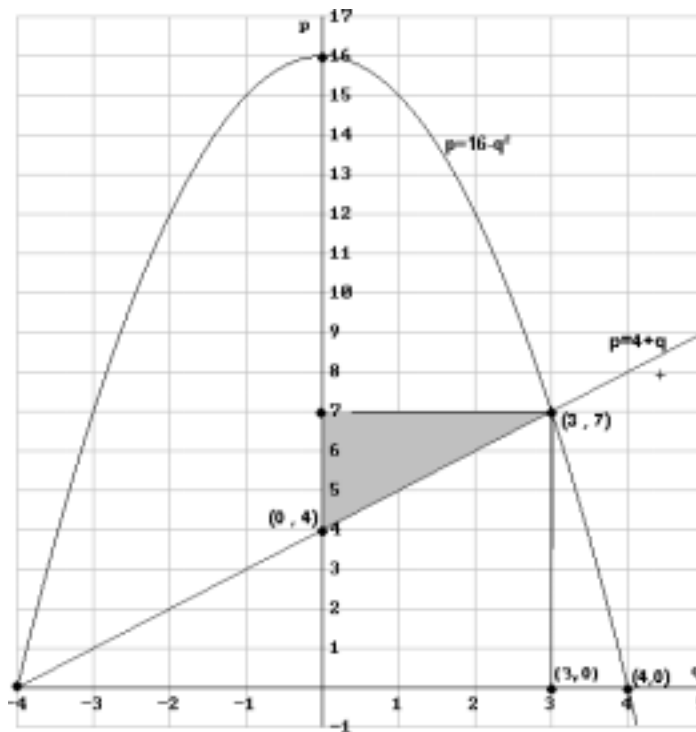


Figura 10. Excedente del productor para el ejemplo 8

Ejemplo 9. Ambos excedentes

La cantidad demandada y el correspondiente precio, en situación de competencia pura, se determinan con las funciones de demanda y oferta, $p = 36 - q^2$ y $p = 6 + \frac{q^2}{4}$, respectivamente. Determinar el correspondiente excedente del consumidor y el excedente del productor. (Véase la figura 11).

$p = 36 - q^2 = 6 + \frac{q^2}{4}$, dado que el equilibrio se registra cuando demanda y oferta son iguales, entonces igualamos las dos fórmulas y luego despejamos el valor de q .

$$q^2 = 24$$

$$q = 2\sqrt{6}$$

$$\text{Excedente del consumidor} = \int_0^{2\sqrt{6}} (36 - q^2) dq - (2\sqrt{6})(12) =$$

$$\left[36q - \frac{q^3}{3} \right]_0^{2\sqrt{6}} - 24\sqrt{6} = 72\sqrt{6} - 16\sqrt{6} - 24\sqrt{6} = 32\sqrt{6} \approx 78,4$$

$$\text{Excedente del productor} = (2\sqrt{6})(12) - \int_0^{2\sqrt{6}} \left(6 + \frac{q^2}{4} \right) dq = 24\sqrt{6} - 12\sqrt{6} - 4\sqrt{6} = 8\sqrt{6} \approx 19,6$$

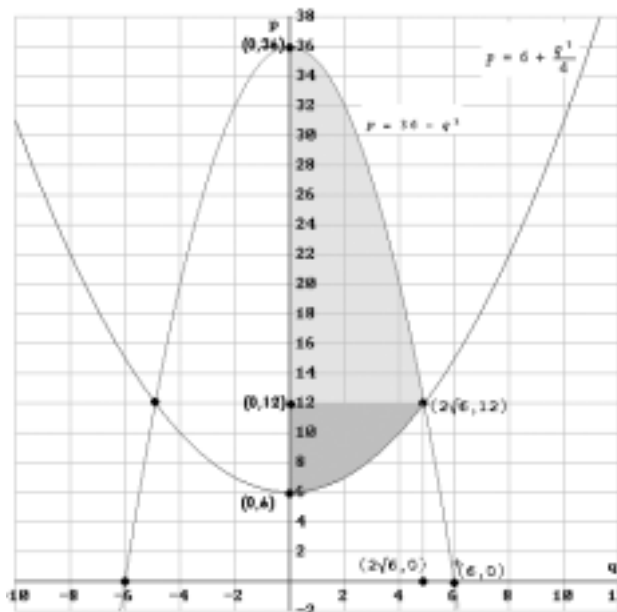


Figura 11. Excedentes del consumidor y del productor para el ejemplo 9.

EXPLICACIÓN 4 INGRESO VS. COSTO

La integración puede utilizarse en economía para determinar la utilidad total o las ganancias netas totales en varios contextos. En general la utilidad se maximiza (suponiendo que es un modelo de competencia perfecta) cuando el ingreso marginal se iguala con el costo marginal y la ganancia total es la integral de la diferencia entre el ingreso marginal y el costo marginal desde una cantidad cero hasta la cantidad para la cual la utilidad se maximiza.

Recuerde del módulo de Matemática 1, que el ingreso marginal es el recibido por la venta de un artículo más y se obtiene matemáticamente como la derivada del ingreso total, mientras que el costo marginal es la variación en el costo por producir un artículo adicional y se obtiene matemáticamente como la derivada del costo total.

De acuerdo con lo anterior, podemos también encontrar la función de costo total cuando conocemos la variación en el costo que se presenta al producir un artículo adicional, integrando la función costo marginal llegamos a la función de costo total, donde la constante de integración es el costo de producir cero artículo es decir el costo fijo.

Para el ingreso total tenemos un proceso similar. El ingreso total se obtiene como la integral del ingreso marginal, teniendo como constante de integración el valor cero, ya que se sabe que si no hay producción y venta, entonces no hay ingreso; a no ser que la actividad se encontrara subsidiada por el Estado, caso en el cual la constante de integración correspondería a dicho monto.

Ejemplo 10. Utilidad máxima

Hallar la cantidad producida que maximice la utilidad y determinar la utilidad total en dicho punto si las funciones de ingreso marginal y de costo marginal están dadas por:

$$MR = 25 - 5q - 2q^2$$

$$MC = 10 - 3q - q^2$$

Haciendo $MR=MC=0$

$$25 - 5q - 2q^2 - 10 + 3q + q^2 = 0$$

$$15 - 2q - q^2 = 0$$

$$(5 + q)(3 - q) = 0$$

$q = -5$ y $q = 3$. No nos interesa el valor -5 por que no hay producciones negativas, por lo que el valor que nos sirve es $q = 3$.

La primera derivada de $MR-MC$ es la segunda derivada de la utilidad total y, por lo tanto, su signo indica si la utilidad se maximiza o se minimiza para un valor particular de q .

$\frac{d}{dq}(MR - MC) = \frac{d^2U}{dq^2} = -2 - 2q = -8$, así la utilidad se maximiza para $q = 3$.

$$\begin{aligned} \text{Utilidad total} &= \int_0^3 (15 - 2q - q^2) dq \\ &= 15q - q^2 - \frac{q^3}{3} \Big|_0^3 = 45 - 9 - 9 = 27. \end{aligned}$$

Ejemplo 11. Valor de salvamento

Una compañía manufacturera de la cual el Estado es socio, ha comprado una máquina cuya producción representa ganancias adicionales (ingreso adicional menos costo adicional de mano de obra y materiales) en un tiempo t , de

$E(t) = 225 - \frac{1}{4}t^2$, donde $E(t)$ está en unidades de 10.000 dólares y t está en años. El costo adicional de reparación y mantenimiento en el tiempo t es $R(t) = 2t^2$

donde $R(t)$ está en unidades de 10.000 dólares y t está en años. Primero supóngase que se puede eliminar la máquina en cualquier tiempo sin costo alguno o valor de salvamento. Entonces debe retirarse la máquina en el momento en que las ganancias adicionales se igualan con el costo adicional de reparación y mantenimiento. Véase la figura 12.

Las ganancias adicionales se igualan con el costo de reparación y mantenimiento cuando

$$225 - \frac{1}{4}t^2 = 2t^2$$

$$225 = \frac{9}{4}t^2$$

$$t^2 = 100$$

$$t = 10.$$

Por lo tanto, debe retirarse la máquina después de 10 años. Las ganancias netas totales (ganancias menos costo de reparación y mantenimiento) después de 10 años son

$$\int_0^{10} [E(t) - R(t)] dt = \int_0^{10} (225 - \frac{9}{4}t^2) dt = \left[225t - \frac{3}{4}t^3 \right]_0^{10} = 2.250 - 750 = 1.500 \text{ ó U\$1.500.000.}$$

Ahora, agreguemos que la máquina tiene un valor de salvamento en un tiempo t de $S(t) = \frac{6480}{6+t}$, donde $S(t)$ está en unidades de 10.000 dólares y t está en años. Entonces la compañía maximizará sus ganancias netas si suprime la máquina dentro de un tiempo t cuando las ganancias netas después de T igualen el valor del salvamento en T (Véase la figura 13).

Las ganancias netas después de T igualan al valor de salvamento en T cuando $\frac{6.480}{6+T} = \int_T^{10} (225 - \frac{9}{4}t^2) dt$

$$\frac{6.480}{6+T} = 1500 - 225T + \frac{3}{4}T^3, \text{ de donde } N(t) = 1500 - 225T + \frac{3}{4}T^3. \text{ Pero, sigamos:}$$

$$6.480 = 9.000 - 1.350T + \frac{9}{2}T^3 + 1.500T - 225T^2 + \frac{3}{4}T^4$$

$$0 = 2.520 + 150T - 225T^2 + \frac{9}{2}T^3 + \frac{3}{4}T^4 = (T-4)(\frac{3}{4}T^3 + \frac{15}{2}T^2 - 195T - 630), \text{ si este producto es}$$

igual a cero entonces $T - 4 = 0$, o el otro factor es cero. Con la primera hipótesis llegamos a una respuesta coherente. Por lo tanto, debe retirarse la máquina después de cuatro años.

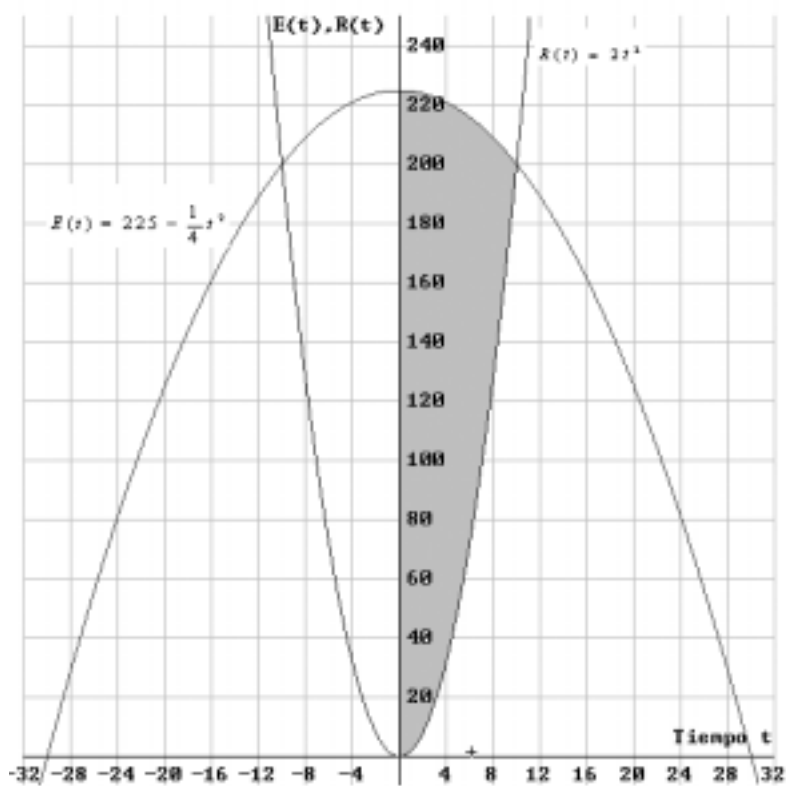


Figura 12. Cuando las ganancias adicionales se igualan con el costo de mantenimiento

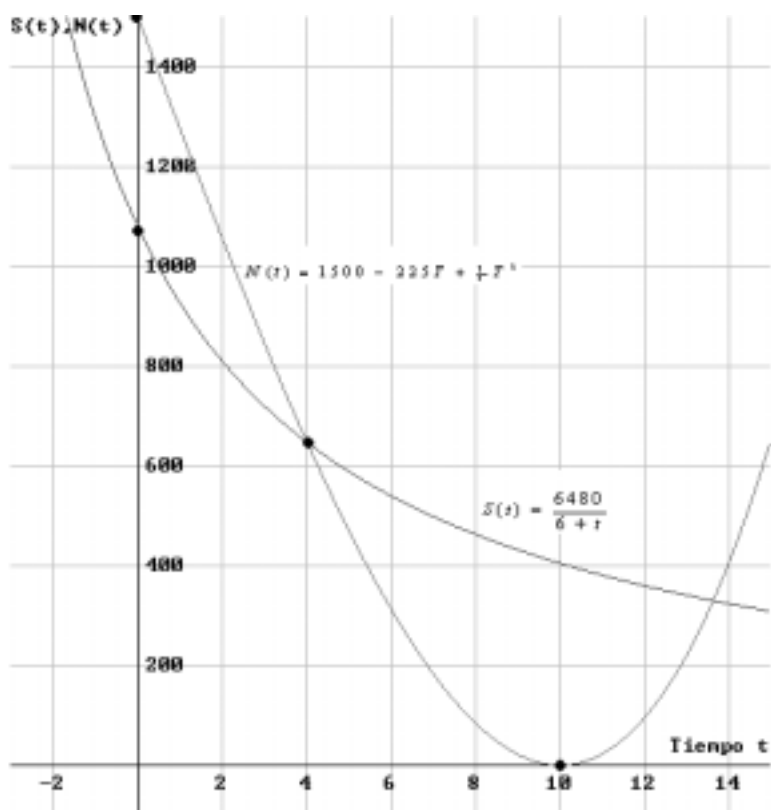


Figura 13. Gráfica para el ejemplo 11.

Ejemplo 12. Ingreso Total

Una Entidad Promotora de Salud EPS está considerando la adición a su nómina de vendedores de planes complementarios. El costo del empleo de vendedores adicionales es: $5y^2 = 48x$ donde y representa el costo en unidades de 10.000 dólares y x es el número de vendedores adicionales empleados, y el ingreso adicional es $(R - 2)^2 = 4(x + 10)$, donde R es el ingreso en unidades de 10.000 dólares y x es el número de vendedores adicionales empleados. (Supóngase que las funciones de costo y de ingreso son continuas, aunque realmente ellas tienen significado solamente para valores enteros de x). La entidad empleará vendedores adicionales hasta cuando el costo de esta adición iguale al ingreso adicional obtenido (véase la figura 14).

El costo de empleo de vendedores adicionales se iguala con el ingreso adicional obtenido si $R=y$:

$$(R - 2)^2 = 4(x + 10) \quad R^2 - 4R + 4 = 4x + 40 \quad R^2 - 4R - 36 = 4x$$

Por lo tanto, $R=y$ cuando

$$y^2 - 4y - 36 = \frac{5y^2}{12} \quad 7y^2 - 48y - 432 = 0 \quad (7y + 26)(y - 12) = 0$$

$$y = 12, y = 15$$

y deben emplearse 15 vendedores adicionales. El ingreso neto total resultante (ingreso total menos costo) es

$$\int_0^{12} \left[\frac{5}{48} y^2 - \frac{1}{4} y^2 + y + 9 \right] dy = \int_0^{12} \left[y + 9 - \frac{7}{48} y^2 \right] dy = \left[\frac{y^2}{2} + 9y - \frac{7}{144} y^3 \right]_0^{12}$$

$$= 72 + 108 - 84 = 96 \text{ unidades o } 96.000.$$

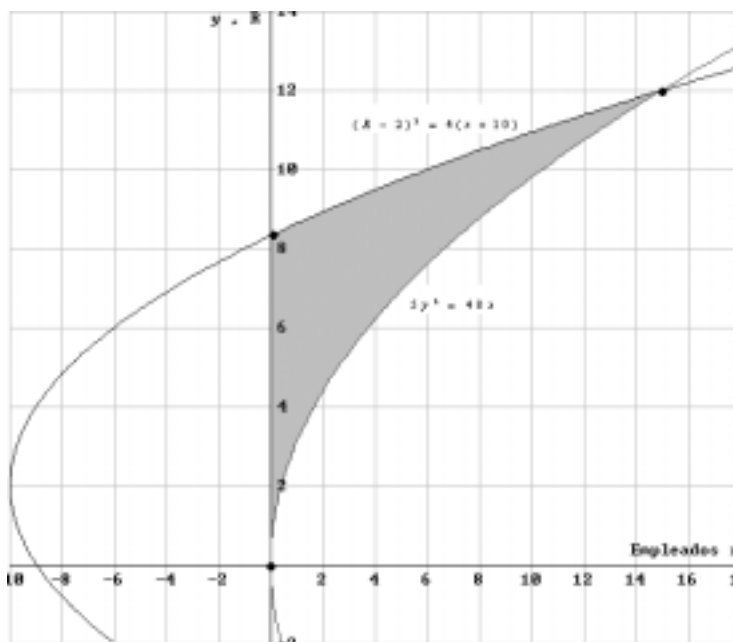


Figura 14. Relación Ingreso Vs. Costo.

ACTIVIDAD 1 INTEGRACIÓN POR TRAPECIOS

En el CD-ROM de Fundamentación está el software "Integral" instálelo en el computador en una carpeta independiente y ejecute el programa "RUNME.BAT" de esa carpeta. Elija la opción 2 de monitor a color. A la pregunta de ver instrucciones "would you like some instruccions?" responda "Yes" la primera vez que abra el programa. Para salir de la ayuda pulse ESC.

En el menú "Create Integrals" haga clic en la opción "Create Integral" como se indica la figura 15. Use las teclas de flechas para desplazarse por los menús ya que el Mouse puede presentarle problemas.

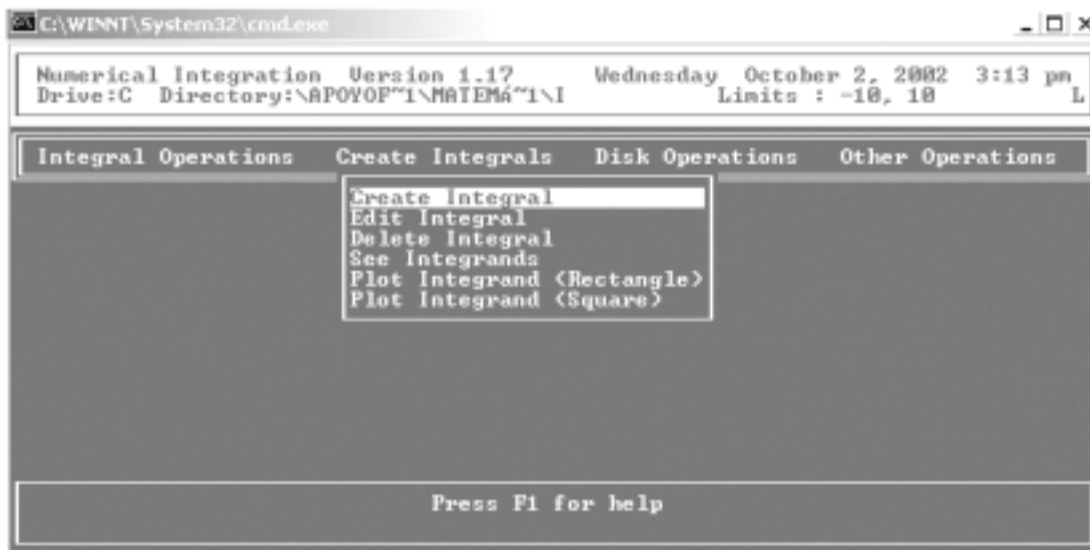


Figura 15. Software "Integral".

En la ventana escriba la siguiente ecuación: $5 * \text{SQRT}(X)$ y pulse ENTER.

El programa solicitará el límite inferior de la integral "Lower x limit:", escriba 2 y pulse ENTER. Luego solicitará el límite superior de la integral "Upper x limit:", escriba 8 y pulse ENTER.

En el menú "Integral Operations" escoja la opción "Trapezoidal Rule" y pulse ENTER unas seis veces, entonces aparecerá una tabla que va mostrando a la izquierda el número de trapecios y a la derecha el valor de la integral obtenida con ese número de trapecios. Véase la figura 16. Revise el ejemplo 2 y compare. ¿Qué conclusión tiene usted respecto del número de trapecios? ¿A que valor se aproxima el valor del área cuando aumenta el número de trapecios?

Intervals : Integral by trapezoidal rule	
1	63.6396103067893
2	65.3608248158915
4	65.832950784321
8	65.9553380416985
16	65.9862836553266
32	65.9940439585395
64	65.9959855695852
128	65.996471068999
256	65.9965924499044
512	65.9966227955092
1024	65.9966303819341
2048	65.9966322785417

Figura 16. Aproximación a la integral definida usando trapecios.

ACTIVIDAD 2 INTEGRACIÓN DEFINIDA USANDO DERIVE

En el computador, ingrese al programa Derive.

Digite la ecuación $x^2 + 3$ en la ventana de ecuaciones como: $x^2 + 3$ y pulse Enter.

El objeto de esta actividad es representar y obtener con Derive $\int_1^5 (x^2 + 3)dx$ que representa el área limitada por $y = x^2 + 3$, $y = 0$, $x = 1$, y $x = 5$, como se ilustra en la figura 18 generada por derive.

Genere la gráfica correspondiente, siguiendo el mismo procedimiento de la actividad con Derive del capítulo anterior. Seleccione del menú "Seleccionar" la opción "Rango de la gráfica" o simplemente pulse Control + R. Como rango de la gráfica los siguientes: Horizontal desde -1 hasta 6 con 7 divisiones, vertical desde -2 hasta 30 con 16 divisiones.

Ahora posicionado en la ventana de ecuaciones de Derive seleccione del menú "Cálculo" la opción "Integrales" o pulse Control + Shift + I. Seleccione la opción integral definida y digite los límites del intervalo de integración como se muestra en la figura 17 y haga clic en el botón "Simplificar", debe obtener el valor $160/3$ y al hacer clic en el ícono  obtendrá el valor 53,33.



Figura 17. Parámetros de integración indefinida.

Seleccione la opción del menú Opciones/Aproximar antes de dibujar. Ahora, desde la ventana de ecuaciones introduzca la orden Plotint ($x^2 + 3$, x , 1, 5) y pulse Enter, luego grafique esa expresión, y deberá obtener un resultado similar al de la figura 18.

Las gráficas de las figuras de este capítulo fueron generadas con Derive, repase el capítulo generando las gráficas usted mismo.



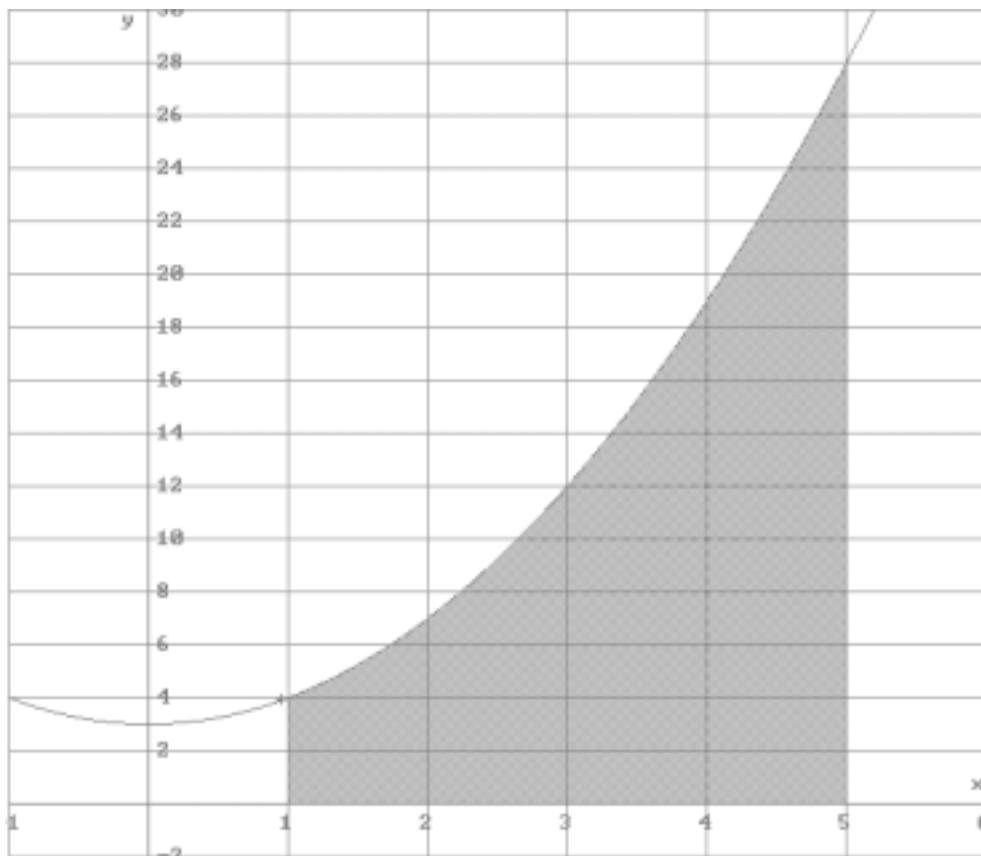


Figura 18. Gráfica de un área generada por Derive.

PRÁCTICA DE ENTRENAMIENTO

Calcular cada una de las siguientes integrales definidas y verificar la respuesta.

1. $\int_2^3 2x dx$, Rta. 5

5. $\int_1^2 (2x^{-2} - 3) dx$, Rta. -2

2. $\int_3^4 5 dx$, Rta. 5

6. $\int_1^4 3\sqrt{x} dx$, Rta. 14

3. $\int_0^4 (3x^2 - 4) dx$, Rta. 48

7. $\int_2^3 12(x^2 - 4)^5 x dx$, Rta. 15.625

4. $\int_0^1 24x^{11} dx$, Rta. 2

8. $\int_2^3 x\sqrt{2x^2 - 3} dx$, Rta. 7.82

PRÁCTICA DE APLICACIÓN

1. Determinación de excedentes.

La función de demanda para un producto es $p = f(q) = 100 - 0,05q$, donde p es el precio por unidad (en dólares) de q unidades. La función de oferta es $p = g(q) = 10 + 0,1q$. Determinar los excedentes de consumidores y productores bajo el equilibrio del mercado. Usar Derive para generar el gráfico respectivo.

2. Determinación de Excedentes. La ecuación de demanda para un producto es

y la ecuación de oferta es

$q = g(p) = P - 1$. Determinar el excedente de los consumidores y el de los productores cuando se ha establecido el equilibrio del mercado.

3. Excedentes bajo equilibrio. En los siguientes casos la primera ecuación es la de demanda y la segunda es la ecuación de oferta de un producto. En cada caso, determine el excedente de consumidores y el excedente de productores bajo equilibrio del mercado.

a. $p = 20 - 0,8q$,

b. , $p = \frac{q}{10} + 4,5$.

c. $q = 100(10 - p)$,

4. Excedente de consumidores. La ecuación de demanda de un producto es $q = 10\sqrt{100 - p}$. Calcule el excedente de consumidores bajo el equilibrio del mercado, que ocurre a un precio de \$84.

5. Excedente de consumidores. La ecuación de demanda para un producto es $p = 2^{11-q}$, y la ecuación de oferta es $p = 2^{q+1}$, donde p es el precio por unidad (en cientos de dólares) cuando q unidades se demandan o se ofrecen. Determine a las 1.000 unidades más cercanas el excedente de consumidores bajo equilibrio del mercado.

6. Excedentes bajo equilibrio. La ecuación de demanda para un producto es

$$p = 60 - \frac{50q}{\sqrt{q^2 + 3.600}}$$
 y la ecuación de

oferta es $p = 10 \ln(q + 20) - 26$. Determine el excedente de consumidores y el de productores bajo equilibrio del mercado. Redondee sus respuestas al entero más cercano.

7. Distribución de Ingresos. El economista Wilfredo Pareto³ estableció una ley empírica de distribución de ingresos superiores que da el número N de personas que reciben x o más

dólares. Si $\frac{dN}{dx} = -ax^{-b}$, donde a y b son

constantes, obtenga una integral definida que dé el número total de personas con ingresos entre a y b , siendo $a < b$.

8. Flujo continuo de ingreso. El valor actual (en dólares) de un flujo continuo de ingreso de \$2.000 al año durante 5 años al 6% compuesto continuamente esta dado por

$$\int_0^5 2.000e^{-0,06t} dt$$
 . Evalúe el valor actual al dólar más cercano.

9. Demografía. Para cierta población, suponga que l es una función tal que $l(x)$ es el número de personas que alcanzan la edad x en cualquier año. Esta función se llama función de la tabla de vida. Bajo condiciones apropiadas, la integral $\int_n^{x+n} l(t) dt$ da el número

esperado de gente en la población que tiene entre exactamente x y $x + n$ años, inclusive. Si

$l(x) = 10.000\sqrt{100 - x}$ determine el número de gente que tiene exactamente entre 36 y 34 años inclusive. Dé su respuesta al entero más cercano ya que respuestas fraccionarias no tienen sentido.



PRÁCTICA DE APLICACIÓN

10. Costo marginal. La función de costo marginal

de un fabricante es $\frac{dc}{dq} = 0,2q + 3$. Si c está en dólares, determine el costo de incrementar la producción de 60 a 70 unidades.

11. Ingreso marginal. La función de ingreso marginal de un fabricante es

$$\frac{dr}{dq} = MR = \frac{1.000}{\sqrt{100q}}. \text{ Si } r \text{ está en dólares,}$$

encuentre el cambio en el ingreso total del fabricante si la producción aumenta de 400 a 900 unidades.

12. Curva de Lorentz. Una curva de Lorentz se usa para estudiar las distribuciones de ingresos. Si x es el porcentaje acumulativo de los receptores de ingresos, ordenados de más pobres a más ricos, y y es el porcentaje acumulativo de los ingresos, entonces la igualdad de la distribución de ingresos está dada por la línea $y=x$ en la figura 19, donde x y y se

expresan como decimales. Por ejemplo, el 10% de la gente recibe el 10% de los ingresos totales, el 20% recibe el 20% de los ingresos, etc. Suponga que la distribución real está dada por la curva de Lorentz definida por

$$y = \frac{20}{21}x^2 + \frac{1}{21}x. \text{ Observe, por ejemplo,}$$

que el 30% de la gente recibe sólo el 10% de los ingresos totales. El grado de desviación de la igualdad se mide por el coeficiente de desigualdad para una curva de Lorentz. Este coeficiente se define como el área entre la curva y la diagonal, dividida entre el área bajo la diagonal:

$$\frac{\text{área entre la curva y la diagonal}}{\text{área bajo la diagonal}}.$$

Por ejemplo, cuando todos los ingresos son iguales, el coeficiente de desigualdad es cero. Encuentre el coeficiente de desigualdad para la curva de Lorentz definida antes.

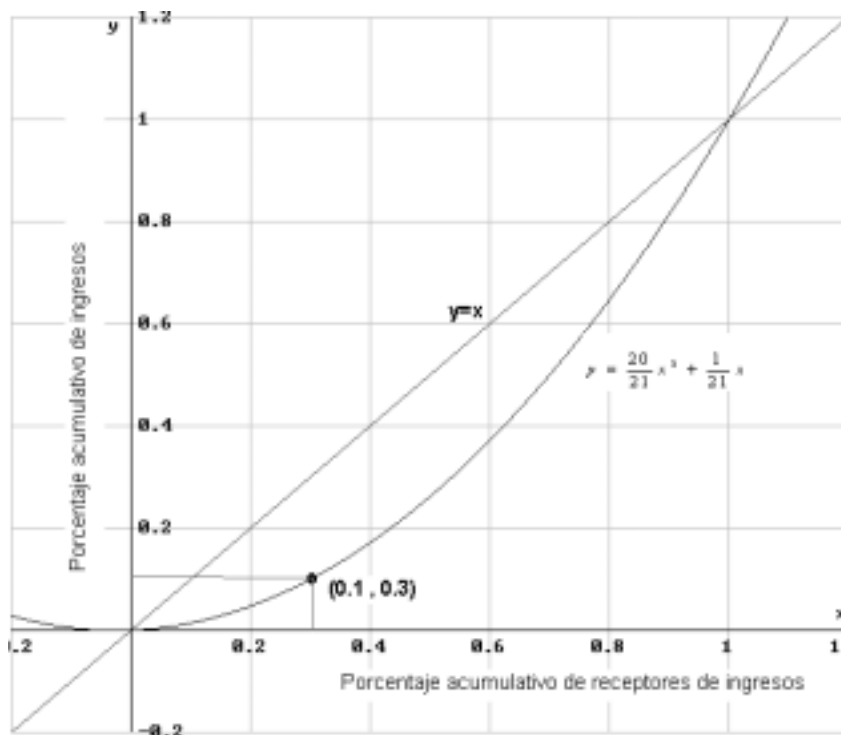


Figura 19. Curva de Lorentz para el problema 12.

RESPUESTAS

1. CS=9.000 y PS=18.000

2. CS=72,85 y PS=32.

3. (a) CS=25,6 y PS=38,4; (b) CS=50 LN(2)-25 y PS=1,25; (c) CS=800 y PS=1.000.

4. CS= \$426,67.

5. CS= \$254.000.

6. CS=1.197 y PS=477.

$$7. \int_a^b -ax^{-b} dx.$$

8. \$8.639.

9. 1.973.333.

10. \$160.

11. \$2.000.

12. 20/63.

AUTOEVALUACIÓN

1. Al introducir un impuesto, el precio que paga el consumidor es distinto del que percibe el productor. Esa diferencia representa, justamente, el impuesto. Cuando se introduce o se incrementa un impuesto, se desplaza hacia arriba el costo marginal de la empresa; por lo tanto,

- a. Se desplaza hacia abajo la curva de oferta.
- b. Se desplaza hacia arriba la curva de oferta.
- c. No se logra un punto de equilibrio de mercado.
- d. Aumenta el excedente del consumidor
- e. Aumentan las cantidades ofrecidas.

2. Las siguientes afirmaciones son verdaderas excepto una. ¿Cual?

- a. Con el impuesto se produce una apropiación del Estado de los excedentes del consumidor y del productor.
- b. La parte que es transferida al Estado no representa una pérdida a nivel global.
- c. Con el impuesto, hay una parte que constituye una pérdida que no la gana nadie.
- d. La incidencia del impuesto depende de sobre quién recaiga el mismo y no de la elasticidad de las curvas.

e. Los productores trasladan la totalidad del impuesto a los consumidores cuando la curva de demanda es perfectamente inelástica.

3. La función de gasto del consumidor representa el gasto mínimo para lograr un nivel de utilidad determinado. La diferencia entre lo que estarían dispuestos a pagar los consumidores para una determinada cantidad de producto y lo que efectivamente pagan, se llama:

- a. Propensión marginal al consumo.
- b. Propensión marginal al ahorro.
- c. Costo marginal.
- d. Excedente del consumidor.
- e. Excedente del productor.

4. La diferencia entre lo que percibe el productor y el precio al que estaría dispuesto a ofrecer cada una de las unidades de producto, se llama:

- a. Propensión marginal al consumo.
- b. Propensión marginal al ahorro.
- c. Costo marginal.
- d. Excedente del consumidor.
- e. Excedente del productor.



AUTOEVALUACIÓN

5. La función del ingreso total se puede obtener como la integral indefinida de:
 - a. El costo marginal.
 - b. La utilidad marginal.
 - c. El ingreso marginal.
 - d. El costo total.
 - e. El ingreso promedio.
6. Podemos llegar a la función de utilidad total usando el proceso de integración indefinida, contando con la siguiente información:
 - a. La función de oferta y el costo fijo.
 - b. La ecuación de demanda y el ingreso promedio.
 - c. Las funciones de costo fijo y costo variable.
 - d. El ingreso marginal y el costo marginal.
 - e. Los excedentes del productor y del consumidor.
7. La antiderivada de la utilidad marginal es lo mismo que:
 - a. La derivada de la utilidad total.
 - b. La derivada de la utilidad media.
 - c. El Ingreso Marginal menos el Costo Marginal.
 - d. La integral indefinida de la utilidad total.
 - e. La integral indefinida de la utilidad marginal.
8. La integral definida entre dos valores a y b de x para una función se define como:
 - a. El área bajo la curva entre $x=a$ y $x=b$.
 - b. La variación marginal entre $x=a$ y $x=b$.
 - c. La antiderivada de dicha función.
 - d. La derivada de dicha función en los puntos a y b .
 - e. El área entre la curva y el eje y desde $y=a$ hasta $y=b$.
9. La curva de Lorentz se usa para estudiar:
 - a. Las distribuciones de ingresos.
 - b. La producción máxima.
 - c. El óptimo de Pareto.
 - d. Las distribuciones de utilidades.
 - e. El análisis marginal.
10. Para calcular la integral definida debemos seguir el procedimiento siguiente:
 - a. Calcular la antiderivada de la función y luego reemplazar esta función en el límite superior e inferior. Luego hallar la diferencia de esos dos valores obtenidos.
 - b. Hallar el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$ de $[f(x + \Delta x) - f(x)] / \Delta x$. El resultado obtenido es nuestra integral buscada.
 - c. Hallamos la derivada de la función y luego reemplazamos en ella la diferencia entre los dos límites del intervalo.
 - d. Hallamos primero la integral indefinida y luego reemplazamos en ella la diferencia entre los límites superior e inferior de la integral.
 - e. Simplificamos la expresión, aplicamos la regla de integración indefinida y simplificamos el resultado.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Barnet Raymond A. *Matemáticas para Administración y Ciencias Sociales*. 2ª Edición. Nueva Editorial Interamericana S.A. México, 1983.
- Draper Jean E. & Klingman Jane S. *Matemáticas para Administración y Economía*. Editorial Harla. México, 1976.
- Haeussler Jr Ernest F. & Paul Richard S. *Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la Vida*. 8ª Edición. Editorial Prentice Hall. México, 1997.
- Hoffman Lawrence D. *Cálculo para Ciencias Sociales y Administrativas*. Editorial McGrawHill. Bogotá, 1980.