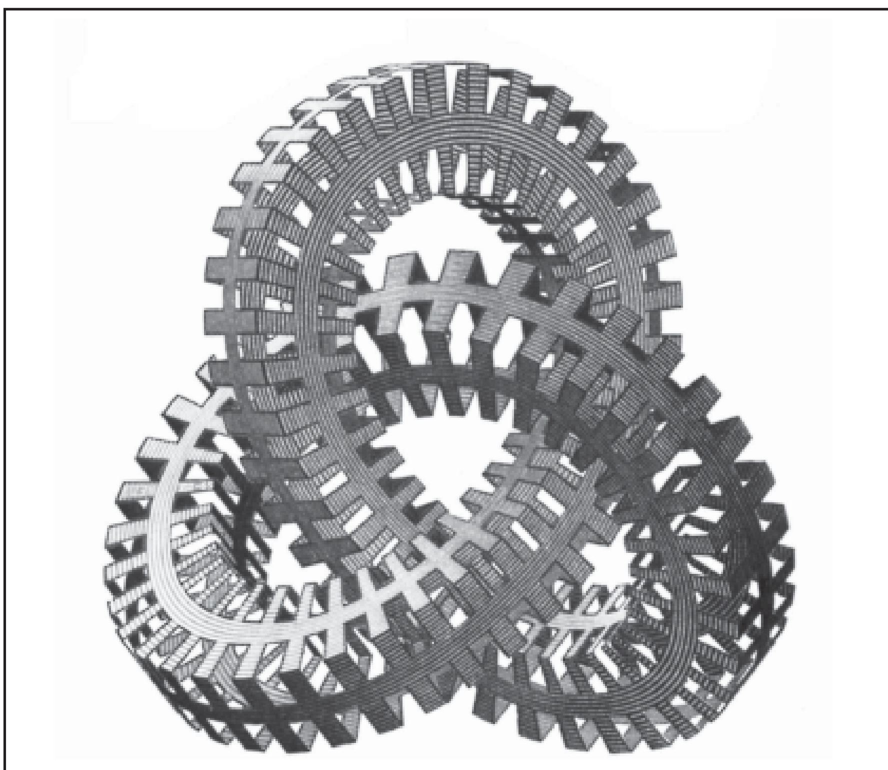
6 LA DERIVADA

Escuela Superior de Administración Pública

A muchos de los análisis económicos conciernen las medidas de cambios. La aplicación de cálculo a las relaciones económicas permite una medida precisa de los ritmos de cambios en las variables económicas. Por medio del entendimiento de los ritmos de cambio es posible aplicar reglas de decisiones para optimizar los diversos fenómenos económicos,entre otras: maximización de ganancias y minimización de costos.

La derivada de una función en un punto dado representa la razón de cambio de la función en ese punto. La derivada puede interpretarse geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la curva de la función que se está derivando.



M.C. Escher. *Nudos. Grabado en madera.*

PLAN DEL CAPÍTULO

Autor: José Miguel Cubillos Munca
Libro: Matemáticas I(versión corregida el 12/02/2008
Editor: ESAP Publicaciones
ISBN: 958-652-122-2 Año: 2002

OBJETIVOS GENERALES

- Repasar el concepto de derivada y los métodos de derivación de funciones aplicables al campo de la administración pública.
- Aplicar la derivada a problemas económicos de maximización de utilidades, producción e ingresos y minimización de costos y desutilidades.

1. DIFERENCIACIÓN

Cinco conceptos básicos en cálculo proveen la base para el análisis de problemas de optimización económica: límites, reglas de derivación, derivadas parciales, derivadas múltiples y reglas de máxima y mínima.

1.1 Derivada como un límite

La derivada nos indica la forma como cambia otra función. Matemáticamente se calcula como un límite especial que se presenta en la explicación siguiente. No siempre se calculan las derivadas a través del límite de su definición, por lo que se ha llegado a unas reglas nemotécnicas que abrevian el proceso de derivación y se conocen como reglas de derivación.

Historia. El concepto de derivada fue desarrollado por Leibniz y Newton. Leibniz fue el primero en publicar la teoría, pero parece ser que Newton tenía papeles escritos (sin publicar) anteriores a Leibniz. Debido a la rivalidad entre Alemania e Inglaterra, esto produjo grandes disputas entre los científicos proclives a uno y otro pais. Newton llegó al concepto de derivada estudiando las tangentes y Leibniz estudiando la velocidad de un móvil.

Explicación de la noción de derivada

En la figura 1, la magnitud del cambio en la función Y= $f(x)$ depende del cambio de x en x_0 y x_0 + Dx. Ese cambio de x es Dx, lo que causa que $f(x)$ cambie en la magnitud de $f(x_0$ + Dx) - $f(x_0)$ ó Dy.

Por razones que pronto parecerán obvias, el economista está interesado en que Dx sea un punto. Pero si Dx es un punto, eso implicaría que Dx=0, y no se espera que cero cambio en x cause un cambio en y diferente a cero. Este dilema se resuelve por medio de la aplicación del concepto de límites. En la figura 1 el punto de interés está en la pendiente de la curva que es el cambio en el rango de la función con respecto a la magnitud del cambio en el dominio de la función, o

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(X+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Si se presume que el cambio en el dominio es muy pequeño o aproximado a cero , el cociente anterior se podría modificar así

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta x} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

lo que indica que mientras Dx se aproxima a cero, el límite de la función $f(x)$ es $\frac{dy}{dx}$, una derivada. Y=$f(x)$ es una función primaria y $\frac{dy}{dx}$ es una función que se

➔

deriva de ella. El cociente $\frac{dy}{dx}$ es una función comúnmente llamada primera derivada y se escribe $f'(x)$.

Una derivada es el límite del cociente $\frac{dy}{dx}$ y por lo tanto debe ser una medida del ritmo de cambio, o, dicho más específicamente, un ritmo de cambio instantáneo. Mientras $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to$ al valor que es la pendiente de la curva en la figura 1.

El dilema expuesto por la medida de $\frac{dy}{dx}$ cuando x es un punto discreto, $\Delta x = 0$ es evitado considerando solo algunos cambios infinitesimales en x que induce a algunos cambios en y. Por lo tanto es común hablar de cambios relativos en y cuando Δx se aproxima a cero. Si Δx se acerca o alcanza a cero, y Δy es algun número arbitrario, la ración $\frac{dy}{dx}$ se aproximaría al infinito.

Como esto sería un problema para medir la pendiente de la función de la curva en algún punto, esto se resolvería mejor considerando solo casos en donde Δx se aproxime pero no alcance cero. Estos casos conllevan a límites de funciones que pueden ser derivadas usando ciertas reglas especiales.

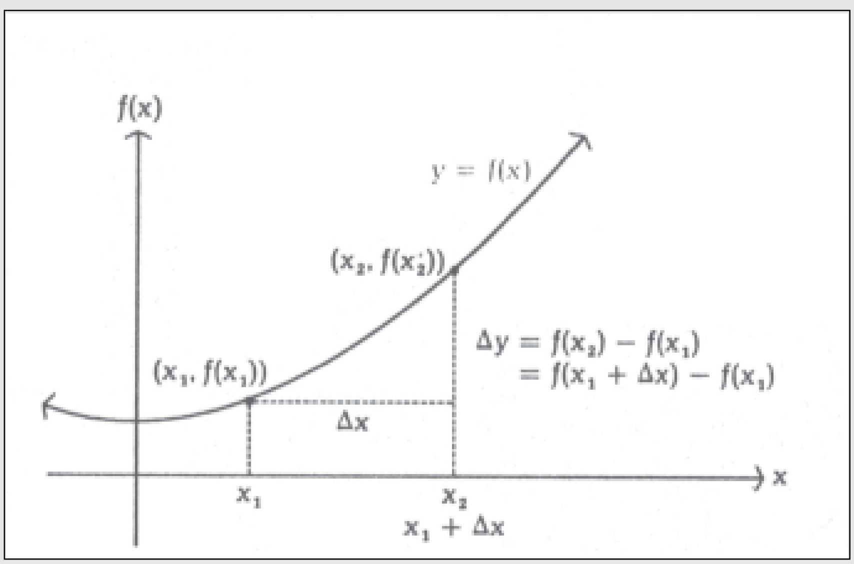


Figura 1. Incremento de una función.

2. REGLAS DE DERIVACIÓN

El procedimiento para derivar consiste en determinar primero en que casos la función total que va a ser derivada es una suma o una diferencia de funciones; un producto o un cociente de funciones; una función logarítmica, exponencial, o una función trigonométrica (las cuales no se estudian en este módulo por su escasa aplicabilidad a las ciencias económicas y administrativas); una potencia de una función; una función compuesta o alguna combinación de estas. Luego utilizando la regla apropiada para la función total y las reglas apropiadas para las diferentes partes de la función.

2.1 Regla de función exponencial

Para la función $y = x^n$, $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$. Véase el ejemplo 1.

a) **Regla constante.** Si la regla anterior es aplicada a la función y = a, entonces $\frac{dy}{dx} = 0$.

La primera derivada de esta función es cero porque y = a también se puede escribir y = ax^0. Como $x^0 = 1$, y = a*1. Entonces, la primera derivada de y = a^{x0} es $0ax^{0-1}$, o cero.

b) **Función de exponente generalizado**. Para la función y =

$y = ax^n$, $\frac{dy}{dx} = nax^{n-1}$.

2.2 Regla de Suma - Diferencia

La derivada de la suma o de la diferencia de dos o más funciones es la suma o la diferencia de sus derivadas individuales, ó

$$\frac{d[f(x) \pm g(x) \pm h(x)]}{dx} = f'(x) \pm g'(x) \pm h'(x).$$

Véase el ejemplo 2.

2.3 Regla de producto

La derivada del producto de dos funciones es igual al producto de la primera función por la derivada de la segunda función, más el producto de la derivada de la primera función por la segunda función, ó $\frac{d[f(x) \cdot g(x)]}{dx} = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$

Véase ejemplo 3.

EJEMPLO 1
DERIVADA DE LA EXPONENCIAL

a. Si y = x^2,

b. Si y = 15 + 5x - $4x^2$ + $0.5x^3$, $\frac{dy}{dx}$ = 5 - 8x + $1.5x^2$

c. Si y = $2x^3$, $\frac{dy}{dx} = 6x^2$.

EJEMPLO 2
DERIVADA DE UNA SUMA

Si Y = $24x^2$, $\frac{dy}{dx} = 48x$. Pero si y = $f(x) = 6x^2$ y Y = $g(x) = 18x^2$, entonces

$f'(x) = 12x$ y $g'(x) = 36x$

y $f'(x) + g'(x) = 48x$.

2.4 Regla del cociente

La derivada del cociente de dos funciones, $f(x)/g(x)$ es el producto del denominador por la derivada del numerador, menos el producto del numerador por la derivada del denominador, todo esto dividido por el cuadrado del denominador, ó

$$\frac{d[f(x)/g(x)]}{dx}=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}$$

Véase ejemplo 4.

2.5 Regla de función de cadena

Si y = $f(x)$, y x= h(z), la derivada de y con respecto a z, es igual a la derivada de y con respecto a x, por la derivada x con relación a Z, llamada también derivada interna ó

$\frac{dy}{dz}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dz}$. **Véase ejemplo 5.**

EJEMPLO 3
DERIVADA DE UN PRODUCTO

Si y = (x+2) ($2x^2$ - 4) sea $f(x)$ = (x+2) y g(x) = ($2x^2$ - 4),

entonces $=\frac{dy}{dx}=(x+2)4x+(1)(2x^2-4)$

= ($4x^2$ + 8x) + ($2x^2$ - 4)

= $6x^2$ + 8x - 4

Este resultado puede ser verificado obteniendo la derivada del producto de $f(x)$ y g(x):

Y = (x+2)($2x^2$ - 4)

= $2x^3$ + $4x^2$ - 4x - 8

y $\frac{dy}{dx}=6x^2+8x-4$

EJEMPLO 5
REGLA DE CADENA

Si y = 10 - $2x^2$ y x = -2 + z^2,

$$\frac{dy}{dz}=(-4x)\bullet(2z)=-8xz$$

Si ambas funciones son lineales como y = 10 - 2x, y x = -2 + z, la derivada de y con relación a z es una constante:

$$\frac{dy}{dz}=(-2)\cdot(1)=-2$$

Si , asuma que y = z^4x, z = $2x^2$ - 3x +7

Entonces $\frac{dy}{dz}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dz}$ $\left[4(2x^2-3x+7)^3\right](4x-3)$

Nota. Como estrategia nemotécnica, para la finalidad de este curso, consideraremos simplemente que la regla de la cadena consiste en no olvidar nunca aplicar la derivada interna, cuando estamos derivando una función compuesta. En especial en las derivadas de tipo exponencial y logaritmico suelen aparecer derivadas internas anidadas dentro de otra derivada interna!!!.

EJEMPLO 4
DERIVADA DE UN COCIENTE

Si $y=\frac{2x}{3x^2}$, $\frac{dy}{dx}=\frac{6x^2-12x^2}{9x^4}=\frac{-6x^2}{9x^4}$

Si la derivada es encontrada por medio de la regla del producto,

$y=\frac{2x}{3x^2}=(2x)(3x^2)^{-1}$,y

$$\frac{dy}{dx}=(2x)(-1)(3x^2)^{-2}(6x)+2(3x^2)^{-1}$$

$$=\frac{-12x^2}{(3x^2)^2}+\frac{2}{3x^2}=\frac{-12x^2+6x^2}{(3x^2)^2}$$

$$=\frac{-6x^2}{9x^4}=\frac{-2}{3x^2}$$

2.6 Regla de función inversa

Si la función y = f(x) es monótona, f(x) tendrá una función inversa x=f^{-1}(y). Sin embargo, f^{-1} no es lo mismo que $\frac{1}{f}$.

Una función está aumentando monótonamente si altos valores sucesivos de x producen sucesivamente altos valores de (y). Si altos valores de x están sucesivamente produciendo pequeños valores de y, entonces la función está disminuyendo monótonamente. Entonces la derivada de y con relación a x es $\frac{dy}{dx}$, y si la función es monótona, x = f^{-1}(y) y $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$. **Véase ejemplo 6.**

EJEMPLO 6
REGLA DE FUNCIÓN INVERSA APLICADO A LA ELASTICIDAD DE LA DEMANDA

Elasticidad de la demanda. Hay algunos bienes cuya demanda es muy sensible al precio, pequeñas variaciones en su precio provocan grandes variaciones en la cantidad demandada. Se dice de ellos que tienen demanda elástica. Los bienes que, por el contrario, son poco sensibles al precio son los de demanda inelástica o rígida. En éstos pueden producirse grandes variaciones en los precios sin que los consumidores varíen las cantidades que demandan. El caso intermedio se llama de elasticidad unitaria.

La elasticidad de la demanda se mide calculando el porcentaje en que varía la cantidad demandada de un bien cuando su precio varía en un uno por ciento. Si el resultado de la operación es mayor que uno, la demanda de ese bien es elástica; si el resultado está entre cero y uno, su demanda es inelástica.Supongamos que la función de demanda es presentada en una gráfica y es definida p = 10 - 2q. La primera derivada es $\frac{dp}{dq} = -2$, pero para el economista es de mayor interés la derivada inversa. ¿Por qué? Recordemos que la elasticidad de la demanda es igual al % de cambio en la cantidad demandada dividido por el % de cambio en el precio, o sea, $\frac{Eq_{x_1}}{Ep_{x_2}} = \frac{\frac{dq}{q}}{\frac{dp}{p}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp}$, que puede ser simplificado así $\frac{Eq}{Ep} = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp}$. Así que la función de demanda anterior también puede ser escrita como q= 5 - 0.5p y $\frac{dq}{dp} = -0.5$, la cual es la inversa de $\frac{dp}{dq} = -2$. Por lo tanto, un punto particular en la curva de demanda (p_0, q_0) tiene un punto de elasticidad de demanda de $\frac{Eq_o}{Ep_o} = \frac{p_o}{q_o} \cdot (-0.5)$.

2.7 Regla de Función Logarítmica

Los logaritmos son una herramienta importante para analizar los ritmos exponenciales de crecimiento. Una función como $y = a^x$ es lo mismo que loga y = x. Ya que manejar logaritmos base a puede parecer poco manejable, frecuentemente es más conveniente usar logaritmos naturales (ln), o logaritmos base e, en donde e es el número irracional 2.71828 y ln 1 = 0. Entonces, $y = e^x$ o ln y = x ln (e), y ln y = x ya que ln (e) = 1. Sí y= ln x, $x = e^y$, la derivada de la función logarítmica y = f(x) = ln x es $\frac{1}{x}$. **Véase ejemplo 7.**

2.8 Regla de Función Exponencial

Si $y = a^u$, donde u=f(x) entonces $\frac{dy}{dx} = a^u \ln a \frac{du}{dx}$. Para el caso especial en que a=e, entonces y = e^u, $\frac{dy}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$.

Véase ejemplo 8.

EJEMPLO 8
DERIVADA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

a. y = e^x, $\frac{dy}{dx} = e^x$. si y=$5e^{3x}$ ==>

b. y = e^{5x+3}, $\frac{dy}{dx} = e^{(5x+3)} \cdot 5 = 5e^{(5x+3)}$ $\frac{dy}{dx} = 5 \cdot e^{3x} \cdot 3 = 15e^{3x}$

Recuerde que La función exponencial es la recíproca de la función logaritmo natural.

Los logaritmos fueron ideados como una herramienta para facilitar el uso de las potencias y las raíces.El logaritmo de un número en una base dada, es el exponente de aquella base que produce como potencia a dicho número. El logaritmo en base 2 de 64 es 5; $\text{Log}_2 64=5$ por que si elevo $2^5=64$

El logaritmo neperiano es lo mismo que el logaritmo natural, se llama neperiano en honor a su descubridor John Neper y es el logaritmo de un número en base

e= 2,71828182…==> $\text{Log}_e X=\text{Ln } X$

EJEMPLO 7
FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Un ejemplo común de una función de demanda con elasticidad a través de todo es la hipérbola rectangular q = a/ p, en donde ***a*** es una constante positiva. La derivada de esta función expresa el ritmo de cambio en q con relación a un cambio de unidad en p, como también la elasticidad de precio de la demanda.

La derivada puede ser encontrada en dos reglas distintas:

Primero, la función puede ser expuesta como una función de potencia:

$q = ap^{-1}$ y, $\frac{dp}{dq} = -1 \cdot ap^{-2}$ y

$\frac{dp}{dq} = -\frac{-a}{p^2}$.

Segundo. La función $q = ap^{-1}$ puede ser expuesta en logaritmos como

$\ln q = \ln\left(\frac{a}{p}\right) = \ln a - \ln\ p$;

derivando a ambos lados tenemos:

$$\frac{d(\ln q)}{dq} = \frac{d(\ln a)}{dq} - \frac{d(\ln\ p)}{dq}$$

$$\rightarrow \frac{1}{q}\frac{dq}{dp} = 0 - \frac{1}{p} \rightarrow$$

reemplazando el valor de q:

$$\frac{p}{a}\frac{dq}{dp} = -\frac{1}{p} \rightarrow \frac{dq}{dp} = -\frac{a}{p^2}$$

la cual es el ritmo instantáneo de cambio proporcional en la función o la elasticidad del precio de la demanda.

2.9 Derivadas Parciales

Cuando una magnitud A es función de diversas variables (x, y, z, ...), es decir: $A = f(x, y, z, ...)$
se entiende como derivada parcial de A respecto de una variable a la expresión obtenida al derivar dicha función respecto de la variable considerada, suponiendo constantes las demás. Dada la función $A = 3x^3y + 2x^2y^2 - 7y$ la derivada parcial de A respecto de x es:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = 9x^{2y} + 4x^1y^2$$

mientras que con respecto de y es:

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 3x^3 + 4x^2y - 7$$

El mundo económico está compuesto principalmente de relaciones en donde una variable es una función de otras variables, y es necesario analizar la variación de una variable respecto de otra, ignorando a las demas. El considerar constante a las demás variables se conoce como «ceteris paribus». **Véase el ejemplo 9.**

2.10 Derivadas múltiples

Toda la discusión anterior sobre derivadas fue restringida a las "primeras" derivadas o al ritmo simple de cambio en una función. Las derivadas múltiples permiten la interpretación de las formas de las funciones sin un total apoyo en las técnicas gráficas y además permiten el desarrollo de criterio para determinar los puntos extremos de una función. Por lo tanto, la aplicación de las derivadas múltiples permite al economista resolver numerosos problemas de optimización, tales como encontrar: (1) el punto de producto máximo con respecto a uno o más productos; (2) el punto de utilidad máxima con respecto al nivel de producción; y (3) el nivel de producción en donde el costo promedio de producción es minimizado.

La «segunda derivada» de una función simplemente mide el ritmo de crecimiento de un ritmo de cambio de la función.

La «primera derivada» indica que la inclinación de esta función es positiva para todos los valores positivos de X y la segunda

EJEMPLO 9
DEPENDENCIA DE CAPITAL Y MANO DE OBRA

La cantidad de un producto básico demandado (*q*) es una función de precio (*p*) y varios "tergiversadores" de demanda, incluyendo el precio de un producto estrechamente relacionado (P_{CRG}) y de ingreso descartable (Y). Esta función puede ser declarada formalmente como

$q = A + Bp + Cp_{CRG} + DY$, en donde q es una función de tres variable independientes. En el análisis comparativo - estático frecuentemente es necesario analizar el ritmo de cambio de una variable independiente (*q*) con respecto al cambio en una variable independiente (tal como *p*) mientras que todas las otras variables se mantienen constantes. Este tipo particular del cociente de diferencia es una derivada parcial.

La derivación parcial es una función con variables independientes n (n > 2) trata n-1 de esas variables como constantes. Los términos que incluyen esas constantes son retenidas en la derivación si son multiplicativas pero no si son aditivas.

En la función de demanda de arriba la derivada de *q* con respecto a *p* es ahora una derivada parcial, denotada como: , porque todas las otras variable independientes o "constantes" n-1 aparecen sólo como términos aditivos.

En la función de producción:

$$q = A + Bk + Ck^2 + DL + EL^2 + GKL$$

en donde q es producto, K es capital y L es mano de obra

$$\frac{dq}{dk} = B + 2Ck + GL, \text{ y}$$

$$\frac{dq}{dL} = D + 2EL + GK.$$

El término, GLK, es comúnmente descrito como término de interacción. Describe la dependencia mutual de capital y mano de obra en la determinación del producto. Debería ser aparente que el producto físico marginal para uno de los insumos depende en el nivel de uso del otro insumo.

derivada indica que la inclinación de la función incrementa al incrementar los valores positivos de X. Por lo tanto, la función incrementa a un ritmo de incremento sobre todos los valores de X.

2.11 Reglas de Máxima y Mínima

Para poder encontrar los extremos relativos de una función, es necesario evaluar las primeras y segundas derivadas en los vecindarios del dominio de la función en donde la función es caracterizada por cumbres y hondonadas. La importancia práctica de esta afirmación puede ser más fácilmente comprendida al analizar una función clásica de producción de tres etapas.

La regla para encontrar el mínimo es la misma que para encontrar el máximo, excepto que la segunda derivada sería positiva cuando la función está al mínimo.

Función: $f(x)$, R(x), U(x), C(x)	La función puede ser una función algebraica cualquiera, como las funciones de ingreso, utilidad o costo totales o promedios.	La representación gráfica y la generación de tablas de valores nos puede indicar los valores críticos: máximos, mínimos y puntos de inflexión.
1ra Derivada: $f(x)$, R(x), U(x), C(x)	Al derivar las funciones correspondientes obtenemos otras que nos indican la forma de variación de las primeras. De derivar una función $f(x)$ obtenemos su razón de cambio. De derivar el ingreso total obtenemos el ingreso marginal, del costo marginal obtenemos el costo marginal y de la utilidad marginal obtenemos el la utilidad marginal.	Al reemplazar la primera derivada en un punto sabemos si la función inicial crecía (pendiente positiva) o decrecía (pendiente negativa). Ello nos permite acotar los puntos críticos. El igualar la derivada a cero, podemos obtener los puntos máximos y mínimos.
2da Derivada: $f(x)$, R(x), U(x), C(x)		Al reemplazar la segunda derivada en un punto podemos obtener la concavidad de la función inicial. Ello nos ayuda a determinar si hablamos de un máximo o de un mínimo. Igualando la segunda derivada a cero (no concavidad) encontramos el punto de inflexión.

3. APLICACIONES DE MAXIMOS Y MINIMOS

En la práctica surgen muchas situaciones en que deseamos maximizar o minimizar cierta cantidad. A veces se piensa que la cantidad de un producto se puede incrementar indefinidamente con la única restricción de su costo, sin embargo el aumentar la producción no siempre implica aumentos en el ingreso. La Ley de Retornos Decrecientes es representada a partir de un punto de inflexión en donde incrementos adicionales en X conducen a incrementos en TPP a un ritmo decreciente en lugar de crecientes.

EJEMPLO 10
CONSERVACIÓN ÓPTIMA

Un ecólogo cultiva peces en un lago. Entre más peces introduzca, habrá más competencia por el alimento disponible y el pez ganara peso en forma más lenta, De hecho, se sabe por experimentos previos que cuando hay *n* peces por unidad de área del lago, la cantidad promedio en peso que cada pez gana durante una temporada está dada por w = 600 - 30n gramos. ¿Qué valor de *n* conduce a la producción total máxima en el peso de los peces?

Solución

La ganancia en peso de cada pez es de w= 600 - 30 *n*. Puesto que hay *n* peces por unidad de área, la producción total por unidad de área, *P*, es igual a NW. Por consiguiente.

$P = n(600\text{-}30n) = 600n - 30n^2$

La gráfica de *p* contra *n* aparece en la figura 2. *p* es cero cuando *n* es cero dado que en ese momento no hay peces. A medida que *n* aumenta, *p* se incrementa hasta un valor máximo, luego decrece hasta cero otra vez cuando *n* = 20. Si *n* sigue creciendo *p* decrece porque para valores grandes de *n* los peces ganaran muy poco peso y algunos de ellos morirán, de modo que la producción total será pequeña.

Con el objeto de encontrar el valor de *n* para *p* máxima, derivamos y hacemos igual a cero la derivada d*p* / d*n*.

$$\frac{dP}{dn} = 600 - 60n$$

y d*p*/d*n* = 0 cuando 600 - 60 *n* = 0, esto es, la densidad de 10 peces por unidad de área es la que garantiza un peso total máximo de la producción de peces por periodo de tiempo. El valor máximo de *p* es

$P = 600(10) - 30(10)^2 = 3.000$, es decir 3.000 gramos por unidad. Es obvio que a partir de la gráfica de *p* como una función de *n* que el valor *n* = 10 corresponde al máximo de *p*. Sin embargo podemos verificarlo usando la regla de la segunda derivada.

$$\frac{d^2P}{dn^2} = -60$$

La segunda derivada es negativa (de hecho para todos los valores de *n*) por lo que el valor crítico *n*= 10 corresponde al máximo de *p*.

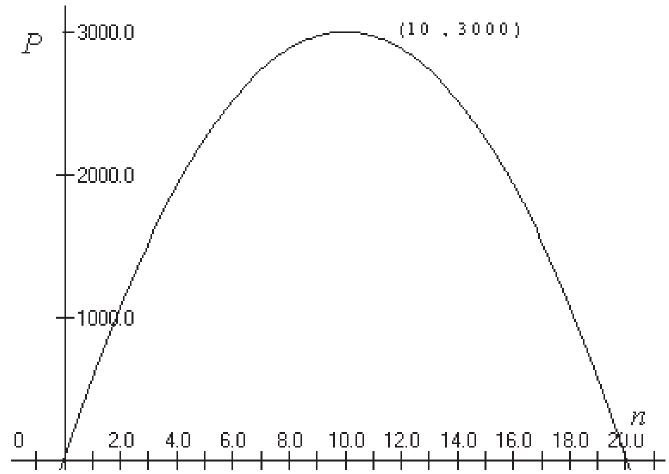


Figura 2. Modelo de conservación optima.

3.1 Planteamiento de los problemas

La solución de problemas de optimización como en los ejemplos 10 y 11, con frecuencia se encuentra que es una de las áreas más difíciles del cálculo diferencial. La principal dificultad surge cuando es necesario escribir el problema dado en palabras en ecuaciones. Una vez que las ecuaciones se han construido, por lo regular es rutinario completar la solución usando un poco de cálculo. Esta tarea de expresar problemas en palabras en términos de ecuaciones matemáticas ocurre a menudo en todas las ramas de las matemáticas aplicadas y es algo que el estudiante interesado en las aplicaciones deberá dominar en sus cursos de cálculo a fin de que sean de utilidad.

Infortunadamente, no es posible dar rápidas y contundentes reglas por medio de las cuales cualquier problema verbal puede reescribirse en ecuaciones. Sin embargo, existen algunos principios directores que contiene tener en mente.

Paso 1. Identifique todas las variables involucradas en el problema y denote cada una de ellas mediante un símbolo.
En el ejemplo 10, las variables eran n, el número de peces por unidad de área; w, la ganancia promedio en peso por pez, y P, la producción total de peso de los peces o por unidad de área. En el ejemplo 11, las variables eran los dos números X y Y, y p su producto.

Paso 2. Destaque la variable que ha de ser maximizada o minimizada y exprésela en términos de las otras variables del problema.
Volviendo al ejemplo 10, la producción total p se maximizó, y escribimos
P = nw, que expresa a p en términos de n y w. En el ejemplo 11, el producto p de x y y se maximizó y por supuesto P=xy

Paso 3. Determine todas las relaciones entre las variables. Exprese estas relaciones matemáticamente.
En el primer ejemplo, se daba la relación w =600-3n. En el segundo, la relación entre x y y es que su suma debía ser igual a 16, de modo que escribimos la ecuación matemática x + y = 16.

EJEMPLO 11

Este ejemplo es de naturaleza puramente matemática. Determine dos números cuya suma sea 16 de tal forma que su producto sea tan grande como sea posible.

Solución

Sean los dos números X Y, de modo que X + Y = 16. Si P= xy denota su producto, entonces necesitamos determinar los valores de X y Y que produzcan que p sea máximo. No podemos derivar p de inmediato, puesto que es una función de dos variables, X y Y. Sin embargo, estas dos variables no son independientes sino que están relacionadas por la condición X + Y = 16. Debemos usar esta condición a fin de eliminar una de las variables de P, dejando a p como función de una sola variable. Tenemos que Y = 16 - X y así

$$P = xy = x(16-x) = 16 - x^2$$

Debemos encontrar el valor de x que haga a p máximo.

$$\frac{dP}{dx} = 16 - 2x$$

Así que, dp/dx=0 cuando 16 - 2x = 0, esto es, sí x = 8. La segunda derivada

$d^2P/dx^2 = dx = 0 < 0,$ Y x=8 corresponde a un máximo de P.

Cuando x = 8, también y = 8, de modo que el valor máximo de p es igual a 64.

Paso 4. Exprese la cantidad por maximizar o minimizar en términos de las otras variables. Con objeto de hacer esto, se utilizan las relaciones obtenidas en el paso 3 a fin de eliminar todas excepto una de las variables.

Recurriendo de nuevo al ejemplo 10, teníamos que p = nw y w = 600 - 3n, de modo que, eliminado w, se obtiene p en términos de n; P= n(600 - 3n). En el ejemplo 11, tenemos que p = xy y x + y = 16, por lo que eliminando y, obtenemos p = x(16 - x).

Paso 5. Una vez que se ha expresado la cantidad requerida como una función de una variable, determine sus puntos crí-

EJEMPLO 12
COSTO MÍNIMO

En una obra con aporte principal de la comunidad, se ha de construir un tanque para almacenamiento de agua para una escuela pública, con una base cuadrada horizontal y lados rectangulares verticales. No tendrá tapa. El tanque debe tener una capacidad de 4 metros cúbicos de agua. El material con que se construirá el tanque tiene un costo de $10 por metro cuadrado. ¿Qué dimensiones del tanque minimizan el costo del material?

Solución

Paso 1. Las variables en el problema son las dimensiones del tanque y el costo de los materiales de construcción. El costo depende del área total de la base y de los lados los cuales determinan la cantidad de material usado en la construcción. Denotemos con x la longitud de un lado de la base y con y la altura del tanque. (véase la figura 3). La cantidad que debe minimizarse es el costo total de materiales, que denotamos con C.

Paso 2. C es igual al área del tanque multiplicada por $10, que es el costo por unidad de área. La base es un cuadrado con lado x, de modo que tiene un área igual a x^2. Cada lado es un rectángulo con dimensiones x *y* y, y tiene un área xy. El área total de la base más los cuatro lados es por tanto $x^2 + 4xy$. En consecuencia, escribimos:

$C = (x^2 + 4xy).10$ ➔

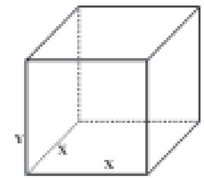


Figura 3.

Paso 3. Observe que la cantidad por minimizar está expresada como una función de dos variables, de modo que necesitamos una relación entre x y y a fin de eliminar una de éstas. Esta relación se obtiene del requerimiento establecido en el problema de que el volumen del tanque tiene 4 metros cúbicos. El volumen es igual al área de la base por la altura, esto es, x^2y, y así tenemos la condición $x^2y = 4$

Paso 4. Por el paso 3,

$y = 4/x^2$, y así

$C = 10[x^2 + 4x(4/x^2)] = 10[x^2 + 16/x]$

Paso 5. Podemos derivar la ultima expresión y determinar los puntos críticos de C.

$$\frac{dC}{dx} = 10(2x - \frac{16}{x^2}) = 0\ ;$$

de donde: $(x - \frac{8}{x^2}) = 0$

Así, $x - 8/x^2 = 0$, y por tanto $x^3 = 8$; es decir, x= 2.

La base del tanque debería tener en consecuencia un lado de 2 metros de longitud. La altura del tanque es ahora dada por

$y = 4/x^{2=}4/(2)^{2=1.}$

Es fácil verificar que $d^2C/dx^2 > 0$ cuando x = 2, de modo que este valor de x representa un mínimo local de C.

ticos e investigue si son máximos o mínimos locales.

3.2 Maximización de Utilidades

Una de las aplicaciones más importantes de la teoría de máximos y mínimos se da en las operaciones de empresas comerciales. Esto ocurre por una razón simple, es decir que una empresa selecciona su estrategia y nivel de operación en tal forma que maximice su utilidad. Así, pues si la administración de la empresa sabe como depende la utilidad de alguna variable que puede ajustarse, elegirán el valor de tal variable de modo que produzca la máxima utilidad posible.

Consideremos el caso en que la variable a ajustar es el nivel de producción, q (el número de unidades del producto de la empresa elaboradas por semana o por mes). Si cada unidad se vende a un precio p, el ingreso es $R(q) = pq$. El costo de producir q artículos depende de q, y se denota por $C(q)$, la función de costo. Se sigue que la utilidad es una función de x dada por
$U(q) = R(q) - C(q) = pq - C(q)$.

Deseamos elegir el valor de q que haga a p máxima.

En primer término abordemos el caso de una pequeña empresa que vende su producto en un mercado de libre competencia. En esta situación, el volumen de ventas q de esta empresa particular no afectara el precio del mercado para el artículo en cuestión. Podemos suponer que el precio p es constante, independiente de q, determinado por fuerzas económicas fuera de control de nuestra pequeña empresa. Los ejemplos 13 y 14 ilustran problemas de esta clase.

EJEMPLO 13
MAXIMIZACIÓN DE UTILIDADES

Una pequeña empresa manufacturera puede vender todos los artículos que produce a un precio de \$ 6 cada uno. El costo de producir q artículos a la semana (en dólares) es $C(q) = 1.000 + 6q - 0.003q^2 + 10^{-6}q^3$

¿Que valor de q debemos seleccionar con objeto de maximizar las utilidades?

Solución. El ingreso producido por la venta de q artículos a \$6 cada uno es $R(q) = 6q$ dólares. Por consiguiente, la utilidad por semana es

$$U(q) = R(q) - C(q)$$
$$U(q) = 6q - (1.000 + 6q - 0.003q^2 + 10^{-6}q^{3.})$$
$$U(q) = -1.000 + 0.003q^2 - 10^{-6}q^3$$

A fin de encontrar el valor máximo de U, buscamos los puntos críticos en la forma usual y luego investigamos su naturaleza. Derivando obtenemos

$$U'(q) = 0.006q - (3\times10^{-6})q^2$$

y haciendo $U'(q)=0$, encontramos que $q=0$ o $q= 2.000$. Podemos aplicar a cada uno de estos valores el criterio de la segunda derivada,identificando según concavidad:

$$U''(q) = 0.006 - (6\times10^{-6})q$$
$$U''(0) = 0.006 - (6\times10^{-6})\cdot 0 = 0.006$$
$$U''(2.000) = 0.006 - (6\times10^{-6})(2.000) = -0.006$$

de modo que $U''(0)= 0.006>0$ y $U''(2.000)=-0.006<0$

Así que en $q= 0$ hay un mínimo de $U(q)$, mientras que en $q = 2.000$ hay un máximo. Este último valor representa el nivel de producción en que la utilidad es máxima. Este valor en la ecuación original esta dado por:

$$U(2.000) = -1.000 + 0.003(2.000)^2 - 10^{-6}(2.000)^3 =$$
3.000 o \$ 3.000 por semana.

Se presenta una situación distinta en el caso de una gran empresa, única proveedora de un producto particular. que controla o monopoliza el mercado y puede elegir el precio de venta que desee para el producto. El volumen de ventas estará determinado por el precio a que se ofrece el producto (según la ecuación de demanda). Si escribimos la ecuación de demanda en la forma $p = f(q)$, se sigue que la función de ingreso es $R = qf(q)$. Luego, la función de utilidad es $U(q)$ = Ingreso - Costo = $qf(q) - C(q)$ y q debe elegirse de modo que maximice esta función.

EJEMPLO 14
DECISIONES SOBRE FIJACIÓN DE PRECIOS

En una cooperativa multiactiva, creada dentro del programa municipal de apoyo a las PYMEs el costo de producir *q* artículos por semana es $C(q) = 1.000 + 6q - 0.003q^2 + 10^{-6}q^3$.
En el caso del artículo en cuestión, el precio en que *q* artículos pueden venderse por semana está dada por la ecuación de demanda
P = 12 - 0,0015*q*.
Determine el precio y el volumen de ventas en que la utilidad es máxima.

Solución

El ingreso por semana es
R(*q*) = *pq* = (12 - 0.0015 *q*)*q*.
Luego, la utilidad esta dada por
U(*q*) = R(*q*) - C (*q*)

$$U = (12q - 0.0015q^2) - (1.000 + 6q - 0.003q^2 + 10^{-6}q^3)$$
$$U = -1.000 + 6q + 0.0015q^2 - 10^{-6}q^{3.}.$$
$$U'(q) = 6 + 0.003q - (3\times10^{-6})q^2 = 0$$

Con objeto de encontrar el valor máximo de U(*q*), hacemos U'(*q*) =0.
Cambiando signos, dividiendo entre 3 y multiplicando por 10^6 la ecuación completa, obtenemos $q^2 - 1.000q - 2\times10^6 = 0.$ Podemos factorizar el lado izquierdo como $(q-2.000)(q+1.000)=0$
y así las soluciones son *q*= 2.000 ó *q*= - 1.000. (Estas soluciones pudieron obtenerse también por medio de la formula cuadrática.)

La raíz negativa no tiene importancia practica desde el punto de vista económico, de modo que sólo se necesita considerar x= 2.000. Con objeto de verificar que está en realidad representa un máximo local de la función de utilidad, podemos comprobar que U" (2.000)<0. Esto es fácil.

$$U''(q) = 0{,}003 - (6x10^{-6})q \Rightarrow$$
$$U''(2.000) = 0.003 - (6x10^{-6})(2.000) = -0.009$$

Por tanto, el volumen de ventas de 2.000 por semana nos da la utilidad máxima. El precio por artículo que corresponde a este valor de *q es*:

U= 12 - 0,0015 q = 12 - 0,0015 (2.000) = 9

Siempre la utilidad, es la diferencia entre el ingreso y los costos:
U (*q*) = R(*q*) - C (*q*)
En consecuencia, suponiendo que todas las funciones son diferenciables,
U' (*q*) = R' (*q*) - C'(*q*).
Cuando la utilidad es máxima, U' (*q*) =0 y se sigue que R' (*q*) = C'(*q*).

Este resultado representa una importante conclusión general con respecto a la operación de cualquier empresa: en el nivel de producción en que la utilidad es máxima, el ingreso marginal es igual al costo marginal.

3.3 Optimización del gasto en publicidad

En un mercado de libre competencia en que muchas empresas elaboran productos similares a casi el mismo precio, el volumen de ventas puede incrementarse mediante la publicidad. Sin embargo, si se gasta demasiado dinero en publicidad, el gasto excederá la ganancia en el ingreso por el incremento de las ventas. De nuevo el criterio que debe usarse para decidir cuanto emplear en publicidad es que la ganancia debería ser máxima. **Véase el ejemplo 15.**

EJEMPLO 15
PUBLICIDAD Y GANANCIAS

La Electrificadora de Cundinamarca obtiene una utilidad de $5 por cada kilovatio que vende. Si gasta A dólares por semana en publicidad estimulando el uso de electrodomésticos, el número de kilovatios que vende por semana está dado por

$q = 2.000(1 - e^{-kA})$, en donde K = 0.001. Determine el valor de A que maximiza la utilidad neta.

Solución

La utilidad neta por la venta de *q* kilovatios es de 5*q* dólares, y de ésta restamos el costo de la publicidad. Esto nos deja una utilidad neta

U= 5*q* - A

$$U = 10.000(1 - e^{-kA}) - A.$$

Derivamos a fin de encontrar el valor máximo de P.

$\frac{dU}{dA} = 10.000(ke^{-ka}) - 1 = 10e^{-kA} - 1$ dado que K = 0.001. Haciendo esto igual a cero, obtenemos

$10e^{-KA} = 1$ o bien $e^{KA} = 10$

y tomando logaritmos naturales, resulta que

kA = 1_n 10 = 2.30

con tres cifras significativas. En consecuencia

$$A = \frac{2.30}{k} = \frac{2.30}{0.001} = 2.300$$

La cantidad optima que debe gastarse en publicidad es en consecuencia de $2.300 por semana.

La utilidad máxima se encuentra sustituyendo este valor A en la ecuación de utilidad U. Dado que $e^{-KA} = \frac{1}{10}$, se sigue que la utilidad semanal máxima es $U_{max} = 10.000(1 - \frac{1}{10}) - 2.300 = 6.700\ dólares$

EJEMPLO 16
MÁXIMA UTILIDAD E IMPUESTO SOBRE LA RENTA

Las funciones de costo y de demanda de una Empresa Industrial y Comercial del Estado EICE son:

C (q) = 5q y p= 25 - 2q, respectivamente.

a) Encuentre el nivel de producción que maximizará las utilidades de la EICE. ¿Cuál es la máxima utilidad?

b) Si se impone impuesto de t por cada unidad y la EICE lo carga en su costo, encuentre el nivel de producción que maximiza las utilidades de la empresa.

¿Cuál es la máxima utilidad?

C) Determine la tasa de impuesto por unidad t que debe imponerse para obtener un máximo impuesto sobre la renta.

Solución

Tenemos :
Ingreso = Precio x Cantidad
ó

$$R = pq = q(25-2q) = 25q-2q^2$$

a) Si p denota la función de utilidad entonces

$$U = R-C = 25q-2q^2-5q = 20q-2q^2$$

$$\frac{dU}{dq} = 20-4q$$

Para encontrar la utilidad máxima, dU/dq = 0, o 20 -4q = 0 o q = 5. También, dp/dq = -4 < 0. Así que las utilidades son máximas en el nivel de producción de q= 5 unidades. p max = 25 - 2 (5) = 15.

b) Si se impone un impuesto t por cada unidad, la nueva función de costo será

$$C_N = 5q+tq$$

y las ganancias estarían dadas por

$$U = R-C_N = 25q-2q^2 \rightarrow (5q+tq) = (20-t)q-2q^2.$$

Derivando la utilidad tenemos

$$\frac{dU}{dq} = 20-t-4q$$, la igualamos a cero para obtener el punto máximo.

$4q = 20-t$, de donde $q = 5-0{,}25t$. Su reto ahora será resolver el literal C.

3.3 Aplicaciones a los ingresos

Las siguientes aplicaciones se centran en la maximización de los ingresos. Recuerde que el dinero que entra a una organización por la venta de productos o la prestación de servicios recibe el nombre de ingreso. Y la manera más fundamental de calcular el ingreso total conseguido con la venta de un producto o servicio es

Ingreso total $R(q) = (\text{precio } p)(\text{cantidad vendida } q) = pq$

En esta relación se supone que el precio de venta es igual para todas las unidades vendidas.

EJEMPLO 17

La demanda estimada del producto dentro de un proyecto de desarrollo varía según el precio que le fije al producto. La compañía ha descubierto que el ingreso total anual R (expresado en miles de dólares) es una función del precio *p* (en dólares). En concreto,

$R = f(p) = -50p^2 + 500p$

Determine el precio que debería cobrarse con objeto de maximizar el ingreso total.

¿Cuál es el valor máximo del ingreso total anual?

Solución

En el capítulo 4 se dijo que la función de ingreso es cuadrática y que su gráfica es una parábola cóncava hacia abajo. En consecuencia el valor máximo de R ocurrirá en el vértice. La primera derivada de la función de ingreso es

$$f'(p) = -100p + 500$$

Si se hace f' igual a 0,

$-100p + 500 = 0$

$-100p = -500$

o un valor critico ocurre cuando $p = 5$

Existe un punto crítico en la gráfica de f, y se presenta cuando p = 5. Aunque sabemos que un máximo relativo ocurre cuando $p = 5$, verifiquemos formalmente esto por medio de la prueba de la segunda derivada:

$$f''(p) = -100 \quad y \quad f''(5) = -100 < 0$$

Por consiguiente, un máximo relativo ocurre en f cuando $p = 5$.

El valor máximo de R se calcula sustituyendo $p = 5$ en f, o sea

$f(5) = -1.250 + 2.500 = 1.250$

Así pues, se espera que el ingreso total anual se maximice en $1.250 (miles), es decir, $ 1,25 millones cuando la empresa cobre $ 5 por unidad. La figura 6.4 muestra una gráfica de la función de ingreso.

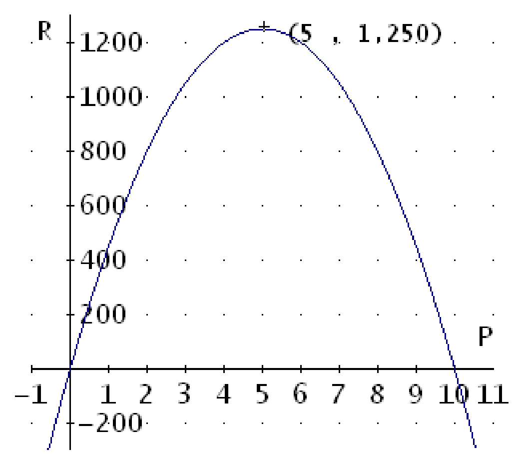


Figura 4. Función cuadrática del ingreso

EJEMPLO 18
ADMINISTRACIÓN DEL TRANSPORTE PÚBLICO

La empresa Metro de Medellín ha aprobado la estructura de tarifas que rige el sistemas de automóviles públicos de la ciudad. Se abandonó la estructura de tarifas por zona en la cual la tarifa depende del número de zonas por las cuales cruza el pasajero. El nuevo sistema tiene tarifas fijas: el pasajero puede viajar por el mismo precio entre dos puntos de la ciudad.

Las autoridades de tránsito han contratado una encuesta a ciudadanos con el Centro Nacional de Consultoría a fin de determinar en número de personas que utilizarían el sistema metro si la tarifa fija admitiera diferentes importes. Basándose en los resultados de la encuesta, los analistas de sistemas han determinado una función aproximada de la demanda, la cual expresa el número diario de pasajeros en función de la tarifa. En concreto, la función de demanda es

$q = 10.000 - 125\,p$

donde q representa el número de pasajeros por día y p la tarifa en centavos de dolar.

a) Determine la tarifa que se cobraría con objeto de maximizar el ingreso diario por la tarifa de los autobuses.

b) ¿Cuál es el ingreso máximo esperado?

¿Cuántos pasajeros por día se esperaban con esta tarifa?

Solución

a) El primer paso es determinar una función que exprese el ingreso diario según la tarifa p. Se escoge p como variable independiente porque se quería determinar la tarifa que produciría el ingreso máximo total. Por otra parte, la tarifa es una variable de decisión, aquella cuyo valor puede fijar la administración de las autoridades de tránsito.

La expresión general del ingreso total, es como se señaló antes,

$R = pq$

Pero en esta forma R se expresa en función de dos variables: p y q. En este momento no podemos tratar de la optimización de funciones con más de una variable independiente. Sin embargo, la función de demanda establece una relación entre las variables p y q que permiten transformar dicha función en una en que R se expresa en función de la variable independiente p. El miembro derecho de la función de demanda es una expresión formulada en términos de p que equivale a q. Si con esta expresión se sustituye q en la función de ingreso, se obtiene

$R = f\,(p)$

$R = p\,(10.000 - 125\,p)$

o bien

La primera derivada es

$f'(p) 10.000 - 250\,p$

Si la derivada se hace igual a 0,

$10.000 - 250\,p = 0$

$10.000 = 250\,p$

y un valor crítico ocurre cuando $40 = p$

La segunda derivada se obtiene y evalúa cuando p = 40 para determinar la naturaleza del punto crítico:

$f''(p) = -250$

$f''(40) = -250 < 0$

Así pues, ocurre un máximo relativo para f cuando p = 40. La interpretación de este resultado es que el ingreso diario se maximizará cuando se cobre una tarifa fija de $ 0.40 (40 centavos de dólar)

b)

$= 400.000 - 200.000 = 200.000$

Dado que la tarifa se expresa en centavos, el máximo ingreso diario esperado será de 200.000 centavos o sea $2.000.

El número de pasajeros que se espera diariamente con esta tarifa se calcula sustituyendo la tarifa en la función de demanda, es decir,

$q = 10.000 - 125\,(40)$

$q = 10.000 - 5.000$

5.000 pasajeros por día

La figura 5. contiene una gráfica de la función de ingreso diario.

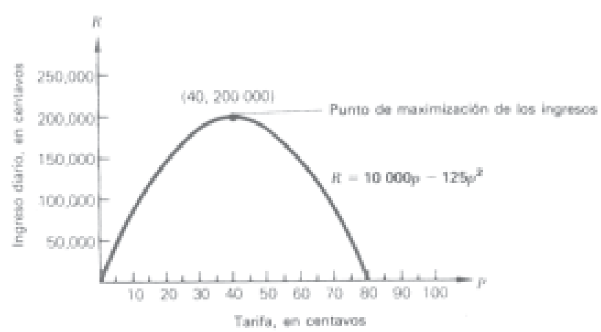


Figura 5. Gráfica de la función cuadrática del ingreso

3.4 Aplicaciones a los costos

Los costos representan salidas de efectivo para la organización. La mayor parte de las empresas buscan el modo de reducirlas al mínimo. En la presente sección se dan aplicaciones que se refieren a la minimización de alguna medida de costo.

Ejemplo 19

Administración de Inventario

Un problema común de las organizaciones es determinar que cantidad de un artículo deberá conservarse en almacén. Para los minoristas, el problema se relaciona a veces con el número de unidades de cada producto que ha de mantenerse en inventario. Para los productores consiste en decidir que cantidad de materia prima debe estar disponible. Este problema se identifica con un área o especialidad denominada control o administración de inventario. Por lo que respecta a la pregunta de cuánto inventario ha de conservarse se debe tener en cuenta el hecho de tener demasiado poco o mucho inventario puede acarrear costos.

Un minorista de bicicletas motorizadas ha analizado los datos referentes a los costos habiendo determinado una función de costo que expresa el costo anual de comprar, poseer y mantener el inventario en función del tamaño (número de unidades) de cada pedido de bicicletas que coloca. He aquí la función de costo:

$$C = f(q) = \frac{4.860}{q} + 15q + 750.000$$

donde C es el costo anual del inventario, expresado en dólares y *q*, denota el número de bicicletas ordenadas cada vez que el minorista repone la oferta.

a) Determine el tamaño de pedido que minimice el costo anual del inventario.

b) ¿Cuál se espera que sea el costo mínimo anual del inventario?

Solución

a) la primera derivada es

$f'(q) = -4.860q^{-2} + 15$,si f' se hace igual a 0,

$$-4.860q^{-2} + 15 = 0$$

cuando

$$\frac{-4.860}{q^2} = -15$$

La multiplicación de ambos miembros por q^2 y su división entre - 15 producen

$\frac{4.860}{15} = q^2$, de donde

y un valor crítico existe en 18=q

La naturaleza del punto critico se comprueba al obtener f'':

$$f''(q) = 9.720q^{-3} = \frac{9720}{q^3}$$

Al evaluar el valor crítico se obtiene

$$f''(18) = \frac{9.720}{(18)^3}$$

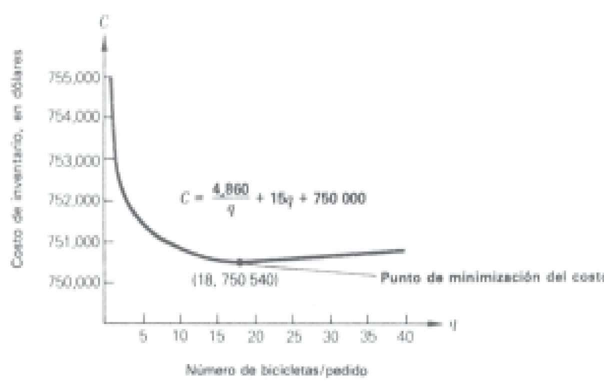
=1.667>0

Los costos anuales del inventario se minimizarán cuando se pidan 18 bicicletas cada vez que el minorista reponga las existencias.

b) Los costos anuales mínimos del inventario se determinan calculando f(18), o sea

$$f(18) = \frac{4.860}{18} 15(18) + 750.000$$

=270+270+750.000=$750.540



EJEMPLO 20
MINIMIZACIÓN DEL COSTO PROMEDIO POR UNIDAD

El costo total de la producción de q unidades de cierto producto se describe por medio de la función

$$c = 100.000 + 1.500q + 0.2q^2$$

donde C es el costo total expresado en dólares. Determine cuántas unidades q deberían fabricarse a fin de minimizar el costo promedio por unidad.

Solución

El costo promedio por unidad se calcula dividiendo el costo total entre el número de unidades producidas. Por ejemplo, si el costo total de la fabricación de 10 unidades de un producto es de \$ 275, el costo promedio por unidad será 275/10 = \$ 27.50. Así pues, la función que representa el costo promedio por unidad en este ejemplo es

$$\overline{C} = f(q) = \frac{c}{q} = \frac{100.000}{q} + 1.500 + 0{,}2q$$

La primera derivada de la función del costo promedio es

$$f'(q) = -100.000q^{-2} + 0.2$$

Si f' se hace igual a 0,

$$0.2 = \frac{100.00}{q^2}$$, o bien

$$q^2 = \frac{100.000}{0.2} = 500.000$$

Al obtener la raíz cuadrada de ambos miembros, se tiene un valor crítico de

q= 707,11 (unidades)

La naturaleza del punto crítico se determina por medio de la prueba de la segunda derivada:

$$f''(q) = 200.000q^{-3}$$

$$= \frac{200.000}{q^3}$$

= 0.00056>0

Por tanto, un mínimo relativo ocurre para f cuando q = 707.11. Este costo promedio mínimo por unidad es

$$f(707.11) = \frac{100.000}{707.11} + 1.500 + 0.2(707.11)$$

= 141.42 + 1.500 + 141.42= \$1782.84

La figura 7. es una gráfica de la función de

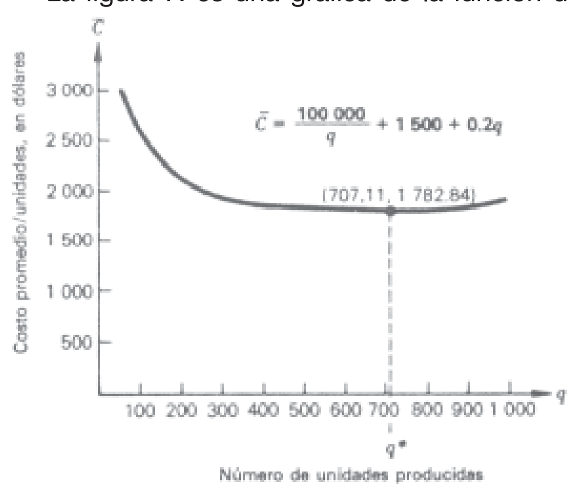


Figura 7. Gráfica de la función del costo promedio.

EJERCICIO 1

- En el ejemplo 20, ¿cuál es el costo total de fabricación en este nivel de producción? ¿Cuáles son las dos formas en que puede calcularse esta cita?

  (Respuesta: \$1.260, 663,90)

EJEMPLO 21
ASIGNACIÓN DE LA FUERZA DE VENTAS

Una importante compañía que vende cosméticos y productos de belleza y que se especializa en la venta domiciliaria (casa por casa) descubrió que la respuesta de las ventas a la asignación de más representantes se ajusta a la ley de los rendimientos decrecientes. En un distrito regional de ventas, la compañía ha averiguado que la utilidad anual P, expresada en cientos de dólares, es una función del número de representantes x asignados a ese distrito. Específicamente, la función que relaciona esas dos variables es la siguiente:

$$p = f(x) = -12.5x^2 + 1.375x - 1.500$$

a) ¿Qué número de representantes producirá la utilidad máxima en el distrito?

b) ¿Cuál es la utilidad máxima esperada?

Solución

a) La derivada de la función de utilidad es

$f'(x) = -25x + 1.375$

Si f' se hace igual a 0,

$-25x = -1.375$

o bien, ocurre un valor crítico cuando x = 55

Al comprobar la naturaleza del punto crítico se obtiene

$f''(x) = -25$ y $f''(55) = -25 < 0$

Así pues , un máximo relativo ocurre para f cuando x = 55

b) La utilidad máxima esperada es $f(55) = -12.5\,(55)^2 + 1.375\,(55) - 1500$

$= 37.812.5 + 75.625 - 1.500 = 36.312.5$

Podemos concluir que la utilidad anual será maximizada en un valor de \$36.312.5 (cientos), es decir \$ 3'631.250 si se asignan 55 representantes al distrito. La figura 8. ofrece una gráfica de la función de utilidad.

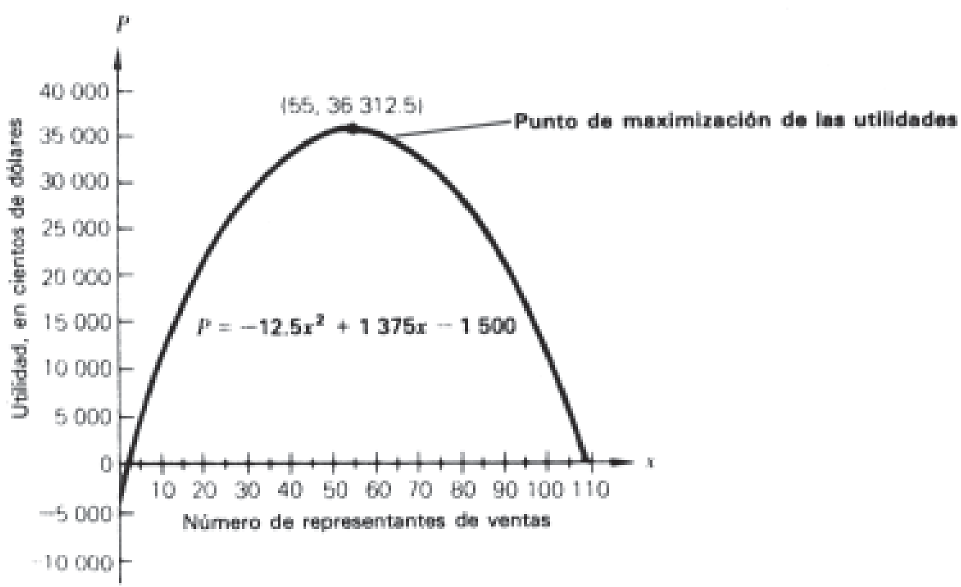


Figura 8. Gráfica de la función de utilidad.

EJERCICIO 2

- ¿Qué representan en la figura 8 las intersecciones con el eje x? Interprete el significado de la intersección con el eje Y. Explique la ley de rendimientos decrecientes en su aplicación a la forma de esta función de utilidad.

EJEMPLO 22
ENERGÍA SOLAR

Un fabricante ha ideado un nuevo diseño de los paneles solares para las zonas de Colombia con difícil acceso. Según los estudios de mercadotecnia que se han realizado, la demanda anual de los paneles dependerá del precio al que se venden. La función de su demanda ha sido estimada así:

q = 100.000 - 200*p*

donde q es el número de paneles demandados al año y p representa el precio en dólares . Los estudios de ingeniería indican que el costo total de la producción de q paneles está representado muy bien por la función

$$C = 150.000 + 100q + 0.003q^2$$

Formule la función de utilidad U = *f* (*q*) que exprese la utilidad anual U en función del número de unidades *q* que se producen y venden.

Solución

Se nos ha pedido desarrollar una función que exprese la utilidad U en términos de *q*. A diferencia del ejemplo 21, hay que construir la función de utilidad. Tenemos la ecuación de la función del costo total formulado en términos de *q*; por tanto, ese componente de la función de utilidad ya está disponible. No obstante, se necesita formular una función del ingreso total expresada en términos de *q*.

Una vez más debe recordarse la estructura básica para calcular el ingreso total:

R = *pq*

Como queremos que R se exprese en términos de *q*, necesitamos reemplazar *p* en la ecuación por una expresión equivalente que puede derivarse de la función de demanda. Al despejar *p* en la ecuación de demanda, se obtiene

200*p* = 100.000 - *q*

o bien, *p* = 500 - 0.005*q*

Puede sustituirse el miembro derecho de esta ecuación en la ecuación R= *p*-*q* para producir la función de ingreso R = (500 - 0.005*q*)*q*= $500q - 0.005q^2$

Ahora que las funciones de ingreso y de costo han sido expresadas en términos de *q*, es posible definir la función de utilidad como

U= *f*(*q*) = R - C

$$= 500q - 0.005q^2 - (150.000 + 100q + 0.003q^2)$$

$$500q - 0.005q^2 - 150.000 - 100q - 0.003q^2$$

o bien $U = -0.008q^2 + 400q - 150.000$

EJERCICIO 3

- En el ejemplo 22, determine 1) el número de unidades *q* que deberían producirse para maximizar la utilidad anual; 2) el precio que tendría que cobrarse por cada panel para generar una demanda igual a la respuesta de la parte 1), y 3) la máxima utilidad anual.

EJEMPLO 23
DOMINIO RESTRINGIDO

En el ejemplo 22 suponga que la capacidad de producción anual del fabricante es de 20.000 unidades. Resuelva de nuevo el ejemplo 22 con esta restricción adicional.

Solución

Con la restricción adicional, el dominio de la función se define como. Recuerde que se deben comparar los valores de f (q) en los puntos finales del dominio con los de f(q*) para cualquier valor q* donde $0 \leq q^* \leq 20.000$.

El único punto crítico en la función de utilidades ocurre en q = 25.000, que se encuentra fuera del dominio. Por ello, la utilidad será maximizada en uno de los puntos finales. Al evaluar $f(q)$ en ellos se obtiene

f (0) = 150.000 y

$$f(20.000) = -0,008(20.000)^2 +$$

$$400(20.000) - 150.000$$

= 3.200.000 + 8.000.000 - 150.000 = 4.650.000

La utilidad sé maximiza en un valor de $ 4.650.000 cuando q = 20.000 o cuando el fabricante opera a toda su capacidad.

El precio que debería fijarse se calcula sustituyendo q = 20.000 en la ecuación P=500 - 0.005q, o sea

P= 500 - 0.005 (20.000) = 500 - 100 = $ 400

La figura 9. contiene una gráfica de la función de utilidad.

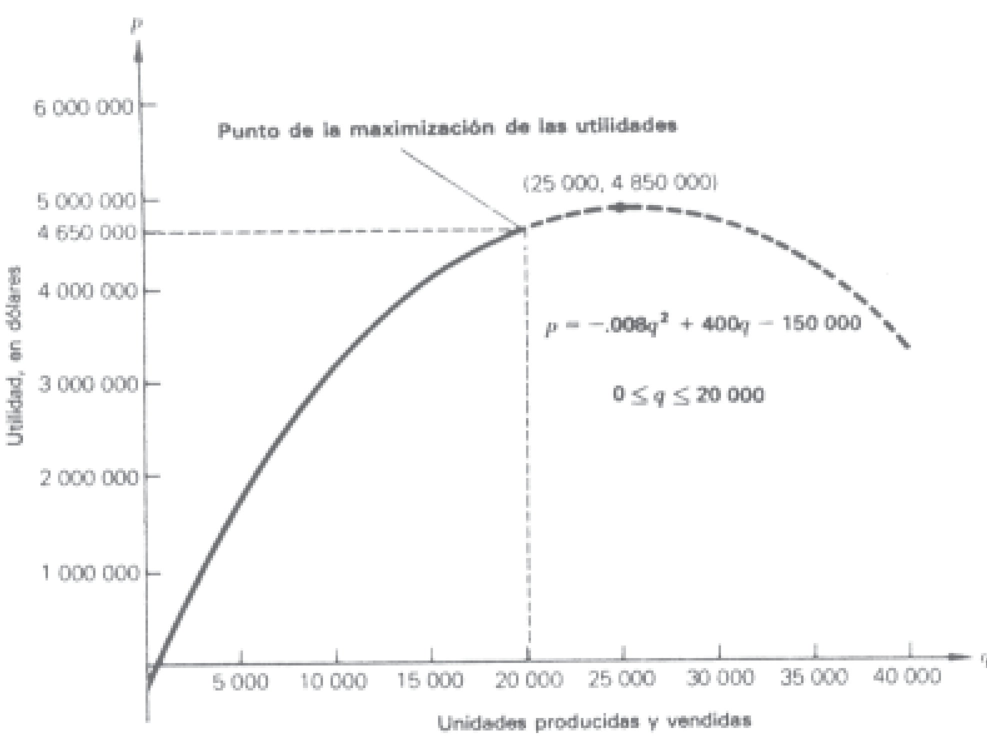


Figura 9. Dominio restringido de la función de utilidad.

3.5 Aproximación marginal a la maximización de utilidades

Otro método para calcular el punto de maximización de utilidades es el análisis marginal. Este método que goza de gran aceptación entre los economistas, examina los efectos incrementales en la rentabilidad. Si una firma está produciendo determinado número de unidades al año, el análisis marginal se ocupa del efecto que se refleja en la utilidad si se produce y se vende una unidad más.

3.6 Condiciones para usar la aproximación marginal

Para que este método pueda aplicarse a la maximización de utilidades, es preciso que se cumplan las siguientes condiciones:

l Deberá ser posible identificar por separado las funciones de ingreso total y de costo total.

ll. Las funciones de ingreso y costo habrán de formularse en términos del nivel de producción o del número de unidades producidas y vendidas.

3.7 Ingreso marginal

Uno de los dos conceptos más importantes del análisis marginal es el del ingreso marginal. El ingreso marginal es el ingreso adicional que se consigue al vender una unidad más de un producto o servicio. Si cada unidad de un producto se vende al mismo precio, el ingreso marginal será siempre igual al precio. **Véase ejemplo 24.**

EJEMPLO 24

La función lineal de ingreso $R = 10q$, representa una situación donde cada unidad se vende a \$10. El ingreso marginal logrado con la venta de una unidad más es de \$10 en cualquier nivel de producción q.

En el ejemplo 22 una función de demanda para los paneles solamente se expresó así:

$q = 100.000 - 200\,p$

A partir de esta función de demanda se formuló la función no lineal de ingreso total

$$R = f_1(q) = 500q - 0.005q^2$$

El ingreso marginal en este ejemplo no es constante. Esto se mostró al calcular el ingreso total para distintos niveles de producción. La tabla contiene estos cálculos para algunos valores de q. La tercera columna representa el ingreso marginal asociado al paso de un nivel de producción a otro. Nótese que, si bien las diferencias son ligeras, los valores del ingreso marginal están cambiando en cada nivel de producción.

Para una función del ingreso total $R(q)$, la derivada $R'(q)$ representa la tasa instantánea de cambio en el ingreso total con un cambio del número de unidades vendidas. R también representa una expresión general de la pendiente de la gráfica de la función del ingreso total. En el análisis marginal, la derivada se emplea para representar el ingreso marginal, es decir, $MR = R'(q)$

La derivada, ofrece una aproximación a los cambios reales

Cálculo del ingreso marginal

Nivel de producción q	Costo total $f_1(q)$	Costo marginal $\Delta C = f_1(q) - f_1(q-1)$
100	\$49.950.00	
101	\$50.448,995	\$498,995
102	\$50.947,98	\$498,985
103	\$51.446,955	\$498.975

que se dan en el valor de una función. Por consiguiente, R puede emplearse para aproximar el ingreso marginal obtenido con la venta de la siguiente unidad. Si se calcula el ingreso marginal R' para la función del ingreso cuya ecuación es $R=500q-o.oo5q^2$, se obtiene

$R'(q) = 500 - 0.010q$

Para aproximar el ingreso marginal logrado con la venta de la centésima primera unidad se evalúa R cuando $q = 100$, o sea

$R'(q) = (100) = 500 - 0.010\,(100)$

$= 500 - 1 = 499$

Y ésta es una aproximación muy cercana al valor real (\$ 498.995) del ingreso marginal que aparece en la tabla.

3.8 Costo marginal

El otro concepto central del análisis marginal lo constituye el costo marginal. El costo marginal es el costo adicional en que se incurre al producir y vender una unidad más de un producto o servicio. Las funciones lineales del costo suponen que el costo variable por unidad sea constante; en ellas el costo marginal es el mismo en cualquier nivel de producción. **Véase ejemplo 25.**

EJEMPLO 25
COSTO MARGINAL

Un ejemplo de ello es la función de costo:

$C = 150.000 + 3.5q$

donde el costo variable por unidad es $3.50.

Una función no lineal de costo caracteriza por costos marginales variables. Esto se ejemplifica en la función de costo

$$C = f_2(q) = 150.000 + 100q + 0.003q^2$$

que se utilizó en el ejemplo 22. Puede mostrarse que los costos marginales realmente fluctúan en distintos niveles de producción si se calculan los valores de esos costos para algunos valores de q. Este cálculo se da en la tabla siguiente.

En una función de costo total c, la derivada C'(q) representa la tasa instantánea de cambio del costo total suponiendo que

Cálculo del costo marginal

Nivel de producción q	Costo total $f_2(q)$	Costo marginal $\Delta C = f_2(q) - f_2(q-1)$
100	$160.030,00	
101	$160.030,603	$100.603
102	$160.231,212	$100.609
103	$160.331,827	$100.615

haya un cambio en el número de unidades producidas. C'(q) representa además una expresión general para la pendiente de la gráfica de la función del costo total. En el análisis marginal, la derivada se usa para representar el costo marginal, esto es

$MC = C'(q)$

Como en el caso de R', C' puede emplearse para aproximar el costo marginal asociado a la producción de la siguiente unidad. La derivada de la función de costo es

$C'(q) = 100 + 0.006q$

Para aproximar el costo marginal debido a la producción de la centésima primera unidad, se evalúa C en $q = 100$, o sea

$C'(100) = 100 + 0.006\,(100)$

$= \$\,100.60$

Si se compara este valor con el verdadero ($100.603) en la tabla, se advierten que ambos están muy cercanos entre sí.

3.9 Análisis de la utilidad marginal

Este análisis se ocupa del efecto que se opera en las utilidades si se produce y vende una unidad adicional. Mientras el ingreso adicional conseguido con la venta de la siguiente unidad sea mayor que el costo de producirla y venderla, habrá una utilidad neta con su producción y venta, aumentando también la utilidad total. Pero si es menor que el costo de producir y vender la unidad adicional, habrá una pérdida neta en esa unidad y disminuirá la utilidad total.

Regla práctica

A continuación se da una regla práctica para saber si ¿Debe o no producirse una unidad adicional?

I Si MR > MC, se producirá la siguiente unidad.
II Si MR < MC, no se producirá la siguiente unidad.

En muchas situaciones de producción, el ingreso marginal rebasa al costo marginal en niveles más bajos de producción. A medida que aumenta el nivel de producción (cantidad producida), disminuye la cantidad en que el ingreso marginal excede al costo marginal. Con el tiempo se llega a un nivel en que MR = MC. Más allá de este punto MR < MC, y la utilidad total empieza a disminuir al incrementarse la producción. Así pues, desde un punto de vista teórico, si puede identificarse el punto donde la última unidad producida y vendida MR = MC, la utilidad total será maximizada. Este nivel de producción que maximiza la utilidad puede identificarse por medio de la siguiente condición:

EJEMPLO 26
APROXIMACIÓN MARGINAL

Resolver de nuevo el ejemplo 22 por medio de la aproximación marginal.

Solución

En el ejemplo 22

$$R = 500q - 0.005q^2$$

$$C = 150.000 + 100q + 0.003q^2$$

Las funciones de ingreso y costo son distintas y ambas se expresan en términos del nivel de producción q, las dos condiciones para efectuar el análisis marginal quedan satisfechas. Ya se ha determinado que

$R'(q) = 500 - 0.01q$

y $C'(q) = 100 + 0.006\,q$

Por tanto, $R'(q) = C'(q)$

Cuando $500 - 0.01q = 100 + 0.006\,q$

$-0.016q = -400$

$q = 25.000$

Puesto que $R''(q) = -0.01$ y $C''(q) = 0.006$

$R''(q^*) < C''(q^*)$

o, $-0.01 < 0.006$

y hay un máximo relativo en la función de utilidad cuando q = 25.000. La figura 10. presenta las gráficas de R(q) y C(q).

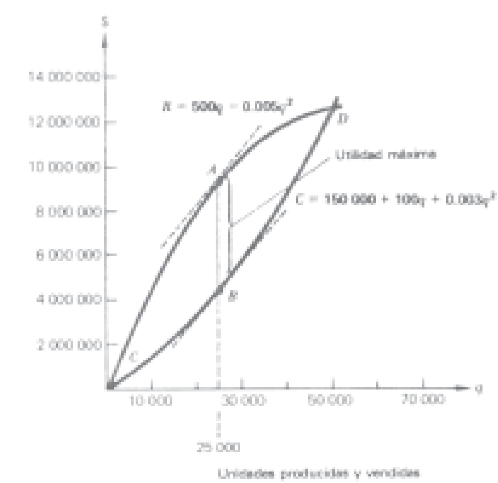


Figura 10. Análisis marginal: maximización de utilidades.

3.10 Criterio de maximización de las utilidades

Se producirá hasta alcanzar el nivel de producción en que el costo marginal es igual al ingreso marginal, MR = MC

Expresado en términos de las derivadas, el criterio anterior recomienda producir hasta el punto donde R’ (q) = C' (q)

Esta ecuación es un resultado natural de la diferenciación de la ecuación de utilidad

$$U(q) = R(q) - C(q)$$

y de hacer la derivada igual a 0:

$U'(q) = R'(q) - C'(q)$ y $U'(q) = 0$

cuando $R'(q) - C'(q) = 0$ o bien $R'(q) = C'(q)$

Además en esta situación la razón de cambio del costo marginal excede a la razón de cambio del ingreso marginal, es decir $R''(q) < C''(q)$, entonces el criterio de la segunda derivada establece que la función de utilidad se maximiza.

Examinemos detenidamente la figura 10, ejemlplo 26 y hagamos las siguientes observaciones:

1. C y D representan los puntos donde se intersecan las funciones de ingreso y de costo, es decir representan puntos de equilibrio.
2. Entre los puntos C y D, la función de ingreso se halla arriba de la de costo, lo cual indica que el ingreso total es mayor que el costo total y que se lograrán utilidades dentro de este intervalo. Para los niveles de producción a la derecha de D, la función de costo se halla arriba de la de ingresos, lo cual indica que el costo total es mayor que el ingreso total, resultando de ello una utilidad negativa (pérdida).
3. La distancia vertical que separa las gráficas de las dos funciones representa la utilidad o pérdida, según el nivel de la producción.
4. En el intervalo $0 < q < 25.000$, la pendiente de la función de ingreso es positivo y mayor que la pendiente de la función de costo. Expresado en términos de MR y MC, MR < MC en este intervalo.

EJEMPLO 27

En el ejemplo 21, se nos pidió determinar el número de representantes de ventas *q* que producirían una utilidad máxima p en una empresa de cosméticos y artículos de belleza. La función de utilidades se formuló así:

$$U = f(x) = -12{,}5q^2 + 1.375 - 1.500$$

Con el método del análisis marginal, determine el número de representantes que producirían la utilidad máxima para la empresa.

Solución

No es posible aplicar el método del análisis marginal en este ejemplo porque no pueden identificarse las funciones de ingreso y costo totales que se combinaron para formar la unción de utilidad. No se satisfizo la condición 1 del empleo del análisis marginal.

En otros casos las funciones no esta´n explícitas pero se pueden obtener, como por ejemplo la de costo total a partir del costo promedio, y el ingreso a partir de la demanda, así:

Si el fabricante ha determinado que su costo total está dado por la ecuación:

$C(q)=0{,}4q^2+3q+10$ en dólares

y todas las unidades pueden venderse a un precio de $p(q)=0{,}2(45-0{,}5q)$ dólares la unidad

Determinar el nivel de producción que genera la máxima utilidad y el precio óptimo respectivo.

Solución. El ingreso y costo respectivos són:

$R(q)=pq=0{,}2(45 - 0{,}5q)q=9q - 0{,}1q^2$

y $C(q)=0{,}4q^2+3q+10$

Por tanto el ingreso marginal MR y el costo marginal MC están dados por:

$MR=9-0{,}2q$ y $MC=0{,}8q+3$

y el ingreso marginal es igual al costo marginal cuando:

$9 - 0{,}2q=0{,}8q+3$ de donde $q=6$

El precio óptimo correspondiente es de:

$p(6)=0{,}2(45 - 0{,}5(6))=8{,}4$

Reto: Pruebe que $R''(6)<C''(6)$ para asegurarnos que U está en un máximo punto.

5. Por otra parte, en el intervalo $0 < q < 25.000$ la distancia vertical entre las dos curvas aumenta y esto indica que la utilidad está aumentando en el intervalo.
6. En $q = 25.000$ las pendientes en los puntos A y B son iguales, lo cual indica que MR = MC. Así mismo, en $q = 25.000$, la distancia vertical que separa las dos curvas es mayor que en cualquier otro punto de la región de utilidades; por tanto, éste es el punto de la maximización de utilidades.
7. Para $q > 25.000$, la pendiente de la función de ingreso es positiva pero es menos positiva para la función de costo. Así pues, MR < MC y disminuye para cada utilidad adicional por unidad, lo cual ocasiona una pérdida más allá del punto D.

3.12 Gerencia de recursos físicos: Los inventarios

Para cada pedido de materias primas, un fabricante debe pagar unos gastos de envío para cubrir manejo y transporte. Al llegar las materias primas, estan deben almacenarse hasta cuando se necesiten, lo cual genera costos de almacenamiento. Si cada pedido es pequeño, los costos de envío serían altos porque se necesitarían muchos pedidos. Ahora, todas las unidades requeridas podrían fabricarse al inicio del año en una sola serie de producción buscando economías de producción masiva, esto minimizaría el costo de producción. Sin embargo, significaría que grandes cantidades de artículos tendrían que mantenerse almacenados hasta que tuvieran que venderse y los costos de almacenamiento podrían ser altos y aun exceder las ventajas de los bajos costos de producción. **Véase ejemplo 29.**

EJEMPLO 28

La figura 11 muestra una gráfica de la función lineal de ingreso y de la función no lineal de costo. A la izquierda de q* la pendiente de la función de ingreso excede la de la función de costo, lo cual indica que MR> MC. En *q** las pendientes de ambas funciones son iguales. Y la distancia vertical que las separa es mayor que *q** que en cualesquiera otro valor de *q* entre los puntos A y B. Estos dos son los puntos de equilibrio.

Teniendo en cuenta el criterio de la segunda derivada, en *R''(q)<C''(q)* ¿cual de los puntos de equilibrio es el que conviene desde el punto de vista económico, A ó B?

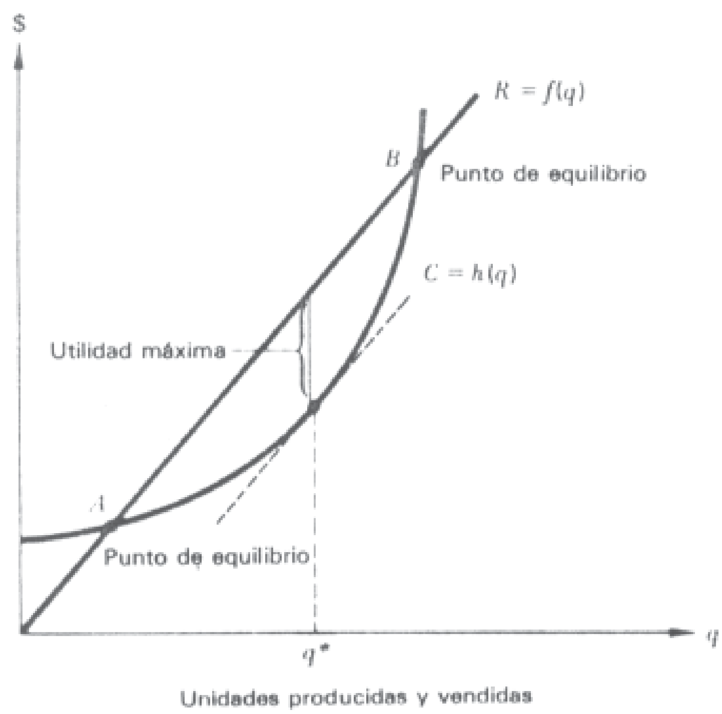


Figura 11. Funciones lineal de ingreso y cuadrática de costo.

EJERCICIO 4

- Realice la comprobación gráfica y la verificación algebráica de todos los ejemplos del capítulo usando "Derive" o el software con el que su profesor esté apoyando el curso.

EJEMPLO 29
COSTO DE INVENTARIOS

Al evaluar un programa de generación de iniciativas empresariales, la Secretaría de Desarrollo Municipal encontró que un pequeño fabricante producía 50.000 unidades de cierto artículo durante un año y tenía un costo de $400 por preparar la planta manufacturera en cada serie de producción, fabricar cada artículo costaba $4 y mantenerlo almacenado tenía un costo de 40 centavos por año. Suponga que en cada serie de producción se produce el mismo número de artículos, denotemos este número por x. Suponga también que después de producir un lote, las x unidades se almacenan y se venden en una tasa uniforme de modo que las unidades almacenadas se agotan cuando ya está lista la próxima serie de producción. Así, el número de unidades almacenadas como una función del tiempo se ilustra en la figura 12. En cada serie de producción, el número salta de 0 a x, luego decrece progresivamente a una tasa constante hasta cero. Al alcanzar el cero, el próximo lote se produce y el número almacenado es de nuevo igual a x.

A partir de la figura 12 es claro que el número promedio de unidades almacenadas es x/2. Puesto que cuesta $0,40 almacenar cada artículo por año, los costos de almacenamiento en el año serán de (0,4)(x/2) dólares o x/5 dólares (usamos dólares para no perder la proporción de los precios en el tiempo).

Dado que los 50.000 artículos necesarios se producen en lotes de tamaño x, el número de series de producción por año debe ser 50.000/x. Por consiguiente el costo de preparar la planta para estas series de (400)(50.000/x) = ($2x10^7$/x) dólares. El costo de producir 50.000 artículos a $4 cada uno es $200.000. En consecuencia, los costos totales de fabricación y almacenamiento a lo largo de un año (en dólares) están dados por

$$C = \frac{2\times10^7}{x} + 200.000 + \frac{x}{5}.$$

Deseamos encontrar el valor de x que haga a C mínimo. Derivando resulta:

$$\frac{dC}{dx} = \frac{2x10^7}{x^2} + \frac{1}{5}.$$

Haciendo esta derivada igual a cero, obtenemos el resultado siguiente.

$$\frac{2x10^7}{x^2} = \frac{1}{5} \rightarrow x^2 = (2x10^7)(5) = 10^8$$

$$x = 10^4 = 10.000$$

(La raíz negativa no tiene importancia práctica) Más aún advertimos que

$\frac{d^2C}{dx^2} = \frac{4x10^7}{x^3}$ es positiva cuando x= 10.000. De modo que este valor de x representa un mínimo local de C.

Por lo tanto, el costo mínimo se obtiene haciendo 50.000/10.000= 5 series de producción por año, cada una de ellas con una producción de 10.000 unidades.

Este tipo de modelo de costo de inventarios también se aplica a negocios tales como bodegas o mercados de venta al menudeo que mantienen existencias de artículos que han de venderse al público o a otras empresas. La pregunta es que tan grande debe ser cada vez la cantidad de algún artículo que se ordena con destino a ser realmacenado. Si se ordena una cantidad muy grande, la empresa se enfrentará con sustanciales costos de almacenamiento, si bien no tendrá la desventaja de reordenar por un buen tiempo.

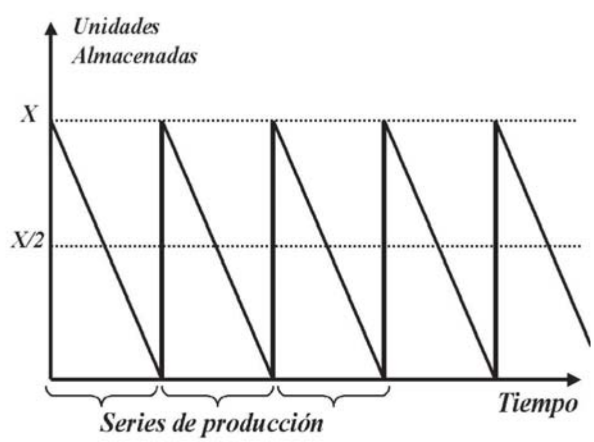


Figura 12. Costo de inventarios

3.12 Elasticidad de la Demanda.

Es normal que la demanda de consumo de un producto este relacionada con su precio. En la mayor parte de los casos, la demanda disminuye a medida que el precio aumenta. La sensibilidad de la demanda frente a los cambios en el precio, varía de un producto a otro. Para algunos productos y servicios como gasolina, jabón, sal y peajes, los cambios pequeños experimentados en el precio pueden tener un pequeño efecto sobre la demanda. Para otros productos como tiquetes de avión o préstamos para vivienda , los cambios porcentuales pequeños experimentados en el precio pueden tener efectos notables en la demanda, en especial cuando tienen bienes sustitutos.

La elasticidad es el cambio porcentual de la demanda, generado por un incremento del uno por ciento (1%) en el precio. Si q denota la demanda y p el precio, la elasticidad de la demanda representada por la letra griega η (eta), está dada por la fórmula:

$$\eta = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp}$$

Supóngase que la demanda q y el precio de cierto artículo se relacionan mediante la ecuación lineal

$$q = 240 - 2p \ \ para \ (0 \le p \le 120)$$

Si necesitamos calcular la elasticidad de la demanda cuando el precio es 100 y cuando es 50, entonces debemos proceder primero aexpresar la elasticidad e la demanda como una función de p:

$$\eta = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp} = \frac{p}{q}(-2) = -\frac{2p}{240 - 2p} = -\frac{p}{120 - p}$$

Cuando p=100, la elasticidad de la demanda es:

$$\eta = -\frac{100}{120 - 100} = -5$$

Es decir, que cuando el precio es p=100, un incremento del 1% en el precio generará una disminución del 5% en la demanda. Ahora, cuando el precio es p=50, la elasticidad de la demanda es:

$$\eta = -\frac{50}{120 - 50} = -0.71$$

Es decir, cuando el precio es p=50, un incremento del 1% en el precio generará una disminución del 0.71% en la demanda, aproximadamente.

Podemos ver entonces que para el precio de p=100 tenemos una demánda elástica respecto al precio, mientras que para un precio de p=50 la demanda nos resulta inelastica respecto al precio, es decir que los cambios en el precio no generan aumentos significativos en las cantidades demandadas.

En general, la elasticidad de la demanda es negativa, puesto que la demanda disminuye a medida que el precio se incrementa. Sin embargo, podemos encontrar casos raros en los cuales aumentos en el precio generen aumentos en la demanda, tal es el caso de los títulos valores como acciones y moneda extranjera, los cuales cuando tienen alzas sostenidas de precio generan confianza en los inversionistas y estos responden aumentando la demanda. Tambien suele ocurrir con algunos artículos de lujo que dan algun estatus socioeconómico a quien los posee, y la vanidad entonces hace que se tienda a comprarlos si estan mas caros.

Veamos ahora cuál es el precio cuando la elasticidad es igual a -1:

$$-1 = -\frac{p}{120 - p} \rightarrow 120 - p = p$$

$$\rightarrow 2p = 120 \rightarrow p = 60$$

En este precio, un incremento del 1% en el precio genera una disminución de lademanda de el mismo porcentaje, es decir 1%. En tal caso se dice que la demanda es de elasticidad unitaria respecto al precio. En conclusión, el comportamiento de la demanda respecto al precio sería:

$Si\ \lvert\eta\rvert > 1,\ la\ demanda\ es\ elástica$
$Si\ \lvert\eta\rvert < 1,\ la\ demanda\ es\ inelástica$
$Si\ \lvert\eta\rvert = 1,\ la\ demanda\ es\ unitaria$

3.13 La Función de Producción Cobb-Douglas

Otra especificación de función de producción ampliamente usada en empresas agrícolas fue primero estimada por dos eruditos de Illinois. El señor Cobb (matemático) y el señor Douglass (economista) decidieron estimar una función de producción para la economía de los Estados Unidos. Ellos tenían la hipótesis de que el ingreso nacional (Y) era una función de capital (K) y Mano de Obra (L). Entonces, en general, su teoría podría ser expresada como: Y = f(K, L). Sin embargo, la teoría tenía otras dos partes. Primero, ellos tenían la teoría de que la función de producción era no lineal. Además, ellos creían que la contribución marginal de capital dependía de la cantidad de mano de obra empleada e inversamente, que la contribución de mano de obra era dependiente de la cantidad de capital empleado.

Para capturar esta relación entre en ingreso nacional (Y) y las cantidades de capital y mano de obra, ellos especificaron su función como:

$$Y = a \cdot K^{b_1} \cdot L^{b_2}$$

en donde Y = ingreso nacional de Estados Unidos
K = cantidad de capital empleado en dólares en los Estados Unidos
L = cantidad de mano de obra empleado en años - hombre en los Estados Unidos
a, b_1, b_2 = parámetros de la función

Note que la función de producción es multiplicativa en lugar de aditiva. Es decir no es lineal. También, si examinamos las funciones derivadas de esta función de producción, encontraremos que la productividad marginal de capital (K) depende en la cantidad de mano de obra y viceversa. Para hacer esto, tome dos derivadas parciales, una con respecto a mano de obra y la otra respecto a capital. **Véase ejemplo 30.**

EJEMPLO 30

La función de ingreso nacional para la economía de cierto país es:

$$Y = 10K^{0.5}L^{0.4}$$

La productividad marginal de capital MPP_K es,

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = MPP_K = 5K^{-0.5}L^{0.4} = \frac{5L^{0.4}}{K^{0.5}}$$

y la productividad marginal de mano de obra MPP_L es:

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = 4K^{0.5}L^{-0.6} = \frac{4K^{0.5}}{L^{0.6}}$$

Entonces las funciones de productividad marginal en este caso dependen de ambas variables independientes (insumos). ¿Tiene esto sentido desde el punto de vista práctico? Podemos ver de cerca esto con el uso de una tabla que muestre distintos niveles de insumos K y L. Examinemos la función de productividad marginal de capital MPP_K.

K	MPP_K (L=10)	MPP_K (L=20)
1	12.6	16.6
2	8.9	11.7
3	7.3	9.6
4	6.3	8.3
5	5.6	7.4

En la tabla vemos que la productividad marginal de capital MPP_K depende de la cantidad de capital y la cantidad de mano de obra. Por ejemplo para K=3, MPP_K es 7.3 si la mano de obra es 10, pero es 9.6 si la mano es obra es 20. Tambien para cualquier otro nivel de mano de obra. Complete Usted la tabla anterior con tres columnas más para valores de mano de obra de L=30, L=40 y L=50, al igual que agregando tres filas para valores de K de 6, 7 y 8. Revise el resultado y verifique si se sigue cumpliendo lo observado.

¿Existen ejemplos de empresas de servicios públicos en donde el nivel de productividad marginal dependa del nivel de otros factores?

3.14 Propensión marginal al consumo y al ahorro

Una función que juega un papel importante en el análisis económico es la función de consumo. La función de consumo $C = f(Y)$, expresa una relación entre el ingreso nacional total Y y el consumo nacional total C. Usualmente, tanto Y como C se expresan en miles de millones e Y se restringe a cierto intervalo. La propensión marginal al consumo se define como la razón de cambio del consumo con respecto al ingreso; y es la derivada de C con respecto a Y

Propensión marginal al consumo: PMC = $\dfrac{dC}{dY}$

Si suponemos que la diferencia entre el ingreso nacional Y y el consumo C, es el ahorro S, entonces

$$S = Y - C$$

Al diferenciar ambos miembros de la ecuación con respecto a Y obtenemos

$$\frac{dS}{dY} = \frac{d}{dY}(Y) - \frac{dC}{dY} = 1 - \frac{dC}{dY}$$

Definimos $\dfrac{dS}{dY}$ como la propensión marginal al ahorro PMS.

Así, la propensión marginal al ahorro indica qué tan rápido cambia el ahorro nacional con respecto a cambios en el ingreso nacional: *propensión marginal al ahorro* = 1 - *propensión marginal al consumo*:

PMS = 1 - PMC *y tambien* PMC = 1 - PMS

La propensíon marginal al ahorro significativa implica un proceso de acumulación de capital, el cual se debe equilibrar con un valor de la propensión marginal al consumo que permita un movimiento dinámico sde la economía. ¿Es bueno o malo tener una propensión marginal al ahorro muy cercana a uno? ¿Y respecto de la propensión marginal al consumo? Recordemos de un lado que el consumo dinamiza la economía: la falta de consumo generó la crisis de 1929; pero veamos tambien que los paises con bonanzas económicas, que después de estas quedan en situación deplorable por no haber invertido (ahorrado). En el **Documento 1**, se evidencia la importancia de estos conceptos en el análisis económico y social.

Doc. 1
Cambio de rumbos en el análisis de la inequidad

"La ciencia económica convencional de alta difusión y peso en América Latina, ha hipotetizado que la desigualdad constituye un rasgo característico de los procesos de modernización y crecimiento, y en algunas de sus versiones, que los impulsa y favorece, al posibilitar la acumulación de ahorro que se transformará en inversión. Así mismo, ha sugerido que las desigualdades, funcionales para el desarrollo, tenderían luego a corregirse. Para Kaldor (1978) es imprescindible para el crecimiento una acumulación importante previa de ahorro. Si el ingreso se concentra en un segmento limitado de la población con alta propensión a consumir, que serían los ricos, ello favorecerá esta acumulación y el crecimiento. Kaldor supone que las utilidades son una fuente importante de generación de ahorro y los salarios, en cambio, una fuente muy limitada. Kuznets (1970) indica que habría una tendencia secular, en las sociedades desarrolladas, a que la población emigre del sector agrícola caracterizado por baja desigualdad y bajos ingresos promedios, hacia el sector industrial donde el ingreso promedio es más alto, pero también la desigualdad. En los estadios iniciales del desarrollo ascenderían, por tanto, el ingreso y la desigualdad. En estadios posteriores seguiría ascendiendo el crecimiento, pero se reducirá la desigualdad 0148.

Kliksberg Bernando. *Desigualdad y Desarrollo en America Latina: El Debate Postergado,* Centro de Documentación en políticas sociales, Conferencia pronunciada en el marco de Buenos Aires Sin Fronteras, Un espacio para el diálogo. 26-27 de abril de 1999.

GLOSARIO

Ingreso marginal. Es el ingreso adicional que se consigue al vender una unidad más de un producto o servicio.

Costo Marginal. Es el gasto adicional en que se incurre por producir y poner en el mercado una unidad adicional de un producto o servicio.

Utilidad Marginal. Es la utilidad adicional que se recibe por producir y poner en el mercado una unidad adicional de un producto o servicio.

BIBLIOGRAFÍA

Draper Jean E., Klingman Jane S., *Matemáticas para la Administración y la Economía*. Editorial Harla. México, 1976.

Barnet A. Raymond. *Matemáticas para Administración y Ciencias Sociales*. 2ª Edición. Nueva Editorial Interamericana S.A., México, 1983.

Budnick Frank S., *Matemáticas Aplicadas para la Administración Economía y Ciencias Sociales*. 3ª Edición. Editorial Mc Graw Hill. México, 1990.

Emery E. David. *Principios de Economía: Microeconomía*. Traducido por Harcourt Brace Jovanovich. Bogotá, 1989.

PRÁCTICA DE APLICACIÓN

1. **Ingresos**. Una compañía ha descubierto que el ingreso total es una función del precio fijado a su producto. En concreto, la función del ingreso total es

   $R = f(p) = -20p^2 + 1.960p$, donde p es el precio en dólares.

a) Determine el precio p que produce el máximo ingreso total.

b) ¿ Cuál es el valor máximo del ingreso total?

2. **Ingresos**. La función de demanda del producto de una firma es $q = 300.000 - 75\,p$

   donde q representa el número de unidades demandadas y p indica su precio en dólares.

a) Determine el precio que deberá cobrarse para maximizar el ingreso total.

b) ¿Cuál es el valor máximo del ingreso total?

c) ¿Cuántas unidades se espera que se demanden?

3. **Utilidad máxima.** La utilidad anual de una compañía depende del número de unidades producidas. Específicamente, la función que describe la relación existente entre la utilidad U (expresada en dólares) y el número de unidades producidas q es

   $$U = -0.12q^2 + 6.000q - 25.000.000$$

a) Determine el número de unidades q que producirán la utilidad máxima.

b) ¿Cuál es la utilidad máxima esperada?

4. **Administración de playas**. Una comunidad, situada en una zona vacacional, está tratando de escoger una tarifa de estacionamiento que fijará a la playa del pueblo. En la zona hay otras playas, y todas ellas compiten por atraer a los bañistas. El municipio ha optado por la siguiente función que expresa el número promedio de automóviles por día q en términos de la tarifa de estacionamiento p expresada en centavos.

   $q = 10.000 - 20p$

a) Determine la tarifa que debería cargarse para maximizar los ingresos diarios de la playa.

b) ¿Cuál se espera que sea el máximo ingreso diario de la playa.

c) ¿Cuántos automóviles se esperan en un día promedio?

➔

PRÁCTICA DE APLICACIÓN

5. **Administración de los impuestos de importación**. El gobierno estadounidense está estudiando la estructura de los impuestos de importación para los televisores de color traídos de otros países. El gobierno está tratando de determinar el impuesto que impondrá a cada aparato. Sabe bien que en la demanda de los televisores importados repercutirá ese impuesto. Estima que la demanda D, medida en cientos de televisores, guarda relación con el impuesto de importación t, medido en centavos, de acuerdo con la función

   D = 80.000 - 20 t

a) Determine el impuesto de importación que produce los máximos ingresos fiscales en la importación de televisores.

b) ¿Cuál es el ingreso máximo?

c) ¿Cuál será la demanda de los televisores importados de color con este impuesto?

6. **Costo de Inventario**. Un fabricante ha calculado una función de costo que expresa el costo anual de la compra, posesión y mantenimiento del inventario de sus materias primas en términos del tamaño de cada pedido. He aquí la función de costo:

   $C = \frac{625.000}{q} + 10q + 150.000$, donde q es el tamaño de cada pedido (en toneladas) y C anual del inventario.

a) Determine el tamaño de pedido q que minimice el costo anual de inventario.

b) ¿Cuáles se esperan que sean los mínimos costos de inventario?

7. **Costos mínimos**. En el ejercicio 6 suponga que la cantidad máxima de materias primas que puede aceptarse en un embarque cualquiera es de 225 toneladas.

a) Con esta restricción, determine el tamaño de pedido q que minimice el costo anual del inventario.

b) ¿Cuál son los mínimos costos anuales de inventarios?

c) ¿Qué relación tienen estos resultados con los del ejercicio 4?

8. **Costo de Inventario**. Un gran distribuidor de balones de baloncesto está prosperando mucho porque en su país ese deporte se ha ido convirtiendo en uno de los favoritos del pueblo. Uno de los principales problemas del distribuidor es mantener el ritmo de la demanda de los balones. Los compra periódicamente a un fabricante de artículos deportivos. El costo anual de la compra, posesión y mantenimiento del inventario de los balones se describe por medio de la función.

$$C = \frac{20.000.000}{q} + 5q + 200.000$$

   donde q es el tamaño de pedido (en docenas de balones) y C indica el costo anual de inventario.

a) Determine el tamaño de pedido q que minimice el costo anual de inventario.

b) ¿Cuáles se espera que sean los costos mínimos de inventario?

9. **Costos mínimos**. El distribuidor del ejercicio 8 cuenta con instalaciones de almacenamiento para recibir un máximo de 1.500 docenas de balones en cada embarque.

a) Determine el tamaño de pedido q que minimice los costos anuales de inventario.

b) ¿Cuáles son los costos mínimos de inventario?

c) ¿Qué relación guardan estos resultados con la obtenidos en el ejercicio 8?

10. **Mínimo costo promedio**. El costo total de producir q unidades de cierto producto se describe por medio de la función

    $C = 4.000.000 + 300q + 0.01q^2$, donde C es el costo total expresado en dólares.

➔

PRÁCTICA DE APLICACIÓN

a) ¿Cuántas unidades deberán producirse a fin de minimizar el costo promedio por unidad?

b) ¿Cuál es el mínimo costo promedio por unidad?

c) ¿Cual es el costo total en este nivel de producción?

11. **Minimizar costos**. El costo total de fabricar q unidades de cierto producto se describe con la función

$$C = 1.000.000 + 15.000q + 0.25q^2$$

donde C es el costo expresado en dólares.

a) Determine cuantas unidades q deberían producirse con objeto de minimizar el costo promedio por unidad.

b) ¿Cuál es el mínimo costo promedio por unidad?

c) ¿Cuál es el costo total en ese nivel de producción?

12. **Minimizar costos**. Resuelva nuevamente el ejercicio 11 si la capacidad máxima de producción es de 1.000 unidades.

13. **Servicios Públicos**. Una compañía de televisión por cable ha averiguado que su rentabilidad depende de la tarifa mensual que cobra a sus clientes. Específicamente, la relación que describe la utilidad anual p (en dólares) en función de la tarifa mensual de renta R (en dólares) es la siguiente:

$$P = -50.000r^2 + 2.500.000r - 5.000.000$$

a) Determine la tarifa de renta mensual que de por resultado la utilidad máxima.

b) ¿Cuál es la utilidad máxima esperada?

14. **Servicios Públicos**. En el ejercicio 13 suponga que la comisión local de servicios públicos ha impuesto a la compañía la obligación de no cobrar una tarifa mayor a $ 20. a) ¿cuál tarifa produce la utilidad máxima a la compañía?

b) ¿Cuál es el efecto que la decisión de la comisión tiene en la rentabilidad de la empresa?

15. **Maximizar utilidades**. Una compañía estima que la demanda anual de su producto fluctúa con su precio. La función de demanda es

q= 180.000 - 250 p

donde q es el número de unidades demandadas y p el precio en dólares. El costo total de producir q unidades se estima con la función

$$C = 350.000 + 300q + 0.001q^2$$

a) Determine cuantas unidades q deberían producirse con objeto de maximizar la utilidad anual.

b) ¿Qué precio debería fijarse?

c) ¿Cuál se espera que sea la máxima utilidad anual?

16. **Aproximación marginal**. Resuelva el ejercicio anterior, usando la aproximación marginal para maximizar las utilidades.

17. **Maximizar utilidades**. Si en el ejercicio 15 la capacidad anual es de 40.000 unidades, ¿cuantas unidades darán por resultado la unidad máxima?

18. **Maximizar ingresos**. Una manera equivalente de resolver el ejemplo 18 consiste en expresar el ingreso total en función de q, el número de pasajeros por día. Formule la función R = g(q) y determine el número de pasajeros q que produzca el máximo ingreso total. Verifique que el valor máximo de R y el precio que debería fijarse sean los mismos que los que se obtuvieron en el ejemplo 18.

19. **Aproximación marginal**. Las funciones de costo e ingreso totales de un producto son

$$C(q) = 50.000 + 20q + 0.0001q^2,$$

y $R(q) = 60q - 0.004q^2$

a) Por medio de la aproximación marginal determine el nivel de producción que maximice las utilidades.

b) ¿Cuál es la utilidad máxima?.

PRÁCTICA DE APLICACIÓN

20. **Aproximación marginal**. Una empresa vende cada unidad de un producto en $75. El costo total de producir *q* (mil) unidades se describe mediante la función

$$C(x) = 1.200 - 20q^2 + q^3$$

donde C (*q*) se mide en miles de dólares.

a) Utilice la aproximación marginal para determinar el nivel de producción que maximice las utilidades.

b) ¿Cuál es el ingreso total en este nivel de producción? ¿el costo total? ¿las utilidades totales?

21. **Aproximación marginal**. La función de utilidad de una firma es

$$U(q) = -10q^2 + 36.000q - 45.000$$

a) con la aproximación marginal, determine el nivel de producción que maximice las utilidades

b) ¿Cuál es la utilidad máxima?

22. Aproximación marginal. Las funciones de costo e ingreso totales de un producto son

$$C(q) = 1.000 + 30q + 0.005q^2$$

$$R(q) = 2.000q - 0.004q^2$$

a) Mediante la aproximación marginal determine el nivel de producción que maximice las utilidades.

b) ¿Cuál es utilidad máxima?

23. **Aproximación marginal**. Las funciones de costo e ingresos totales de un producto son

$R(q) = 100q - 0.01q^2$, y

$$C(q) = 25.000 + 40q + 0,005q^2$$

a) Con la aproximación marginal determine el nivel de producción que maximice las utilidades.

b) ¿Cuál es la utilidad máxima?

24. **Función consumo**. Para Estados Unidos (1922-1942), la función de consumo se estimó por la ecuación

$$C = 0.672Y + 113.1$$

Encuentre la propensión marginal al consumo.

25. **Función consumo**. Suponga que la función de consumo de un país está dada por

$$C = \frac{10\sqrt{Y} + 0.7\sqrt{Y^3} - 0.2Y}{\sqrt{Y}}$$

donde C e I están en miles de millones de dólares

a) Encuentre la propensión marginal al ahorro cuando el ingreso es de 25.000 millones de dólares.

b) Hallar la PMC cuando el ingreso nacional es de 30.000 millones de dólares.

26. **Propensiones marginales a consumir y a ahorrar**. Suponga que la función de ahorro de un país es:

$$S = \frac{Y - \sqrt{Y} - 6}{\sqrt{Y} + 2}$$

donde el ingreso nacional I y el ahorro nacional S se miden en miles de millones de dólares. Encuentre la propensión marginal del país a consumir y su propensión marginal al ahorro cuando el ingreso nacional es de 16.000 millones de dólares.

27. **Costo marginal**. Si la función de costo total de un fabricante está dada por:

$C = \dfrac{5q^2}{q+3} + 5000$, encuentre la función de costo marginal.

PRACTICA DE APLICACIÓN

28. **Relación huésped - parásito**. Para la relación particular huésped - parásito, se determinó que cuando la densidad de los huéspedes (número de huéspedes por unidad de área) es x, el número de huéspedes que tienen parásitos es y, donde

$$y = \frac{900x}{10 + 45x}$$

¿A qué razón está cambiando el número de huéspedes que tienen parásitos con respecto a la densidad de los huéspedes cuando x = 2?

29. **Depredador - presa**. En un experimento depredador - presa, se determinó estadísticamente que el número de presas consumidas Y, por un depredador individual es una función de la densidad X de presas (el número de presas por unidad de área), donde

$$Y = \frac{0.7355\times}{1 + 0.02744\times}$$

Determine la razón de cambio de las presas consumidas con respecto a su densidad.

30. **Estudios Políticos**. En una ciudad intermedia se estima que la población votante en miles, aumentará o disminuirá según la siguiente fórmula:

$N(t) = 30 + 12t^2 - t^3$; donde: $0 \le t \le 8$

Siendo t el tiempo en años y N(t) la población en función del número de años.

¿Cuándo será más rápido el aumento de la población?

31. **Ecuación de demanda**. Suponga que $p = 100 - \sqrt{q^2 + 20}$ es una ecuación de demanda para el producto de un fabricante.

a) Encuentre la razón de cambio de *p* con respecto a *q*
b) Determine la función de ingreso marginal

32. **Producto de ingreso marginal**. Si $p = \frac{k}{q}$, donde k es una constante, es la ecuación de demanda para el producto de un fabricante, y define una función que da el número total de unidades producidas al día por m empleados, demuestre que el producto del ingreso marginal es siempre igual a cero.

33. **Función costo**. El costo de producir *q* unidades de un producto está dado por

$$C = 4000 + 10q + 0.1q^2$$

Si el precio de *p* unidades está dado por la ecuación

$$q = 800 - 2.5p$$

utilice la regla de la cadena para encontrar la razón de cambio del costo con respecto al precio por unidad cuando *p* = 80.

34. **Altas de hospital**. En un centro de salud se examinaron las altas de un grupo de individuos que estuvieron hospitalizados con una enfermedad específica. Se encontró que la cantidad total de personas que fueron dadas de alta al final de t días de hospitalización estaba dada por

$$f(t) = 1 - \left(\frac{300}{300 + t}\right)^3$$

Encuentre e interprete su respuesta.

35. **Costo marginal**. Si la función de costo total para un fabricante está dada por

$$C = \frac{5q^2}{\sqrt{q^2 + 3}} + 5000$$

Encuentre la función de costo marginal

➔

PRÁCTICA DE APLICACIÓN

36.**Condición social/educación**. Para cierta población, si E es el número de años de educación de una persona y S representa un valor numérico de su condición social basada en ese nivel educativo, entonces $S = 4\left(\frac{E}{4}+1\right)^2$

a) ¿Qué tan rápido estará cambiando la condición social con respecto a la educación cuando E = 16?

b) ¿A qué nivel de educación es igual a 8 la razón de cambio de la condición social?

37.**Presión en tejido vivos**. Bajo ciertas condiciones, la presión *p* desarrollada en tejidos vivos por la radiación ultrasónica está dada en función de la intensidad I:

$$p = (2\rho V I)^{1/2}$$

donde (letra griega "rho") es la densidad y V la velocidad de propagación. Aquí ρ y V son constantes.

a) Determine la razón de cambio de *p* con respecto a I

b) Encuentre la razón de cambio relativa.

38.**Demografía**. Suponga que para cierto grupo de 20.000 nacimientos, el número N de gente que alcanza a vivir x años viene dada por

$$N = 2000\sqrt{100-x} \quad , \quad 0 \le x \le 100$$

a) Encuentre la razón de cambio de N, con respecto de x, y evalúe su respuesta para x = 36.

b) Encuentre la razón de cambio relativa de N, cuando x = 36

39.**Contracción muscular**. Un músculo tiene la habilidad de acortarse al estar sometido a una carga. La ecuación

$$(P+a)(V+b)) = k$$

se llama "ecuación fundamental de la contracción muscular". Aquí, *P* es la carga impuesta al músculo, V la velocidad del acortamiento de las fibras musculares y a, b y k son constantes positivas. Exprese V como función de *P*. Use su resultado para encontrar $\frac{dV}{dP}$

40.Encuentre la función de costo marginal si la función de costo medio es

$$\bar{c} = 2q + \frac{10000}{q^2}$$

41.**Costo marginal**. La función del costo medio de un fabricante, en dólares, está dada por

$$\bar{c} = \frac{400}{\ln(q+5)}$$

Encuentre el costo marginal (redondeando a dos decimales) cuando *q* = 45.

42.**Ahorro y consumo**. El ahorro S de un país (en miles de millones de dólares) está relacionado con el ingreso I nacional (en miles de millones de dólares) por la ecuación

$$S = \ln\left(\frac{3}{2+e^{-I}}\right)$$

a) Demuestre que la propensión marginal al consumo en función del ingreso es $\frac{2}{2+e^{-I}}$

b) Al millón más cercano. ¿Cuál es el ingreso nacional cuando la propensión marginal al ahorro es de 1/10?

43.**Derivada implícita**. Encuentre $\frac{dy}{dx}$ por derivación implícita

a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=3$ b) $3x^2y^3 - x + y = 25$

c) $x^3y^3 + x = 9$

➔

PRÁCTICA DE APLICACIÓN

d) $x\sqrt{y+1} - y\sqrt{x+1} = 2001$

e) $x^3 + 2xy^2 - y^2 = 5$ f)

$\ln(xy) + e^{x+y} = 4$

44. **Propensión marginal del consumo**. Los ahorros S de un país se definen implícitamente en términos de su ingreso nacional I por medio de la ecuación

$$S^2 + \frac{1}{4}I^2 = S\,I + I$$

donde S e I están en miles de millones de dólares. Encuentre la propensión marginal al consumo cuando I = 16 y S = 12

45. Para las ecuaciones de demanda dadas a continuación, encuentre la razón de cambio de *q* con respecto a *p*.

a) $p = 100 - q^2$ b) $p = 400 - \sqrt{q}$

c) $p = \dfrac{20}{(q+5)^2}$ d) $p = \dfrac{20}{q^2 + 5}$

46. **Tamaño del lote económico**. Un material se demanda a una tasa de 10.000 unidades por año; el precio al costo del material es de $2 por unidad y el costo de volver a llenar el almacén del material por orden sin importar el tamaño de la orden (x) de la orden es de $ 40 por orden; el costo de almacenar el material por un año es del 10% del valor de las existencias (x/2). C es el costo anual de acomodar y tener almacenado el material.

a) demuestre que C = 20.000 +400.000 /x + x/10

b) encuentre el tamaño económico del lote.

47. **Modelo de control de inventarios**. Una fábrica ha de producir 96.000 unidades de un artículo al año. El costo del material es de $2 por unidad y el costo de volver a surtir la existencia de material por orden sin importar el tamaño x de la orden es de $25 por orden. El costo de tener almacenado el material es de 30% por artículo por año sobre las existencias (x/2). Pruebe que el costo total C está dado por

$$C = 192.000 + \frac{2.400.000}{x} + \frac{3x}{20}$$

Determine también el tamaño del lote económico (esto es, el valor de x para el que C es mínimo).

48. **Máximo ingreso**. Un restaurante especializado en carnes determina que el precio $5 por platillo de carne tendrá en promedio 200 clientes por noche, mientras que si lo vende a $7 el número promedio de clientes bajará a $100. Determine la relación de demanda suponiendo que es lineal. Encuentre el precio que maximiza el ingreso.

49. **Utilidad y satisfacción del cliente**. Un banco quiere recortar sus costos laborales reduciendo el número de cajeros pero espera una pérdida de negocios debido al descontento de los clientes por el tiempo de esperar. Supongamos que el salario de los cajeros es de $80 diarios y la pérdida de utilidad por tener únicamente n cajeros es de 5000/ (n+1) dólares diarios. Determine el valor de n que minimiza la suma de sus pérdidas más el costo del salario.

50. **Rendimiento máximo de impuestos sobre las ventas**. La cantidad *q* de un artículo que puede venderse al mes a un precio *p* está dada por *q* = 100 (5-*p*). La cantidad que los proveedores ofrecerán a un precio p_1 es $q_1 = 200(p_1 - 1)$. Si existe un impuesto por cada artículo (de modo que $p_1 = p - t$), determine la cantidad *q* que se vende al mes si el mercado está en equilibrio. Encuentre el valor de *t* que da el máximo impuesto total por mes al gobierno.

51. Elasticidad. Si la demanda de un bien esta dada por:

$$q = 300 - p^2 \ (\,para \ \ 0 \le p \le \sqrt{300}\,)$$

Determinar la elasticidad de la demanda para precios de p=5, p=10, p=15, p=20. Determine los intervalos en los cuales la demanda es elástica, inelástica o unitaria. Recuerde la notación de intervalos.¿es un valor acertado el obtenido al calcular la elasticidad de la demanda para p=20?

RESPUESTAS

1. a) p=49, b) R=48.020
2. a) p=2.000 b) R=300.000.000 c) q=150.000
3. a) q=25.000 b) U=50.000.000
4. a) p=250 b) R=1.250.000 c) q=5.000
5. t=2.000 b) R=80.000.000 c) D=40.000
6. q=250 b) C=155.000
7. En el límite de la restricción se da el mínimo costo. En q=225 entonces C=155.027,78
8. a) q=2.000 C=220.000
9. b) C=220.833,33
10. a) q=20.000 b) c=700
11. a) 2.000 b)16.000 c) 32.000.000
12. q=1000, c=16.250 C=16.250.000
13. a) r=25, b) p=26.250.000
14. a) 25.000.000
15. a) q=42.000, b) p=552, c) U=8.470.000
16. a) q=42.000, b) p=552, c) U=8.470.000
17. q=40.000, U=8.450.000
18. q=10.000-125p, q=5.000, R=200.000
19. q=4.878, U=47.560,9
20. a) q=15, R=1.125, U=1.050
21. a) q=1.800, U=32.355.000
22. a) q=109.444, b) 107.801.777,8
23. a) q=2.000, b) U=35.000
24. PMC=0.672
25. a) PMS=0.3, r=0.000028
26. PMS=0.004, PMC=0.996
27. $MC = \dfrac{5q^2+30q}{(q+3)^2}$
28. y'(2)=0.9
29. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{0,7355}{(1+0,02744\,X)^2}$
30. En cuatro años.
31. a) $\dfrac{dp}{dq} = \dfrac{q}{\sqrt{q^2+20}}$; b) $R = 100q - \sqrt{q^4+20q^2}$
32. $R = pq = \dfrac{k}{q}q = k$; $MR = \dfrac{dR}{dq} = 0$
33. $\dfrac{dC}{dp} = -325$
35. $MC = \dfrac{5q(q^2+6)}{\sqrt{(q^2+3)^3}}$
36. a) 10, b) q=12
37. a) $\dfrac{dP}{dI} = \dfrac{\sqrt{\rho V}}{\sqrt{2I}}$; b) $\dfrac{1}{2I}$
38. a) -125, b) r=-0.0078
39. $V = \dfrac{k}{p+a} - b$; $\dfrac{dV}{dp} = \dfrac{-k}{(p+a)^2}$
40. $MC = 4q - \dfrac{1.000}{q^2}$
41. MC(45)=78.73
42. a) Derivando S se calcula la PMS, luego se calcula la propensión marginal al consumo usando:

    PMC=1-PMS; b) I=1.5
43. a) $\dfrac{dy}{dx} = -\sqrt{\dfrac{y}{x}}$; b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1-6xy^3}{1+9x^2y^2}$;

    c) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1+3x^2y^3}{3x^3y^2}$; d)

$$\frac{x}{2\sqrt{y+1}}\frac{dy}{dx} + \sqrt{y+1} - \frac{y}{\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1}\frac{dy}{dx} = 0$$

e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2 + 2y^2}{2y - 4xy}$;

f) $\dfrac{1}{xy}\left(x\dfrac{dy}{dx} + y\right) + e^{x+y}\left(1 + \dfrac{dy}{dx}\right) = 0$

44. $PMC \; = \dfrac{5}{8}$

45. a) $\dfrac{dp}{dq} = -2q$; b) $\dfrac{dp}{dq} = -\dfrac{1}{2\sqrt{q}}$; c) $p = 20(q+5)^{-3}$;

d) $\dfrac{dp}{dq} = -\dfrac{40q}{(q^2+5)^2}$

46. 1. b) x=2.000

47. x=4.000

48. 4,5

49. n=2 (por ser personas variable discreta, se aproxima a unidades enteras)

50. t = 1,5; q=177.

Problemas Resueltos

1.- Para nuestros pueblos o ciudades en donde se llegue a desarrollar cualquier virus, podemos tener en cuenta el siguiente problema.

Según el Instituto Nacional de Salud, la virulencia de cierta bacteria se mide en una escala de 0 a 50 y viene expresada por la función $V(t)= 40+15t-9t^2+t^3$, donde t es el tiempo(en horas) transcurrido desde que comienzo en estudio (t=0). Indicar los instantes de máxima y mínima virulencia en las 6 primeras horas y los intervalos en que esta crece y decrece.

Solución

Para que la función tenga un máximo o un mínimo la derivada debe ser igual a cero.

$V´(t)= 15-18t+3t^2$, igualandola a 0,

$3t^2-18t+15=0$

Simplificando $t^2-6t+5=0$, y factorizando las soluciones son 5 y 1.

Ahora veamos cual es el máximo y cual el mínimo de la función, en el intervalo [0, 6], que tiene que estar entre estos dos valores junto o en los extremos del intervalo. Ordenamos la función V por comodidad, $V(t)= t^3-9t^2+15t+40$

V(0)=40

V(5)=125-225+75+40 =15

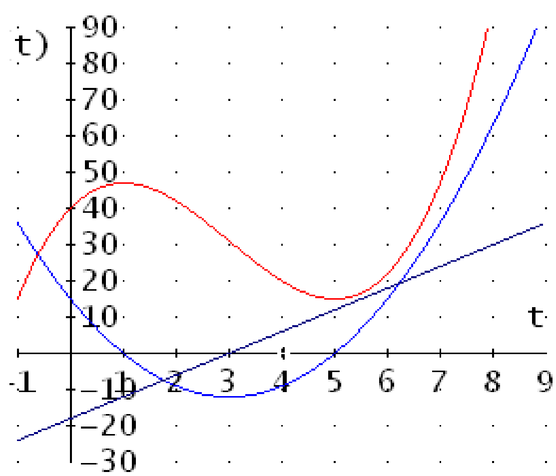
V(1)=1-9+15+40= 47

V(6)=216-324+90+40=22

La máxima virulencia es a las 1 horas y la mínima a las 5 horas. Para ver los intervalos de crecimiento y decrecimiento estudiamos el signo de la derivada: $V'(t)=3t^2-18t+15$

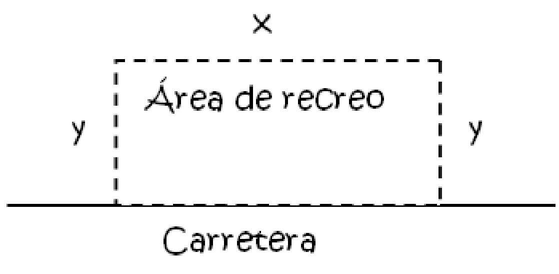
Luego V crece desde 0 a 1 y desde 5 a infinito, (crece en (0, 1) unión (5, ∞) y decrece en el intervalo (1, 5)

Observando la gráfica de esta función vemos lo que hemos deducido, además las curvas de pendiente y concavidad.



¿Que conclusiones podemos tomar en cuanto a la exposición del paciente al contacto con otras personas y a las acciones de atenuación de la enfermedad?

2.- Dentro de los proyectos de la alcaldía a parte de la construcción de ciclo rutas se esta planeando construir un área de recreo para deportistas, al lado de una carretera principal, ha de ser rectangular con un área de 5000 metros cuadrados y ha de ser cercado por los tres lados no adyacentes a la carretera con una estructura en piedra y malla metálica que garantice seguridad y estética. El encargado del proyecto para ahorrar costos quiere saber cual seria la menor cantidad de cerca que necesitaría para completar el trabajo?



representamos Y como la cantidad de cerca requerida entonces

$f = x + 2y$

El hecho de que el área es 5000 dice que:

$$XY = 5000 \qquad \text{ó} \qquad Y = \frac{5000}{X}$$

para rescribir f en términos de una sola variable x se sustituye $Y = \frac{5000}{X}$

en la ecuación $f = x + 2y$ obteniendo:

$$f(x) = x + \frac{10000}{x}$$

como f(x) tiene una aplicación practica para todo valor positivo de x, el objetivo es hallar el mínimo absoluto de f(x) en el intervalo x>0, para hallar los puntos críticos se iguala la derivada:

$$f'(x) = 1 - \frac{10.000}{x^2}$$

a cero y se resuelve en x obteniendo:

$$1 - \frac{10.000}{x^2} = 0$$

$$x^2 = 10.000$$

$$x \pm 100$$

solo el valor positivo x = 100 esta en el intervalo x>0 para hallar el mínimo absoluto de f(x) en este intervalo, obsérvese que $f\,'$(x) es negativa si 0<x< 100 y positiva si x>100.

Es decir $f(100) = 200$

Respuesta:

El responsable del proyecto a parte de los demás materiales, la menor cantidad de cerca o amurallamiento que necesitaría construir es de 200 metros para minimizar la cantidad de material a comprar, la idea es que se haga con todos los materiales que se necesiten para minimizar la cantidad total que se invierte en el proyecto.

¿Considera Usted que ese criterio del mayor costo en la construcción de la cerca es el que el gerente público debe tener en cuenta en este caso?

¿cuales criterios adicionales tendría Usted en cuenta? Intente una ecuación de minimización de costos con ellos, o una de maximización de beneficios.

3.- **Peajes**. Debido al alza en el cobro de sistema de peajes para vías no concesionadas a cargo del INVIAS se solicito un estudio que arrojo la siguiente función de demanda:

q = 250000 – 200p

Donde q es el número de automotores que transitan por los peajes en cuestión por mes y p la tarifa en pesos.

Es preciso entonces determinar la tarifa de peaje que le maximiza los ingresos al Estado, también debemos saber ¿a cuanto asciende ese ingreso? Y por ultimo ¿Cuántos autos se esperan con esa tarifa?

Se registra primero como una función del ingreso diario según la tarifa p, puesto que necesito hallar el ingreso máximo que el Estado puede reclamar por concepto del impuesto o peaje.

$R = f(p) = p.q$

$R = p\,(250000 - 200p)$

$R = 250000p - 200p^2$

Ahora bien derivo, para igualar a 0 y así encontrar el punto de inflexión y determinar la naturaleza de este.

$$\frac{dR}{dp} = 250.000 - 400p$$

Ahora

$250.000 - 400\,p = 0$

$250.000 = 400p$

$250.000 / 400 = p$

$625 = p$

Entonces con el criterio de la segunda derivada:

$$\frac{d^2R}{dp^2} = -400$$

y el resultado es negativo, lo que me indica que esta es parte de un coordenada de un punto máximo, o de concavidad negativa de la curva de ingreso.

Así entonces el ingreso del puesto del peaje se maximizará cuando cobre una tarifa de 625 pesos

Y el ingreso máximo esperado se da así:

$f(625) = 250000\,(625) - 200\,(625^2)$

$= 156'250.000 - 78'125.000$

$= 78'125.000$

Se espera un volumen de automotores de:

$q = 250000 - 200\,(625)$

$= 125000$

Cada mes 125000 automotores que pagan peaje.

Investigue con la autoridad competente como se hacen las estimaciones para autorizar las tarifas de cobro de peajes en nuestro país y a partir de ello concluya sobre la aplicabilidad de este ejercicio resuelto a la realidad de lo público.

4.- **Administración Distrital continúa abriendo Comedores Comunitarios en Bogotá**. Nuevos comedores comunitarios en varias localidades fortalecen, el programa bandera de la Administración Distrital '*Bogotá sin Hambre*', a través de Bienestar Social del Distrito con su proyecto *Comedores Comunitarios. Un Medio para restablecer el derecho fundamental a la Alimentación*.

Los comedores atenderán niños y niñas desescolarizados y escolarizados, mujeres gestantes y madres lactantes, adultos-as mayores, habitantes de calle, personas con limitaciones físicas, sensoriales y cognitivas, así como familias en situación de desplazamiento o con jefatura única.

En estos comedores, que responden al proyecto «*Comedores Comunitarios. Un Medio para restablecer el derecho fundamental a la Alimentación*», se brindará entre lunes y sábado, almuerzo para estas personas, que se complementará con el desarrollo de actividades relacionadas con el mejoramiento del nivel nutricional de los y las beneficiarias y con capacitación y organización para la participación y la autogestión.

Obviamente se deben establecer costos mínimos por almuerzo, ¿Cuántos almuerzos se deben producir con el objetivo de hacer la política más viable y minimizar los costos?

En primer lugar se estableció por estudios previos una relación de costos:

$C = 250.000 + 1.200q + 0.5q^2$

$$\overline{C} = \frac{C}{q} = \frac{250.000}{q} + 1.200 + 0{,}5q$$

La primera derivada del costo promedio es:

$$\frac{d\overline{C}}{dq} = -\frac{250.000}{q^2} + 50$$

y esto se iguala a 0 para saber cuantos almuerzos debo preparar para minimizar el costo promedio por almuerzo.

$$\frac{250.000}{q^2}=0{,}5\rightarrow 250.000=0{,}5q^2$$
$$\frac{250.000}{0{,}5}=q^2\rightarrow q=\sqrt{500.000}$$
$$q=707{,}1$$

Ahora el criterio de la segunda derivada nos indicará la concavidad.

$$\frac{d^2\overline{C}}{dq^2}=\frac{500.000}{q^3}$$
$$\frac{500.000}{707{,}1^3}=0{,}00141425425$$

Como el resultado es positivo tenemos el criterio de que en esta coordenada hay un punto mínimo.

Por lo tanto un precio mínimo para cada almuerzo se representará para *f* cuando q = 50 en la función de costo promedio mínimo por almuerzo.

$$\overline{C}(50)=\frac{250.000}{707{,}1}+1.200+0{,}5(707{,}1)$$
$$=353{,}55+1.200+353{,}55$$
$$=1.907{,}1$$

Tenemos ahora el precio necesario para establecer un costo por almuerzo que en este caso es de $1907.1, claro que puede existir otra dependencia gubernamental o ajena al Estado que quiera establecer otro apoyo para que se puedan vender los almuerzos a precios mucho mas bajos.

5.- **Demanda hospitalaria**. Se hace una encuesta en la localidad de tunjuelito para saber el promedio de personas que utilizan el servicio medico del hospital el Tunal, para establecer un costo fijo en la consulta medica y se ha determinado una función aproximada de la demanda la cual se expresa así q=12.000 – 1.100p.

a. Determinar la tarifa que se cobrara con objeto de maximizar el ingreso diario de la tarifa médica.

b. Cual es el ingreso máximo esperado y cuantos pacientes por día se esperan ?

Solución:

a. R= f(p)

R= (12.000 – 1.100p) p

R= 12.000p – 1.100p^2

f ''(p) 12.000 – 2.200p

12.000 – 2.200p = 0

12.000 = 2.200p

$\frac{12.000}{2.200}$ = p

5,45 = p

f ''(p) = – 2.200

f ''(5.45) = –2.200 < 0

b. f ''(5.45) = 12.000(5.45) – 1.100 (5.45)^2

= 65.455 – 32.672

= 32.782

El ingreso máximo esperado es de 32.782

q= 12.000 – 1.100 (5,45)

q= 12.000 – 5.995

q= 6.005

Se esperan 6.005 personas por día.

6.- **Seguridad Social**. Un municipio asume los costos de salud en los estratos más bajos, por una política de su nuevo alcalde. Se supone que el costo total por asumir esta responsabilidad esta dado por la ecuación

$$C= 5q^2+ q + 50$$

a) En que nivel de cubrimiento es mínimo el costo promedio por habitante?

b) En que nivel de cubrimiento el costo medio el costo medio

Solución.

A)

$$Costo\ promedio\ \overline{C} = \frac{C(q)}{q}$$

$$\overline{C} = \frac{5q^2}{q} + \frac{q}{q} + \frac{50}{q} = 5q + 1 + 50q^{-1}$$

$$\frac{d\overline{C}}{dq} = 5 - \frac{50}{q^2}\ igualamos\ a\ cero:$$

$$5 - \frac{50}{q^2} = 0 \rightarrow 5 = \frac{50}{q^2} \rightarrow q^2 = \frac{50}{5}$$

$$q = \sqrt{10} = 3{,}16$$

Esta es la cantidad que garantiza al municipio un mínimo costo.

B) Costo marginal = MC = Derivada del costo total

MC= 10q + 1

Debemos averiguar donde el costo total es igual al costo promedio

$10q + 1 = 5q + 1 + 50/q$

$10q – 5q = 50/q$

$5q = 50/q$

$5q\ (q) = 50$

$5q^2 = 50$

$q^2 = 50/5$

$q^2 = 10$

$q = 3{,}16$

Este es el nivel de cobertura en que el costo medio por habitante es igual al costo marginal.

Conclusión: Este ejercicio nos prueba el criterio del análisis marginal para el costo medio mínimo, según el cual, el costo medio se minimiza en el nivel de producción donde el costo medio es igual al costo marginal; es decir, cuando: $MC = \overline{C}(q)$

7. **Teoría de colas.** (propuesto por Claudia Emma Lucía Osorio López) La concurrencia de las personas a la Oficina del Servicio Público de Empleo del SENA de Mosquera se mide en una escala de 0 a 50 y viene expresada por la función V(t)= $40+15t-9t^2+t^3$, donde t es el tiempo(en horas) transcurrido desde que comienza el horario de atención (t=0). Con el propósito de saber en que momento del horario de atención se requiere la presencia de más o de menos funcionarios para atender al público, indique los instantes de máxima y mínima concurrencia de personas en las 6 horas de atención al público (7am-1pm).

SOLUCIÓN

V(t)= $40+15t-9t^2+t^3$ Derivando

V´(t)= $15-18t+3t^2$

Igualando a 0

$3t^2-18t+15=0$

Simplificando $t^2-6t+5=0$, cuyas soluciones son 5 y 1.

Se halla el máximo y el mínimo de la función, en el intervalo [0, 6], que tiene que estar entre estos dos valores junto o en los extremos del intervalo.

Ordenando la función

V(t)= $t^3-9t^2+15t+40$

V(0)=40

V(5)=125-225+75+40 =15

V(1)=1-9+15+40= 47

V(6)=216-324+90+40=22

Respuesta:

La máxima concurrencia de personas al Servicio Público de Empleo es a las 1 horas (8:00 am) y la mínima es a las 5 horas (12:00pm). Por lo tanto, para que la atención al público sea óptima el SENA debe programar un mayor número de funcionarios en el intervalo de máxima concurrencia.

Autor: José Miguel Cubillos Munca
Libro: Matemáticas I(versión corregida el 12/02/2008
Editor: ESAP Publicaciones
ISBN: 958-652-122-2 Año: 2002