Matemática II

José Miguel Cubillos Munca

FUNDAMENTACIÓN

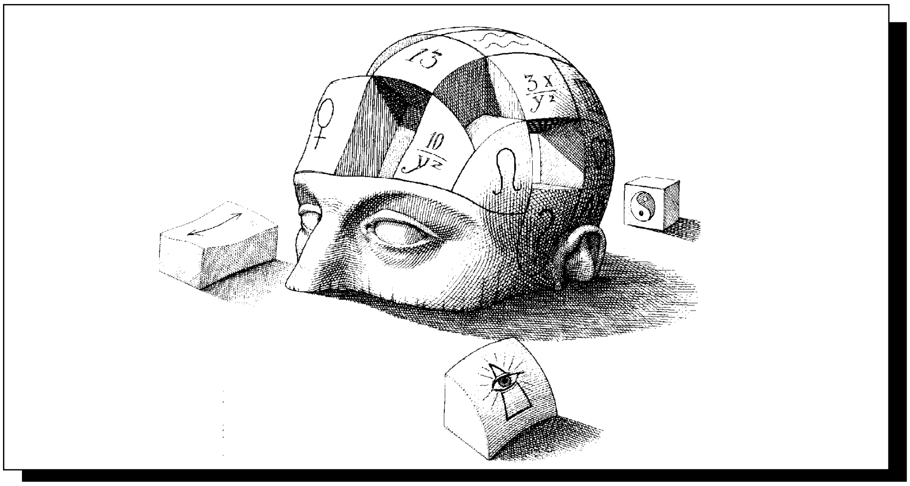
Escuela Superior de Administración Pública
Programa Administración
Pública Territorial

Núcleo

1 INTEGRACIÓN INDEFINIDA

En el módulo de Matemática 1 se estudiaron las aplicaciones del cálculo diferencial a las áreas relacionadas con la Administración Pública. Ahora estudiaremos el proceso de integración orientado al estudio de las aplicaciones del mismo tipo, es decir: Costo, renta nacional, consumo y ahorro, excedentes del productor y consumidor y relación Ingreso Vs. Costo. Este capítulo se centrará en el proceso de integración indefinida y sus aplicaciones, mientras el próximo se dedicará a la integración definida.

Al igual que para el módulo de Matemática I, este módulo exige unos conocimientos previos que se deben haber logrado durante el bachillerato; para este capítulo y el siguiente son: manejo básico de las operaciones algebráicas, derivación e integración. Como parte del objeto del curso son las aplicaciones del cálculo integral y no la enseñanza del proceso de integración, entonces este último se abordará tangencialmente, centrando el análisis en las aplicaciones. Igual criterio será tenido en cuenta para la evaluación del curso.



PLAN DEL CAPÍTULO

1. HISTORIA DEL CÁLCULO INTEGRAL
2. ANTIDERIVADA E INTEGRAL INDEFINIDA
3. APLICACIONES DE LA INTEGRACIÓN INDEFINIDA
4. TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN: ESTÁNDAR Y SUSTITUCIÓN
5. PRÁCTICA CON DERIVE

OBJETIVO GENERAL

- El estudiante aplicará el proceso de integración indefinida para resolver problemas relacionados con el costo, la renta nacional, el consumo y el ahorro, para ello se apoyará en un software de matemática.

1. INTEGRACIÓN

El proceso de determinar una función cuya derivada se conoce se llama integración y la función que se busca se llama integral indefinida o antiderivada de la función propuesta.

El cálculo integral ha sido una herramienta invaluable en el estudio de la naturaleza que ha logrado un aporte significativo al desarrollo de la humanidad, por su aplicabilidad y por su antigüedad. Véase **Doc. 1**.

El proceso de calcular una integral lleva a dos caminos: a encontrar las antiderivadas y al cálculo de áreas bajo una curva. Véase **Doc. 2**.

Cuando pretendemos simplemente encontrar la antiderivada estamos abordando la integración indefinida. **Explicación 1.**

Del proceso general de integración usando las antiderivadas conocidas podemos conformar unas tablas de integrales que nos proporcionan las fórmulas para encontrar la integral de las funciones más comunes. Véase la **tabla 1.**

Además del proceso general de integración, el cálculo nos proporciona otros métodos como: sustitución, partes, fracciones parciales y el método de aproximaciones que se estudia en el próximo capítulo.

La integral indefinida proporciona algunas aplicaciones útiles al administrador público, especialmente en el campo de la economía, como son: el costo, la renta nacional, el consumo y el ahorro. (Véanse los tres últimos en la **explicación 2**)

En el módulo de Matemática I se explicó el enfoque marginal con el cual se obtiene el nivel de producción que maximiza las utilidades. Se señaló que una expresión del ingreso marginal (MR) es la derivada de la función del ingreso total, donde la variable independiente es el nivel de producción. De manera semejante, se afirmó que una expresión del costo marginal (CM) es la derivada de la función del costo total. Si se tiene una expresión del ingreso o del costo marginal, las antiderivadas respectivas serán las funciones de ingreso y costo totales. Véanse los **ejemplos 3 al 6.**

VOCABULARIO

Propensión marginal al ahorro. La propensión marginal al ahorro (PMS) es la proporción que se ahorra de un peso adicional de renta. (PMS = variación de la cantidad ahorrada / variación de la renta). La suma de la PMC y la PMS es la unidad, ya que la renta se consume o se ahorra.

Propensión marginal al consumo. La relación entre la variación en el consumo y la variación de la renta, expresada mediante la propensión marginal a consumir (PMC), determina cómo varía el consumo cuando la renta aumenta o disminuye ligeramente. La propensión marginal a consumir es la proporción de un peso en que aumenta el consumo cuando aumenta la renta en un peso. (PMC = variación de la cantidad consumida / variación de la renta). Una de las hipótesis keynesianas básicas sostiene que la PMC es siempre positiva y menor que la unidad.

Renta Nacional. El PIB, o si se prefiere la "renta nacional", es la suma de lo que una economía ha gastado que es igual a lo que ha ingresado y que es igual a lo que ha producido. El PIB es "lo que da de sí" una economía, lo que "renta" una economía, al igual que decimos la "renta" de una casa. Lo que paga el inquilino es lo que ingresa el propietario.

Valor de reventa. es el valor monetario que posee un cierto bien después de determinado tiempo, este tiempo debe ser menor al de la vida útil, ya que se supone que un bien u objeto después de cumplir con su vida útil, se desecha. (Valor Residual = Valor Neto - Depreciación Acumulada)

Doc. 1. El Legado de las matemáticas[1]

"Del legado de las matemáticas, el cálculo infinitesimal es, sin duda, la herramienta más potente y eficaz para el estudio de la naturaleza. El cálculo infinitesimal tiene dos caras: diferencial e integral; y un oscuro interior donde, como demonios, moran los infinitos: grandes y pequeños. Los orígenes del cálculo integral se remontan, como no, al mundo griego; concretamente a los cálculos de áreas y volúmenes que Arquímedes calculó en el siglo III a.C.. Aunque hubo que esperar mucho tiempo hasta el siglo XVII -¡2000 años! para que apareciera -o mejor, como Platón afirmaba para que se descubriera- el cálculo. Varias son las causas de semejante retraso. Entre ellas debemos destacar la inexistencia de un sistema de numeración adecuado - en este caso el decimal- así como del desarrollo del álgebra simbólica y la geometría analítica que permitieron el tratamiento algebráico -y no geométrico- de las curvas posibilitando enormemente los cálculos de tangentes, cuadraturas, máximos y mínimos, entre otros. Todo ello ocurrió esencialmente en el siglo XVII. Comenzaremos por tanto desde el principio.

Para los griegos el infinito aparece de dos maneras distintas: lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande. Ya apareció de algún modo en la inconmensurabilidad de la diagonal de cuadrado; también, claro está, lo tenemos en la famosa paradoja de Zenón sobre Aquiles y la tortuga, por ello no es de extrañar que alguien intentara regularlos. Ese alguien fue nada más y nada menos que Aristóteles. Lo que hizo fue prohibir el infinito en acto "no es posible que el infinito exista como ser en acto o como una sustancia y un principio", escribió, pero añadió "es claro que la negación absoluta del infinito es una hipótesis que conduce a consecuencias imposibles" de manera que el infinito "existe potencialmente [...] es por adición o división". Así, la regulación aristotélica del infinito no permite considerar un segmento como una colección de puntos alineados pero sí permite dividir este segmento por la mitad tantas veces como queramos. Fue Eudoxo, discípulo de Platón y contemporáneo de Aristóteles quien hizo el primer uso "racional" del infinito en las matemáticas. Eudoxo postuló que "toda magnitud finita puede ser agotada mediante la substracción de una cantidad determinada". Es el famoso principio de Arquímedes que éste toma prestado a Eudoxo y que sirvió a aquel para superar la primera crisis de las Matemáticas -debida al descubrimiento de los irracionales-.

No obstante, fue obviamente Arquímedes el precursor del cálculo integral aunque desgraciadamente -o quizá por suerte, quién sabe- su método se perdió y por tanto no tuvo ninguna repercusión en el descubrimiento del cálculo -recordemos que su original método "mecánico" donde además se saltaba la prohibición aristotélica de usar el infinito in acto se perdió y solo fue recuperado en 1906 como ya hemos tenido ocasión de contar en la sección dedicada a los griegos-. La genial idea de siracusano fue considerar las áreas como una colección -necesariamente infinita- de segmen-

å

1 Apartes de la exposición *El Legado de las Matemáticas.De Euclides a Newton*: Los genios a través de sus libros. "De Cómo de Gestó y vino al Mundo el Cálculo Infinitesimal". Exposición realizada en Los Reales Alcázares de Sevilla, 2000.

Doc. 1. Continuación

tos. Habrá que esperar 2000 años hasta que otro matemático -en este caso Cavalieri- volviera a usar de esa manera los infinitos. De hecho Leibniz descubrió la clave de su cálculo al ver un trabajo de Pascal donde éste usaba un método semejante.

Newton en su célebre frase 'Si he llegado a ver más lejos que otros es por que me subí a hombros de gigantes' se refiere entre otros a su maestro y mentor Isaac Barrow. Barrow fue probablemente el científico que estuvo más cerca de descubrir el cálculo. Llegó a las matemáticas en su afán de comprender la teología -de hecho se marcho de su cátedra en Cambridge, cediéndosela a Newton para continuar sus estudios teológicos-. En la lección X de su obra *Letiones opticae & geometricae* Barrow demuestra su versión geométrica del Teorema fundamental del cálculo.

En el último cuarto del siglo XVII, Newton y Leibniz, de manera independiente, sintetizaron de la maraña de métodos infinitesimales usados por sus predecesores dos conceptos, los que hoy llamamos la derivada y la integral, desarrollaron unas reglas para manipular la derivada –reglas de derivación– y mostraron que ambos conceptos eran inversos –teorema fundamental del cálculo–: acababa de nacer el cálculo infinitesimal. Para resolver todos los problemas de cuadraturas, máximos y mínimos, tangentes, centros de gravedad, etc., que habían ocupado a sus predecesores bastaba echar a andar estos dos conceptos mediante sus correspondientes reglas de cálculo.

El primero en descubrirlo fue Newton, pero su fobia a publicar le hizo guardar casi en secreto su descubrimiento. Newton gestó el cálculo en sus annimirabilis (1665-1666) cuando se refugiaba en su casa materna de la epidemia de peste que asolaba Inglaterra.

Leibniz, más conocido como filósofo, fue el otro inventor del cálculo. Su descubrimiento fue posterior al de Newton, aunque Leibniz fue el primero en publicar el invento. Lo hizo además usando una vía ciertamente novedosa en aquella época: para facilitar la difusión de sus resultados los publicó en una de las recién creadas revistas científico filosóficas el Acta Eroditorum que él mismo había ayudado a fundar -eran ciertamente momentos importantes para la ciencia donde empezaron a aparecer las revistas científicas que permitirían luego y hasta nuestro días la difusión del conocimiento y los descubrimientos científicos-Durante una estancia en París -ya que era un afamado diplomático- Leibniz conoce a Huygens quien le induce a estudiar matemáticas. En 1673, luego de estudiar los tratados de Pascal, Leibniz se convence que los problemas inversos de tangentes y los de cuadraturas eran equivalentes. Alejándose de estos problemas, a partir de sumas y diferencias de sucesiones comienza a desarrollar toda una teoría de sumas y diferencias infinitesimales que acabarían en la gestación de su cálculo por el año 1680 y a diferencia de Newton sí lo publica en las mencionadas Actas con el título 'Un nuevo método para los máximos y los mínimos, así como para las tangentes, que no se detiene ante cantidades fraccionarias o irracionales, y es un singular género de cálculo para estos problemas'."

Doc. 2. Concepto de integración[2]

"La integración tiene dos interpretaciones distintas; es un procedimiento inverso de la diferenciación o derivación y es un método de determinar el área debajo de una curva. Cada una de estas interpretaciones tiene numerosas aplicaciones a la economía y la administración.

Como una operación, la integración es la inversa de la derivación. Así, si una función es derivada y luego se integra la función obtenida, el resultado es la función original. Esto es verdadero sólo si se especifica en alguna forma la constante de integración; de otra manera el resultado puede diferir de la función original por una constante. En este contexto, la integración es un proceso de hallar una función cuando se conoce su derivada (o razón de cambio). En economía puede usarse la integración para hallar la función de costo total cuando se da una función de costo marginal, para hallar la función de ingreso total cuando se da la función de ingreso marginal, etc.

También puede definirse la integración como el proceso de hallar el valor límite de una suma de términos cuando el número de términos crece infinitamente y el valor numérico de cada término se aproxima a cero. Este es el contexto en que la integración se interpreta como la determinación del área bajo una curva. En efecto, el cálculo integral se desarrolló con el propósito de evaluar áreas, suponiéndolas divididas en un número infinito de partes infinitesimalmente pequeñas cuya suma es el área requerida. El signo integral es una S alargada $\int$ que usaron los primeros autores para indicar la suma. En economía puede evaluarse el ingreso total como el área bajo la curva de ingreso marginal; el superávit del consumidor y el superávit del productor pueden evaluarse como áreas bajo las curvas de demanda y de oferta, y así sucesivamente.

Para una u otra aplicación, la integración requiere operacionalmente que se determine una función cuando se ha dado su derivada. Desafortunadamente, las técnicas de integración son de por sí más difíciles que las de derivación y existen funciones, algunas de ellas con engañosa apariencia simple, cuyas integrales no pueden expresarse en términos de funciones elementales. Los casos más sencillos de integración se llevan a cabo invirtiendo las correspondientes fórmulas de la derivación; los casos más complicados se manejan utilizando tablas de las formas estándar, con varios procesos de sustitución y, si es necesario, con métodos numéricos (aproximación)."

2 Draper Jean E. & Klingman Jane S. *Matemáticas para la Administración y la Economía*. Editorial HARLA. México, 1967.

EXPLICACIÓN 1. INTEGRAL INDEFINIDA

Si tenemos una función F(x) que tiene la siguiente derivada: .
¿Cuál es esa función F(x)? Como ya sabemos derivar y conocemos esas derivadas triviales, entonces podemos deducir que la función $F(x) = x^3$. Verifiquemos:

$\frac{d}{dx}\left[x^3\right] = 3x^2$. Entonces decimos que F(x) es la antiderivada de F'(x), o que x^3 es la antiderivada de $3x^2$, ya que $3x^2$ es la derivada de x^3.

Hay además un elemento adicional en este proceso de pasar de función a derivada, y de derivada a antiderivada, es decir el proceso inverso. Veamos el ejemplo 1. en ese ejemplo se verifica que varias funciones distintas pueden tener la misma derivada, lo cual implica que una función tiene múltiples antiderivadas. ¿Pero qué es lo que cambia en la antiderivada de un caso a otro?. Revise el ejemplo 1 nuevamente y responda.

En efecto, lo que cambia es la constante de la antiderivada, lo cual nos lleva a que si de alguna forma conservamos la constante que tenía la función inicial F(x) o tenemos una forma de conocerla, entonces al hallar la antiderivada de F'(x) podemos llegar a F(x), en caso contrario llegaremos a una función f(x) similar a F(x) pero que pude variar en un valor constante. Es decir:

F(x) = f(x) + K, donde K la llamaremos posteriormente constante de integración.

Notación para las antiderivadas.

Si y = F(x) es una antiderivada de f(x), entonces se dice que F(x) es una solución de la ecuación:

$\frac{dy}{dx} = f(x)$, ahora escribimos esta ecuación en la forma llamada diferencial equivalente así: dy = f(x)dx.

La operación de encontrar todas las soluciones (la antiderivada general de f) de esta ecuación se llama integración y se simboliza con la S alargada $\int$.

Para solucionar dy = f(x)dx aplicamos derivada así: dy = f(x) dx , de donde: y = f(x) dx = F(x) + K

donde x es la variable de integración, f(x) es el integrando y K es la constante de integración.

Ejemplo 1
Derivada y múltiples antiderivadas

Antiderivada F(x)	Derivada F'(x)
$x^5 + 1$	$5x^4$
$x^5 + 3$	$5x^4$
$x^5 + 100$	$5x^4$
x^5	$5x^4$

TABLA 1. REGLAS BÁSICAS DE INTEGRACIÓN

	FÓRMULA DE INTEGRACIÓN	FÓRMULA DE DERIVACIÓN
1. Función constante	$\int k\,dx = kx + c$, donde k = constante	$\frac{d}{dx}[k] = 0$
2. Constante por una función	$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ donde k = constante	$\frac{d}{dx}[kf(x)] = k\frac{d}{dx}[f(x)]$
3. Regla de la potencia	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ donde n $\neq$ -1	$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$
4. Potencia de una función	$\int [f(x)]^n f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$ donde n $\neq$ -1	$\frac{d}{dx}[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1} f'(x$
5. Suma o diferencia de funciones	si las integrales de f(x) y g(x) existen, entonces: $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$	$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)]$
6. Excepción de la regla de la potencia	$\int \frac{1}{x}dx = \int x^{-1}\,dx = Ln\,x + c$	$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}$
7. Cociente especial	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln f(x) + c$	$\frac{d}{dx}[\ln f(x)] = \frac{1}{f(x)} f'(x)$
8. Función Exponencial	$\int e^x\,dx = e^x + c$	$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$
9. Exponencial de una función	$\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c$	$\frac{d}{dx}[e^{f(x)}] = e^{f(x)} f'(x)$

EXPLICACIÓN 2
CÓMO APLICAR LAS REGLAS DE INTEGRACIÓN ESTÁNDAR

De forma similar como se aplican las reglas de derivación. (Recuerde que este proceso lo estudió durante el bachillerato). Explicaremos uno de los casos y corresponderá a usted recordar y volver a practicar los otros casos con ejercicios que invente o con los de la práctica de entrenamiento.

Apliquemos la regla de la potencia de una función en conjunto con la de constante por una función (véase la tabla 1), en el siguiente ejercicio: Evaluar $\int 7x\,dx$.

Aplicando la regla de la constante por una función tenemos: 7x dx = 7 x dx

Teniendo en cuenta que x está elevado a la potencia 1, es decir ($x = x^1$) reexpresamos: = 7 x^1 dx

Aplicando la regla de la potencia de una función tenemos: $7\int x^1 dx = \frac{7}{2}x^2 + K$

El siguiente esquema[3] muestra el procedimiento que se ha seguido y que se puede generalizar como se ve en el ejemplo 2.

FUNCIÓN DADA PARA INTEGRAR → **RE-EXPRE-SAR LA FUNCIÓN** → **APLICAR LA REGLA DE INTEGRACIÓN** → **SIMPLIFICAR EL RESULTADO**

3 | Tomado de Larson Roland E. y Hostetler Robert P. *Matemáticas 11º*. Cálculo. McGraw-Hill. Bogotá, 1989. Pág. 189.

Ejemplo 2
Aplicando las reglas de integración

Función a integrar	Función re-expresada	Integración	Respuesta simplificada
$\int \frac{1}{x^3}dx =$	$\int x^{-3}dx$	$= \frac{x^{-2}}{-2} + K$	$= -\frac{1}{2x^2} + K$
$\int \sqrt{x}dx =$	$\int x^{1/2}dx$	$= \frac{x^{3/2}}{3/2} + K$	$= \frac{2}{3}x^{3/2} + K$
$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx =$	$\int \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx =$ $\int \left(x^{1/2} + x^{-1/2}\right)dx$	$= \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + K$	$= \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + K$ $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + K$

Ejemplo 3. Ingreso marginal

La función de ingreso marginal (**MR**) del producto de una compañía es: **MR**=50.000 - ***q***

Donde ***q*** es el número de unidades producidas y vendidas. Sí el ingreso total es 0 cuando no se vende ninguna unidad, determine la función de ingreso total del producto.

Dado que la función de ingreso marginal es la derivada de la función de ingreso total, ésta última será la antiderivada del ingreso marginal. Al aplicar el proceso de integración indefinida se obtiene:

$R(q) = 50.000q - \frac{q^2}{2} + C$, puesto que sabemos que el ingreso cuando no se coloca en el mercado algún producto es cero, es decir ***R***(0)=0, entonces ***C***=0. Por lo tanto, la función de ingreso total del producto de la compañía es:

$$R(q) = 50.000q - \frac{q^2}{2}.$$

Ejemplo 4. Costo marginal

La función que describe el costo marginal de fabricar un producto es MC= ***q*** + 100,
Donde ***q*** es el número de unidades producidas. Se sabe también que el costo total es de $40.000, cuando q=100. Determinar la función de costo total.
Para determinar la función de costo total, primero se encuentra la antiderivada de la función de costo marginal, es decir, $C(x) = \frac{q^2}{2} + 100q + C$

Dado que C(100)=40.000, podemos despejar el valor de C, que resulta representar el costo fijo.

$$40.000 = \frac{(100)^2}{2} + 100(100) + C$$

$$40.000 = 5.000 + 10.000 + C$$

$25.000 = C$, es decir cuando la producción es cero el costo es de 25.000, entonces la función específica que representa el costo total de fabricar un producto es:

$$C(x) = \frac{q^2}{2} + 100q + 25.000$$

Ejemplo 5. Función de demanda

Si la función de ingreso marginal para el producto de un fabricante es , $MR = \frac{dR}{dq} = 2.000 - 20q - 3q^2$ encontrar la función de demanda.

Estrategia: Integrando $\frac{dR}{dq}$ y usando una condición inicial, podemos encontrar la función de ingreso R(q). Pero el ingreso está dado también por la relación general *R(q)=pq,* donde p es el precio por unidad. Así, $p = \frac{R(q)}{q}$.

Reemplazando *R(q)* en esta ecuación por la función de ingreso obtenemos la función de demanda.

Como $\frac{dR}{dq}$ es la derivada del ingreso total *R(q)*,

å

$$R(q) = \int \left(2.000 - 20q - 3q^2\right)dq$$

$$R(q) = 2.000q - (20)\frac{q^2}{2} - (3)\frac{q^3}{3} + C$$

$$R(q) = 2.000q - 10q^2 - q^3 + C$$

El ingreso es cero cuando $q = 0$. Suponemos que cuando no se ha vendido ninguna unidad, el ingreso total es 0; esto es, R(0) = 0 cuando $q = 0$. Ésta es nuestra condición inicial. Sustituyendo esos valores en la ecuación de costo resulta:

$0 = 2.000(0) - 10(0)^2 - 0^3 + C$, por lo tanto C = 0, y $R(q) = 2.000q - 10q^2 - q^3$.

Para encontrar la función de demanda, usamos el hecho de que $p = \frac{R(q)}{q}$ y sustituimos el valor de R(q):

$p = \frac{R(q)}{q} = \frac{2.000q - 10q^2 - q^3}{q}$, sacando factor común q en el numerador y simplificando tenemos:

$p = 200 - 10q - q^2$.

Ejemplo 6. Costo promedio

Si el costo total y de producir y comercializar q unidades de una mercancía está dado por la función C(q), el costo promedio por unidad es $\overline{C}(q) = \frac{C(q)}{q}$ y el costo marginal es $MC = \frac{dC}{dq} = C'(q)$. De lo anterior llegamos a que podemos encontrar la función de costo promedio si tenemos la de costo marginal, ya que al integrar el costo marginal obtenemos el costo total, y al dividir el costo total por la cantidad obtenemos el costo promedio.

El costo marginal MC como función de las unidades producidas q, está dado por: $MC = \frac{dC}{dq} = 1.064 - 0{,}005q$
Si el costo fijo es \$16,3, hallar las funciones de costo total y costo promedio.

$$C(x) = \int dC = \int \left(1.064 - 0{,}005q\right)dq = 1.064q - 0{,}0025q^2 + C$$

Si q = 0, C = 16,3 se deduce C = 16,3 y se tiene:

$C(q) = 16{,}3 + 1.064q - 0{,}0025q^2$: Costo total

$\overline{C}(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{16{,}3}{q} + 1.064 - 0{,}0025q$: Costo promedio.

EXPLICACIÓN 2
RENTA NACIONAL, CONSUMO Y AHORRO

Si la función consumo está dada por c = f(x), en la cual c es el consumo nacional total y x es la renta nacional total, entonces la propensión marginal a consumir es la derivada de la función consumo con respecto a x.

$\frac{dc}{dx} = f'(x)$, y suponiendo que x = c + s, en donde s son los ahorros, la propensión marginal a ahorrar es: $\frac{ds}{dx} = 1 - \frac{dc}{dx}$

El consumo nacional total es la integral con respecto a x de la propensión marginal a consumir, $c = \int f'(x)dx = f(x) + C$

Debe especificarse una condición inicial para obtener una única función de consumo al integrar la correspondiente propensión marginal a consumir. Véanse los ejemplos 7 y 8.

Ejemplo 7. Propensión marginal al consumo

La propensión marginal a consumir (en billones de dólares) es: $\frac{dc}{dx} = 0{,}7 + \frac{0{,}2}{\sqrt{x}}$

Cuando la renta es cero, el consumo es 8 billones de dólares. Hallar la función de consumo.

$$c = \int\left(0{,}7 + \frac{0{,}2}{\sqrt{x}}\right)dx = 0{,}7x + 0{,}4\sqrt{x} + C$$

Sí x = 0, c = 8, se deduce C = 8 y se tiene

$$c = 8 + 0{,}7x + 0{,}4\sqrt{x}$$

Ejemplo 8. Propensión marginal al ahorro

La propensión marginal a ahorrar es 1/3. Cuando la renta es cero el consumo es de 11 millones de dólares. Hallar la función de consumo.

$$\frac{dc}{dx} = 1 - \frac{ds}{dx} = \frac{2}{3}$$

$$c = \int \tfrac{2}{3}\, dx = \tfrac{2}{3}\, x + 11$$

Si x = 0, c = 11, se deduce C = 11, y

$$c = \tfrac{2}{3}\, x + 11$$

EXPLICACIÓN 3
INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN

En razón a que muchos ejercicios de integración no se pueden resolver con las reglas estándar, recurrimos a otros métodos, uno de ellos es la integración por sustitución, en donde usamos un truco consistente en hacer una sustitución de un factor sustituyente por un símbolo que la representa logrando simplificar el problema. Para aplicar el método de sustitución es necesario que se pueda identificar dentro de la función a integrar una parte que corresponde a otra función más fácil de derivar o factor sustituyente y la parte restante coincida con la derivada de esta última función o factor.

Si bien la integración por sustitución y la integración por partes no logran una participación significativa dentro de las aplicaciones de la derivada, abordamos aquí la primera, de la cual se presentan los casos más notorios.

El proceso de integración por sustitución se descompone en cuatro partes: identificación del factor sustituyente y su derivada, realización de la sustitución simbólica, aplicación de la regla estándar de derivación, y aplicación de la sustitución a la inversa. Véanse los ejemplos 9 y 10.

NOTA

Errores fatales frecuentes

1. Aplicar el proceso de integración en lugar del de derivación.
2. Decir que la integral de una constante respecto a x es cero y no la constante por x.
3. Realizar mal las operaciones con fracciones.
4. Eliminar el símbolo de integral al momento de reexpresar y no al momento de integrar.
5. Olvidar escribir la constante de integración.
6. Darse por vencido y esperar que otro haga el ejercicio

Ejemplo 9. Integración por sustitución.

Integrar $\int (x^3+5)^6 3x^2 dx$

No es necesario reexpresar la expresión inicial.

En esta el factor sustituyente es $u=(x^3+5)$ y su derivada es $\frac{du}{dx}=3x^2$, de manera que al hacer la sustitución inicial nos queda $\int (x^3+5)^6 3x^2 dx = \int u^6 du$.

Ahora sí podemos integrar fácilmente por la regla de la potencia y tenemos: $\int u^6 du = \frac{u^7}{7}+C$

Haciendo la sustitución final llegamos a la respuesta:
$\frac{u^7}{7}+C=\frac{(x^3+5)^7}{7}+C$. En este caso no se puede simplificar más la respuesta.

Ejemplo 10. Integración por sustitución

Integre: $\int \frac{x-1}{(x^2-2x+3)^3}dx$

Primero re-expresamos así:

$$\int \frac{x-1}{(x^2-2x+3)^3}dx =$$

$$\int (x^2-2x+3)^{-3}(x-1)dx$$

Si se hace el factor sustituyente

$u = x^2 - 2x + 3$,entonces

$du = (2x-2)dx = 2(x-1)dx.$

En el integrando hace falta un factor 2. Se introduce este factor para que se pueda aplicar la regla de la potencia, así:

$$\int (x^2-2x+3)^{-3}(x-1)dx =$$

$$\int (x^2-2x+3)^{-3}\frac{2}{2}(x-1)dx =$$

$$\frac{1}{2}\int (x^2-2x+3)^{-3}2(x-1)dx$$

hacemos la sustitución inicial y luego integramos por la regla de la potencia:

$$= \frac{1}{2}\int u^{-3}du = \frac{1}{2}\frac{u^{-2}}{-2} + C$$

Haciendo la sustitución final tenemos:

$$-\frac{1}{4}u^{-2} + C = -\frac{1}{4}(x^2-2x+3)^{-2} + C$$

Tabla 2. Métodos de integración y aproximación

Donde " n " = número de partes en que se divide el intervalo [a , b]

Integración por sustitución - Regla general	Si se hace u=u(x) y du=u'(x)dx, entonces: $\int f(u(x))u'(x) = \int f(u)du = F(u) + C = F(u(x)) + C$
Integración por substitución - potencia de la regla general	$\int [u(x)]^n u'(x)dx = \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C = \frac{[u(x)]^{n+1}}{n+1} + C$, con n= -1
Integración por partes	$\int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int v(x)\, u'(x)\, dx$
Aproximación por Rectángulo	$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}[f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)]$ donde x_i es punto medio de los intervalos.
Aproximación por Trapecio	$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + ... + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$ donde x_i son los puntos finales de los subintervalos.
Aproximación por Simpson	$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{3n}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) ... + f(x_n)]$ donde "n" es par.

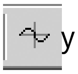
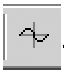
2. PRÁCTICA CON DERIVE

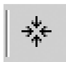
Ingrese al programa Derive.

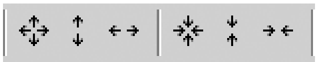
Digite la ecuación MR = 50000-q, donde MR es el ingreso marginal

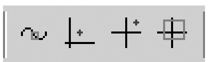
Observe que Derive la ha interpretado como $m \cdot r = 50000 - q$, es decir no toma a MR como un solo símbolo sino como el producto de m por r. Por lo que debemos abreviar la expresión.

Digite ahora la ecuación M = 50000 - q, pulse Enter.

Haga clic en el icono Ventana 2D  y luego en el icono Representar Expresión . Note que los dos iconos son iguales pero cumplen funciones diferentes, el primero aparece cuando está activada la ventana de ecuaciones y el segundo cuando está activada la ventana de gráficos en dos dimensiones.

Lo más probable es que en este momento no vea nada representado en el plano, entonces debe hacer clic en el ícono Zoom hacia dentro  o pulsar repetidamente la tecla F9 hasta que la gráfica sea visible dentro del rango en pantalla.

Cuando la gráfica sea visible, optimice la presentación de la gráfica con los iconos  o con las teclas: F10 Zoom hacia fuera, F8 Reducción vertical, F6 Reducción horizontal, F9 Zoom hacia dentro, F7 Ampliación vertical y F5 Ampliación horizontal.

Con los iconos  puede centrar y demarcar el área a visualizar, hasta obtener un resultado como el de la figura 1.

Note que en la figura 1 se han reemplazado los valores x y y que usted tiene en pantalla por MR y q, lo cual se logra seleccionando Opciones - Pantalla - Ejes - Títulos, donde usted hace la sustitución respectiva. Véase la figura 2.

Para ver simultáneamente la ventana de ecuaciones y la de gráficos seleccione Ventana - Mosaico vertical. Tenga en cuenta que son distintas las funciones que están disponibles cuando se activa una u otra ventana.

Ahora posicionado en la ventana de ecuaciones y con la fórmula que introducimos activa, hacemos clic en el icono integrar o seleccionamos Cálculo - Integrales, o pulsamos Control + Shift + I, nos aparecerá la ventana de la figura 3, en la que seleccionamos la variable q, integral indefinida, supongamos que el costo fijo es de 10.000 y anotémoslo como constante.

Haga clic en simplificar y obtendrá como resultado la integración de ambos términos de la ecuación, sin embargo nos interesa sólo el termino de la derecha.

Pruebe ahora ingresando solamente la expresión 50.000-q y luego repita el proceso de integración indefinida. Derive dará como resultado: $-\frac{q^2}{2} + 50.000 \cdot q + 10.000$

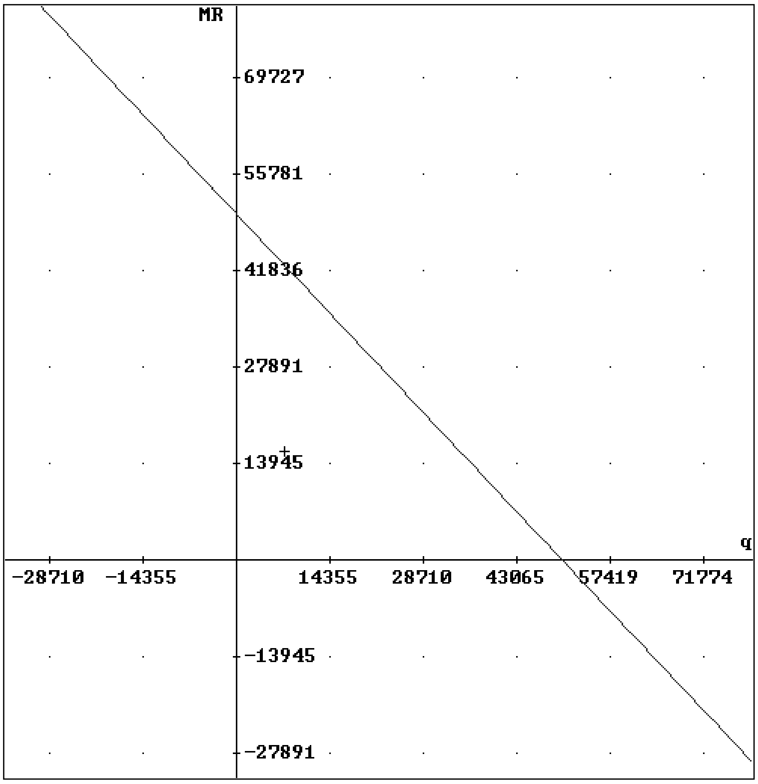


Figura 1. Gráfica de ingreso marginal.

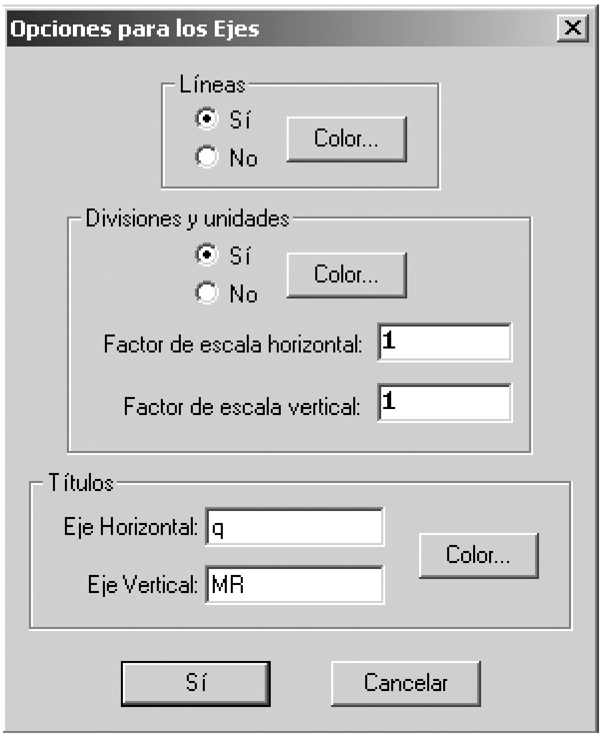


Figura 2. Títulos de los ejes de la gráfica

Figura 3. Ventana de parámetros de integración.

PRÁCTICA DE ENTRENAMIENTO

Resuelva los siguientes ejercicios de integración indefinida y compare con las respuestas proporcionadas y compruébelas mediante derivación.

REGLAS DE INTEGRACIÓN

1. $\int 7dx$, Rta: $7x+C$

2. x^6dx, Rta:

3. $\int 8t^3 dt$, Rta: $2t^4 + C$

4. $\int (3x^2 + 2x - 5)dx$,

   Rta: $x^3 + x^2 - 5x + C$

5. $\int 6x^{1/2}dx$, Rta: $4x^{3/2} + C$

6. $\int 8x^{-3}dx$, Rta: $-4x^{-2} + C$

7. $\int \frac{du}{\sqrt{u}}$, Rta: $2\sqrt{u} + C$

8. $\int (10x^{2/3} - 8x^{1/3} - 2)dx$,

   Rta: $6x^{\frac{5}{3}} - 6x^{4/3} - 2x + C$

9. $\int \left(\sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{x^3}\right)dx$, Rta: $\frac{3}{5}x^{5/3} 2x^{-2} + C$

INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN

10. $\int (x^2 - 4)^5 2xdx$, Rta: $\frac{(x^2-4)^6}{6} + C$

11. $\int (3x - 2)^7 dx$, Rta: $\frac{(3x-2)^8}{24} + C$

12. $\int \frac{x^3}{\sqrt{2x^4 + 3}} dx$, Rta: $\frac{(2x^4+3)^{1/2}}{4} + C$

13. $\int \frac{t}{(3t^2+1)^4} dt$, Rta: $\frac{-1}{18}(3t^2+1)^{-3} + C$

14. $\int \frac{x^3 + x}{(x^4 + 2x^2 + 1)^4}dx$,

    Rta: $\frac{-1}{12(x^4 + 2x^2 + 1)^3} + C$

å

PRÁCTICA DE APLICACIÓN

1. Costo marginal. La función de costo marginal para la producción es $CM = 10 + 24q - 3q^2$; si el costo total para producir una unidad es 25, hallar la función costo total y la función costo promedio.
2. Propensión al ahorro. La propensión marginal a ahorrar es ½. Cuando la renta es cero, el consumo es 6 billones de dólares. Hallar la función consumo.
3. Ingreso marginal. Si el ingreso marginal es $MR = 15 - 9q - 3q^2$, hallar las funciones de ingreso y demanda.
4. Ingreso marginal. Si el ingreso marginal es $MR = 10 - 5q$, hallar lan funciones de ingreso y demanda.

$$\frac{dE}{dt} = 400 + 600\sqrt{t}$$

$$\frac{dN}{dt} = 5.000(t+1)^{-3/2}$$

5. Propensión al consumo. La propensión marginal a consumir (en billones de dólares) es $\frac{dc}{dx} = 0,5 + \frac{1}{3x^{1/3}}$ Cuando la renta es cero, el consumo es 6 billones de dólares, hallar la función de consumo.
6. Cobertura educativa. La rapidez de incremento proyectada en la inscripción de una universidad pública se estima mediante la ecuación: , con $t \geq 0$, donde E(t) es la inscripción proyectada en t años. Si la inscripción cuando t = 0 es 2.000, calcule la inscripción que debe proyectarse para 15 años.
7. Salud pública. Una epidemia de gripe azota a una ciudad y se estima que la razón de cambio de las personas sin gripe con respecto al tiempo se calcula de $\frac{dW}{dt} = 400t - 12.000$. Encuentre W(t), o sea el número de personas que no padecen gripe en t días, si W(0) = 500.000. Después, calcule el número de personas que no padecen gripe 30 días después de haber empezado la epidemia.
8. Función de Utilidad. Si la utilidad marginal por producir q unidades se calcula mediante $U(q) = 50 - 0{,}04q$, U(0) = 0. Donde P(x) es la utilidad en dólares, encuentre la función de utilidad P y la utilidad sobre 100 unidades de producción.
9. Valor de reventa. El municipio de Mitú cuyo único medio de transporte hacia el interior del país es el aéreo, compró un aeroplano en U$300.000 para el uso oficial. El valor de reventa se espera que disminuya en un periodo de 16 años con una rapidez que varía con el tiempo, y se estima que es $v'(t) = \frac{-25}{\sqrt{t}}$ donde v(t) es el valor de reventa del aeroplano en millones de dólares después de t años. Observe que v(0) = 300.000 y encuentre v(t). También, calcule v(15), o sea el valor de reventa en miles de dólares después de 15 años.
10. Crecimiento urbano. Un área suburbana de Medellín se incorpora a la ciudad. La rapidez de crecimiento t años después de haberse incorporado se estima que es , con $0 \leq t \leq 9$. Si normalmente la población es de 5.000, ¿Cuál será la población dentro de 9 años?

å

RESPUESTAS

1. $C(q) = 10q + 12q^2 - q^3 + 4$,

   $\overline{C}(q) = 10 + 12q - q^3 + \frac{4}{q}$

2. $c = \frac{1}{2}x + 6$ en billones de dólares.

3. $R(q) = 15q - \frac{9}{2}q^2 - q^3$,

   $p = 15 - \frac{9}{2}q - q^2$

4. $R(q) = 10q - \frac{5}{2}q^2$, $p = 10 - \frac{5}{2}q$

5. $C = 0{,}5x + 0{,}5x^{2/3} + 6$

6. $E(t) = 12.000 - \dfrac{10.000}{\sqrt{t+1}}$; E(15) = 9.500 estudiantes.

7. $W(t) = 200t^2 - 12.000t + 500.000$, W(30) = 320.000

8. $P(x) = 50x - 0.02x^2$; P(100) = 4.800

9. $v(t) = 300 - 50\sqrt{t}$; v(15) = 106.000

10. 19.400

AUTOEVALUACIÓN

1. La integración tiene dos interpretaciones distintas; es un procedimiento inverso de la diferenciación o derivación y:
   a. Es un proceso similar al del cálculo de los límites a infinito.
   b. Es un proceso inverso de los límites cuando x tiende a cero.
   c. Es un método para determinar el área debajo de una curva.
   d. Es un método para calcular máximos y mínimos relativos.
   e. Es un proceso sistémico integrador de relaciones y elementos.
2. Los siguientes son métodos para calcular integrales indefinidas excepto uno. ¿Cuál?
   a. Integración por fracciones parciales.
   b. Integración por substitución.
   c. Integración por partes
   d. Integración sistémica u holística.
   e. Proceso general usando antiderivadas.
3. La función del costo promedio puede hallarse como:
   a. La derivada del costo dividida por el número de productos.
   b. La integral del costo marginal dividida por el número de productos.
   c. La antiderivada del ingreso marginal dividida por el número de productos.
   d. La integral del costo marginal dividida por el costo total.
   e. La antiderivada del costo marginal por el número de productos.
4. La función de demanda puede obtenerse como:
   a. La integral indefinida del ingreso marginal dividida por la cantidad producida.
   b. La integral indefinida del costo marginal dividida por la cantidad producida.
   c. La integral indefinida del costo promedio dividida por la cantidad producida.
   d. La integral indefinida del ingreso promedio dividida por la cantidad producida

å

AUTOEVALUACIÓN

e. La diferencia entre el costo marginal y el ingreso marginal.

5. La propensión marginal al consumo se entiende como:

   a. La relación entre la variación en el ahorro y la variación del ingreso.

   b. La relación entre la variación en el consumo y la variación del ingreso.

   c. La variación de la demanda que se presenta cuando varía la oferta.

   d. La derivada de la propensión marginal al ahorro.

   e. La integral indefinida de la propensión marginal al ahorro.

6. El valor de reventa es el valor monetario que posee un cierto bien después de determinado tiempo, ese tiempo debe:

   a. Ser mayor al de la vida útil.

   b. Ser igual al de la vida útil.

   c. Ser menor al de la vida útil.

   d. Ser igual al valor neto.

   e. Ser igual a la depreciación acumulada.

7. La porción que se ahorra de un peso adicional de renta se conoce como:

   a. Ahorro nacional per-cápita.

   b. Propensión marginal al ahorro.

   c. Propensión marginal al consumo.

   d. Ahorro marginal neto.

   e. Excedente del consumidor.

8. El proceso de integración por substitución se descompone en cuatro partes, excepto:

   a. Identificación del factor sustituyente y su derivada.

   b. Realización de la sustitución simbólica.

   c. Aplicación de la regla estándar de derivación.

   d. Racionalización de las expresiones.

   e. Aplicación de la sustitución a la inversa.

9. Una de las siguientes derivadas tiene siempre como resultado cero:

   a. De una función constante.

   b. De una constante por una función.

   c. De la excepción de la regla de la potencia.

   d. De la función exponencial.

   e. De la potencia de una función.

10. Una de las siguientes funciones es igual a una de sus antiderivadas.

   a. $f(x) = \text{Ln } x$.

   b. $f(x) = e^x$.

   c. $f(x) = x$.

   d. $f(x) = \text{Sen } x$.

   e. $f(x) = \text{Log } x$.

REFERENCIAS

Barnett Raymond A. *Matemáticas para Administración y Ciencias Sociales*. 2ª Edición. Nueva Editorial Interamericana. México, 1983.

Draper, Jean E.; Klingman, Jane S. *Matemáticas para Administración y Economía*. Editorial Harla. México, 1972.

Kutzler Bernhard; Kokol-Voljc Vlasta. *Introducción a Derive 5. La Herramienta de Matemáticas para su PC.* Texas Instruments. Traducción José Luis Llorens Fuster. Valencia, 2000.